

特異性をもつ完全積分可能な線型 Pfaff 方程式 の Gevrey 強漸近解

東大理 矢神 毅 (Takesi YAGAMI)

ここで扱うのは、次の形の完全積分可能な線型 Pfaff 方程式である：

$$(1) \begin{cases} x^{p+1} \frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y) u \\ y^{q+1} \frac{\partial u}{\partial y} = B(x, y) u \end{cases}$$

$$p, q \in \mathbb{N}, A, B \in M_n(\mathbb{C}\{x, y\})$$

(1) の完全積分可能条件は、

$$x^{p+1} \frac{\partial B}{\partial x} - y^{q+1} \frac{\partial A}{\partial y} = AB - BA$$

で表わされる。この条件の下で (1) の解全体は、 $\mathbb{C}$ 上 n 次元の線型空間をなす。常微分方程式の場合にほら、て、(1) の形式解、漸近解 等、についても色々と調べられているが、ここでは、(1) の "Gevrey 強漸近解" の存在 (というより、むしろ (1) の解の Gevrey 強漸近性) について述べる。これは、常微分方程式について Ramis [6] によりなされた事の線型 Pfaff 方程式への拡張である。証明の方針は、形式解を求

める際に使われる形式的変換が Borel 総和可能であることを示して、その Borel 和をとることにより漸近解を作るのであるが、Borel 総和法を用いることにより Majima [3] で導入された強漸近性の概念が自然に現れることに注意したい。

§1. Gevrey 強漸近展開と Borel 総和法

この節では、主な道具である Borel の総和法と、その Gevrey 漸近展開との関係について説明する。まず、1 変数の形式巾級数

$$\hat{f}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} \in \mathbb{C}[[x]]$$

に対して、たとえこれが発散しても、積分

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\nu!} t^{\nu} \right) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

が存在するときに、 $f(x)$ を $\hat{f}(x)$ の Borel 和という。 $\hat{f}(x)$ が収束するとき、当然だが $f(x)$ は $\hat{f}(x)$ に一致する。これを拡張して、2 変数の形式巾級数の (p, q) -Borel 和 というものを次のように定義する。

定義 $p, q \geq 1$, $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$ のとき、次の条件 (*) をみたす正則函数 $F(t, s)$ の全体を $\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ と書く：

(*) $\exists A, B > 0$ があり $F(t, s)$ は

$$\{t \mid |t| < A \text{ 又は } \alpha_1 < \arg t < \beta_1\} \times \{s \mid |s| < B \text{ 又は } \alpha_2 < \arg s < \beta_2\}$$

で正則であり、更に、 $\alpha_i < \forall \alpha'_i \leq \forall \beta'_i < \beta_i$ ($i=1, 2$) に対して

$\exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ があり $\alpha'_i \leq \arg t \leq \beta'_i, \alpha'_2 \leq \arg s \leq \beta'_2$ のとき

$$|F(t, s)| \leq K e^{\lambda_1 |t|^p + \lambda_2 |s|^q}$$

が成り立つ。

また、 $B_{p,q} : \mathbb{C}[[x, y]] \longrightarrow \mathbb{C}[[t, s]]$ を

$$\sum a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \xrightarrow{B_{p,q}} \sum \frac{a_{\mu\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})} t^\mu s^\nu$$

で定め、

$$\hat{\mathcal{O}}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2) = \{\hat{f} \in \mathbb{C}[[x, y]] \mid B_{p,q}(\hat{f}) \in \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)\}$$

と置く。このとき、 $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ の (p, q) -Borel 和

を

$$f(x, y) = \frac{pq}{x^p y^q} \int_0^{\infty(\theta_1)} \int_0^{\infty(\theta_2)} B_{p,q}(\hat{f})(t, s) e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^p - \left(\frac{s}{y}\right)^q} t^{p-1} s^{q-1} dt ds$$

で定義する。但し積分路は、 $\arg t = \theta_1, \arg s = \theta_2$ で、 θ_1, θ_2 は、 $\alpha_i < \theta_i < \beta_i$ で動かとする。 ———

次に Borel 和ともとの形式巾級数の関係を説明するために、Gevrey 強漸近展開なるものを定義する。これは、Majima [3] により導入された強漸近展開において、剰余項の増大度に制

限をつけたものである。

定義 $\rho = 1 + \frac{1}{p}$, $\sigma = 1 + \frac{1}{q}$ ($p, q \geq 1$)

$S = S_1 \times S_2$: 原点を頂点とある polysector とせよ。

このとき、 $f(x, y) \in \mathcal{O}(S)$ が (ρ, σ) 級の Gevrey 強漸近展開可能とは、次の条件が成り立つこと:

$$\exists f_{*,\nu}(x) \in \mathcal{O}(S_1), \exists f_{\mu,*}(y) \in \mathcal{O}(S_2)$$

$$\exists \hat{f}(x, y) = \sum a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \in \mathbb{C}[[x, y]]$$

があり、

$$(2) \quad R_{m,n}(x, y) = f(x, y) - \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu f_{\mu,*}(y) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f_{*,\nu}(x) y^\nu + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

とあくとき、 S の任意の closed subpolysector S' に対して

$\exists K, A, B > 0$ があり、 $(x, y) \in S'$ のとき

$$|R_{m,n}(x, y)| \leq K A^m B^n \Gamma(1 + \frac{m}{p}) \Gamma(1 + \frac{n}{q}) |x|^m |y|^n$$

が成り立つ ———

また、 $\exists R_1, R_2 > 0$ があり polysector

$$\{x \mid |x| < R_1, \alpha_1 < \arg x < \beta_1\} \times \{y \mid |y| < R_2, \alpha_2 < \arg y < \beta_2\}$$

に於て (ρ, σ) 級 Gevrey 強漸近展開可能である函数全体を、

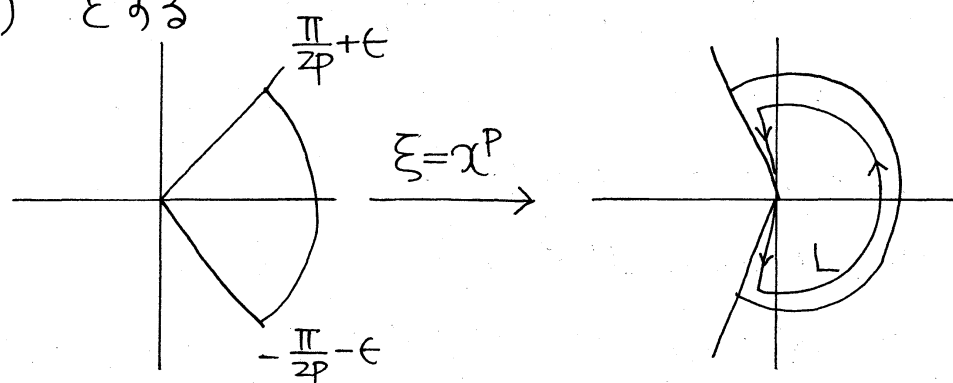
$A_{(\rho, \sigma)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ と書く。

上の $\hat{f}$ のことは、 f の (ρ, σ) 級 Gevrey 強漸近展開といい、 $\hat{f} = J(f)$ と書く。

次の定理は, polysector のひらきが $(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q})$ より大きい時に J が 1対1 になること, 及び J の像の特徴付けを与えるもので, Watson[8], Nevanlinna[4],[5] の 2変数版である。

定理 1 $\rho = 1 + \frac{1}{p}$, $\sigma = 1 + \frac{1}{q}$; $\alpha_i < \beta_i$ ($i=1,2$) のとき
 $J: \mathcal{A}_{(\rho,\sigma)}(\alpha_1 - \frac{\pi}{2p}, \beta_1 + \frac{\pi}{2p}; \alpha_2 - \frac{\pi}{2q}, \beta_2 + \frac{\pi}{2q}) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$
 は, 微分を保つ環の同型写像であり, その逆写像は, (p,q) -Borel和を取ることで与えられる。

証明 まず 1変数の場合の対応 i.e. ρ 級 Gevrey 漸近展開可能函数と, p -Borel 総和可能形式巾級数の対応の天略を述べる。 $\alpha_1 = -\epsilon$, $\beta_1 = \epsilon$ ($\epsilon > 0$) の場合に限ってよいので, まず $f(x) \in \mathcal{A}_\rho(-\epsilon, \epsilon)$ とする。 $\xi = x^p$ とおき $\bar{f}(\xi) = f(x) = f(\xi^{\frac{1}{p}})$ とする



積分路 L を右上図のように 0 から出て 0 にもどるように取り,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{f}(\xi)}{\xi} e^{\frac{t^p}{\xi}} d\xi$$

とあくと $F(t)$ が $f(x)$ に対応する $\mathcal{H}_p(-\epsilon, \epsilon)$ の元とほる (つまり $F = B_p(\hat{f})$ とほる)。実際

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu + R_n(x) \quad , \quad |R_n(x)| \leq K A^n \Gamma(1 + \frac{n}{p}) |x|^n$$

とすると、

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{\Gamma(1 + \frac{\nu}{p})} t^\nu + F_n(t)$$

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{R}_n(\xi)}{\xi} e^{\frac{t^p}{\xi}} d\xi \quad , \quad \bar{R}_n(\xi) := R_n(x) = R_n(\xi^{\frac{1}{p}})$$

であり、

$$|F_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi} K A^n \Gamma(1 + \frac{n}{p}) \int_L |\xi|^{\frac{n}{p}-1} e^{\operatorname{Re}(\frac{t^p}{\xi})} |d\xi|$$

が分る。

$|F_n(t)|$ を評するために、積分路 L を動かす。円弧の部分は、半径 $= \frac{p}{n} |t|^p$ とし Stirling の公式を用いると、

$$|F_n(t)| \text{ の円弧の寄与 } \leq K_1 \sqrt{n} (A|t|)^n$$

半直線の部分は、 $t = |t|e^{i\varphi}$ とし $|\varphi| \leq \exists \epsilon_0 < \epsilon$ で t を動かせば、 L の半直線の角度を適当にかえて、また L 上で

$$\operatorname{Re}\left(\frac{t^p}{\xi}\right) \leq -\delta \frac{|t|^p}{|\xi|} \quad (\exists \delta > 0)$$

であることより、

$$|F_n(t)| \text{ の半直線の寄与 } \leq \frac{K_2}{\delta} A^n n^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{p}} |t|^n$$

従って、まず $|t| < A^{-1}$ では

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(1 + \frac{\nu}{p})} t^\nu \quad \text{は収束。}$$

そして $|\varphi| < \epsilon$ で $F(t)$ が正則になることも分る。 $F(t)$ の増大度については、

$$F(t) = a_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{R}_1(\xi)}{\xi} e^{\frac{t^p}{\xi}} d\xi$$

と書き $\xi^{-\frac{1}{p}} \overline{R}_1(\xi)$ が有界であることに注意すれば、 $\operatorname{Re}(\xi^{-1}) \leq \lambda$ ($\xi \in L$) なる $\lambda > 0$ に対して

$$|F(t)| \leq |a_0| + K_2 e^{\lambda |t|^p}$$

がかり、 $F(t) \in \mathcal{H}_p(-\epsilon, \epsilon)$ が示される。

逆に $F(t) \in \mathcal{H}_p(-\epsilon, \epsilon)$ が与えられたとき、原点の近傍で、

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(1+\frac{\nu}{p})} t^\nu, \quad |t| < A^{-1}$$

と展開されているならば、

$$f(x) = \frac{p}{x^p} \int_0^{\infty(\theta)} F(t) e^{-\frac{t^p}{x^p}} t^{p-1} dt, \quad |\theta| < \epsilon$$

とみると、 $f(x) \in \mathcal{A}_p(-\epsilon - \frac{\pi}{2p}, \epsilon + \frac{\pi}{2p})$ で、 $J(f) = \sum a_\nu x^\nu \in \hat{\mathcal{O}}_p(-\epsilon, \epsilon)$

となることを示す。 $|\arg t| \leq \epsilon' < \epsilon$ で $|F(t)| \leq K e^{\lambda |t|^p}$ であるから、

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{\Gamma(1+\frac{\nu}{p})} t^\nu + t^n F_n(t)$$

とみると、 $|F_n(t)| \leq K_1 A^n e^{\lambda |t|^p}$ 。 二つより

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{p}{x^p} \int_0^{\infty(\theta)} t^n F_n(t) e^{-\frac{t^p}{x^p}} t^{p-1} dt$$

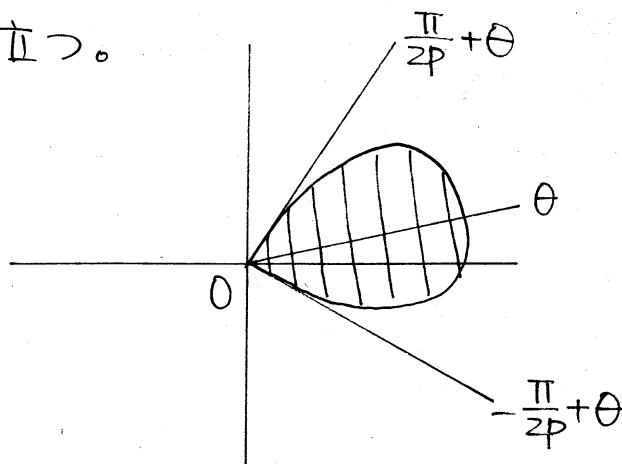
ここで、 α の動く範囲を

$$\lambda |t|^p - \operatorname{Re} \left(\frac{t^p}{x^p} \right) \leq -\delta \left| \frac{t}{x} \right|^p \quad (\delta > 0)$$

にあると、そこで

$$|R_n(x)| \leq K_1 \frac{A^n}{\delta^{\frac{n}{p}+1}} \Gamma \left(1 + \frac{n}{p} \right) |x|^n$$

となる。 $f(x)$ の定義式における積分路 $\arg t = \theta$ を $|\theta| < \epsilon$ で変えて、また δ を $\delta > 0$ で変えることにより $f(x)$ は $|\arg x| < \frac{\pi}{2p} + \epsilon$ のある sector で正則となり、 $f(x) \in A_p \left(-\frac{\pi}{2p} - \epsilon, \frac{\pi}{2p} + \epsilon \right)$ が成り立つ。

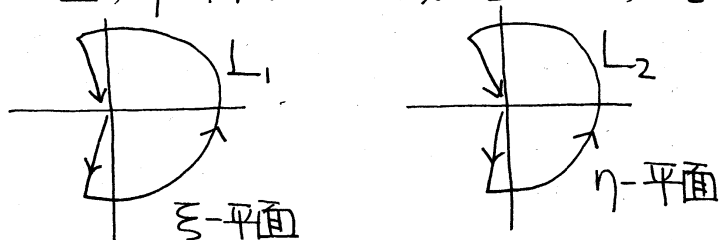


$\arg t = \theta$ のときの
 $\lambda |t|^p - \operatorname{Re} \left(\frac{t^p}{x^p} \right) \leq -\delta \left| \frac{t}{x} \right|^p$
 の $\square$

これで一変数の場合の $A_p(\alpha, -\frac{\pi}{2p}, \beta, \frac{\pi}{2p})$ と $\hat{\mathcal{O}}_p(\alpha, \beta)$ との対応が示された。次に二変数の場合に移る。今度も $\beta_i = \epsilon_i = -\alpha_i$ の場合に限ってよい。 $f(x, y) \in A_{(p, q)}(\epsilon_1 - \frac{\pi}{2p}, \epsilon_1 + \frac{\pi}{2p}; -\epsilon_2 - \frac{\pi}{2q}, \epsilon_2 + \frac{\pi}{2q})$ に対して変数を $\xi = x^p, \eta = y^q$ と取りかえたものを

$$\bar{f}(\xi, \eta) := f(x, y) = f(\xi^{\frac{1}{p}}, \eta^{\frac{1}{q}})$$

とし、 ξ -平面、 η -平面上に積分路 L_1, L_2 を前のように



と取って

$$F(t,s) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\bar{f}(\xi, \eta)}{\xi \eta} e^{\frac{t^p}{\xi} + \frac{s^q}{\eta}} d\xi d\eta \right)$$

と置く。これが f に対応すべき $\mathcal{H}_{(p,0)}$ の元である。Gevrey 強漸近性の定義における (2) 式を上式に代入すれば、

$$\begin{aligned} F(t,s) = & \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{t^\mu}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})} F_{\mu,*}(s) + \sum_{\nu=0}^{n-1} F_{*,\nu}(t) \frac{s^\nu}{\Gamma(1+\frac{\nu}{q})} \\ & - \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_{\mu\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})} t^\mu s^\nu + \Phi_{m,n}(t,s) \end{aligned}$$

但し、

$$F_{\mu,*}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\bar{f}_{\mu,*}(\eta)}{\eta} e^{\frac{s^q}{\eta}} d\eta$$

$$F_{*,\nu}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\bar{f}_{*,\nu}(\xi)}{\xi} e^{\frac{t^p}{\xi}} d\xi$$

$$\Phi_{m,n}(t,s) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\bar{R}_{m,n}(\xi, \eta)}{\xi \eta} e^{\frac{t^p}{\xi} + \frac{s^q}{\eta}} d\xi d\eta \right)$$

(2)より、 $f_{\mu,*}(y)$ は $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} y^\nu$ を σ 級 Gevrey 漸近展開としてもつこと etc. はすぐ分るので、一変数の結果より

$$F_{\mu,*}(s) \in \mathcal{H}_\sigma(-\epsilon_2, \epsilon_2), \quad F_{*,\nu}(t) \in \mathcal{H}_\rho(-\epsilon_1, \epsilon_1)$$

$\Phi_{m,n}(t,s)$ の評価も、一変数のときと同じようにすれば、

$|t| < \frac{1}{A}, |s| < \frac{1}{B}$ のとき $\Phi_{m,n}(t,s) \rightarrow 0$ となり、 $F(t,s)$ は

$$F(t,s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})} t^{\mu} s^{\nu}$$

と表わされる。そして、 $F(t,s)$ は $|\arg t| < \epsilon_1$, $|\arg s| < \epsilon_2$ でも正則となる。 $F(t,s)$ の増大度についても

$$F(t,s) = F_{0,*}(s) + F_{*,0}(t) - a_{00} + \Phi_{1,1}(t,s)$$

と書き、 $L_1 \times L_2$ 上で $|\xi|^{-\frac{1}{p}} |\eta|^{-\frac{1}{q}} \bar{R}_{1,1}(\xi, \eta)$ が有界であることに注意すると

$$\begin{aligned} |\Phi_{1,1}(t,s)| &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{L_1 \times L_2} |\xi|^{-\frac{1}{p}} |\eta|^{-\frac{1}{q}} \bar{R}_{1,1}(\xi, \eta) |\xi|^{-1+\frac{1}{p}} |\eta|^{-1+\frac{1}{q}} e^{\operatorname{Re}(\frac{t\xi}{\xi}) + \operatorname{Re}(\frac{s\eta}{\eta})} |d\xi d\eta| \\ &\leq K' e^{\lambda_1 |t|^p + \lambda_2 |s|^q} \quad (\exists K' > 0) \end{aligned}$$

但し、 $\lambda_1 \geq \operatorname{Re}(\frac{1}{\xi})$ on L_1 , $\lambda_2 \geq \operatorname{Re}(\frac{1}{\eta})$ on L_2

なので、 $F(t,s) \in \mathcal{H}_{(p,q)}(-\epsilon_1, \epsilon_1; -\epsilon_2, \epsilon_2)$ が分る。

逆に $F(t,s) \in \mathcal{H}_{(p,q)}(-\epsilon_1, \epsilon_1; -\epsilon_2, \epsilon_2)$ が与えられたとする。

原点の近傍で

$$F(t,s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})} t^{\mu} s^{\nu}$$

と展開され、 $|\arg t| \leq \epsilon'_1 < \epsilon_1$, $|\arg s| \leq \epsilon'_2 < \epsilon_2$ に於て

$$|F(t,s)| \leq K e^{\lambda_1 |t|^p + \lambda_2 |s|^q}$$

であるとする。一変数の時と同様に

$$f(x,y) = \frac{pq}{x^p y^q} \int_0^{\infty(\theta_1)} \int_0^{\infty(\theta_2)} F(t,s) e^{-(\frac{t}{x})^p - (\frac{s}{y})^q} t^{p-1} s^{q-1} dt ds$$

とおくのだが、 $f(x,y)$ の漸近性を示すために $F(t,s)$ を

$$F(t,s) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{t^\mu}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})} F_{\mu,*}(s) + \sum_{\nu=0}^{n-1} F_{*,\nu}(t) \frac{s}{\Gamma(1+\frac{\nu}{q})} - \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_{\mu\nu} t^\mu s^\nu}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p}) \Gamma(1+\frac{\nu}{q})} \\ + t^m s^n F_{m,n}(t,s)$$

と分解して代入すれば、自然に強漸近性が導かれる。この計算は1変数のときと全く同様なので省略する。以上で定理の略証を終める。 $\square$

次に $B_{p,q} : \widehat{\mathcal{O}}_{(p,q)} \rightarrow \mathcal{H}_{(p,q)}$ により微分や積がどのように振るかを述べる。

定義 $A(t,s), B(t,s) \in \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ に対して

$$A \#_{p,q} B = pq \int_0^t \int_0^s A(\sqrt[p]{t^p - u^p}, \sqrt[q]{s^q - v^q}) B(u,v) u^{p-1} v^{q-1} du dv$$

$$A \#_{p,*} B = p \int_0^t A(\sqrt[p]{t^p - u^p}, s) B(u,s) u^{p-1} du$$

$$A \#_{*,q} B = q \int_0^s A(t, \sqrt[q]{s^q - v^q}) B(t,v) v^{q-1} dv$$

と定義する。但し、積分路は u, v それぞれに関して、 0 と t 及び 0 と s を結ぶ線分とし、 $\sqrt[p]{t^p - u^p}, \sqrt[q]{s^q - v^q}$ は、 $u=0, v=0$ のときそれぞれ t, s とする分枝をとるものとする。

このとき、 $A \#_{p,q} B \in t^p s^q \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$, $A \#_{p,*} B \in t^p \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$, $A \#_{*,q} B \in s^q \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ が成り立つ。

次の命題は、 $B_{p,q}(\hat{a}) = A$ のときは逆に

$$a = \frac{pq}{x^p y^q} \int_0^\infty \int_0^\infty A(t,s) e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^p - \left(\frac{s}{y}\right)^q} t^{p-1} s^{q-1} dt ds$$

$$J(a) = \hat{a}$$

とすることを用いて計算するだけなので証明を略す。

命題2 $B_{p,q}(\hat{a}) = A, B_{p,q}(\hat{b}) = B$ のとき

$$i) B_{p,q}\left(x \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}\right) = t \frac{\partial}{\partial t} A$$

$$B_{p,q}\left(y \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}\right) = s \frac{\partial}{\partial s} A$$

$$ii) B_{p,q}(x^p y^q \hat{a} \hat{b}) = A \#_{p,q} B$$

$$iii) B_{p,q}(\hat{a} \hat{b}) = A(0,0)B(t,s) + \frac{1}{p} \frac{\partial A}{\partial t}(t,0) \#_{p,*} B(t,s) \\ + \frac{1}{q} \frac{\partial A}{\partial s}(0,s) \#_{*,q} B(t,s) + \frac{1}{pq} \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial s}(t,s) \#_{p,q} B(t,s)$$

$$iv) B_{p,q}\left(x^{p+1} \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}\right) = pA(t,s)t^p - p \#_{p,*} A(t,s)$$

$$B_{p,q}\left(y^{q+1} \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}\right) = qA(t,s)s^q - q \#_{*,q} A(t,s)$$

§2. Analytic Block-diagonalization

Pfaff系(1)の Formal Reduction において、形式変換の漸近的意味付けが必要となるのは、Block-diagonalizationと呼ばれる段階のみである。以下、それについて説明する。

(1)の形の Pfaff 系に於て、今、 $A, B \in M_n(\mathbb{C}[[x, y]])$ の状況を考える。つまり形式的な Pfaff 系とする。このとき、もし

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} \mathring{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathring{A}_2 \end{bmatrix} \quad \mathring{A}_1 \text{ と } \mathring{A}_2 \text{ は共通の固有値をもたない}$$

であるならば、Pfaff 系 (1) は形式変換

$$u = T(x, y) u_1, \quad T(x, y) = 1_n + \begin{bmatrix} 0 & T_{12} \\ T_{21} & 0 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}[[x, y]])$$

により

$$\begin{cases} x^{p+1} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} u_1, \\ y^{q+1} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} u_1 \end{cases}, \quad A_1(0,0) = \mathring{A}_1, A_2(0,0) = \mathring{A}_2$$

とより小さい系の直和として書ける。この変換が Block-diagonalization と呼ばれるもので、Sibuya [7] で用いられた。ここで、係数を Gevrey 強漸近展開可能函数ないしは Borel 総和可能級数にすると、 $T(x, y)$ もそのようになる。

定理 3 上の Block-diagonalization に於て

$$A, B \in M_n(\hat{\mathcal{O}}_{(p', q')}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2))$$

であるとする。更に角度 α_1, β_1 については、次の条件 (☆) を課す。

(☆) $C := \hat{A}_1 \otimes 1 - 1 \otimes \hat{A}_2$ とおくとき、 $\det[pt^P - C] = 0$ の根の偏角を区間 (α_1, β_1) は含まない ($\text{mod } 2\pi$ で) のとき $T(x, y) \in M_n(\hat{\mathcal{O}}_{(p, q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2))$ とする。

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ とおくと、 } T_{12}, T_{21} \text{ はそれぞれ}$$

$$x^{p+1} \frac{\partial T_{12}}{\partial x} = A_{12} + A_{11}T_{12} - T_{12}A_{22} - T_{12}A_{21}T_{12}$$

$$x^{p+1} \frac{\partial T_{21}}{\partial x} = A_{21} + A_{22}T_{21} - T_{21}A_{11} - T_{21}A_{12}T_{21}$$

の形式巾級数解として一意的に求まるので、この定理は次の定理より直ちに出来る。

定理 4 $\hat{f}(x, y), \hat{B}_\nu(x, y) \in \hat{\mathcal{O}}_{(p, q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)^N$

$$\hat{C}(x, y) \in M_N(\hat{\mathcal{O}}_{(p, q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2))$$

とし、 $\hat{B}_\nu(0, 0) = 0$, $\det \hat{C}(0, 0) \neq 0$

$\det[pt^P - \hat{C}(0, 0)] = 0$ の根の偏角を区間 (α_1, β_1) は含まない
を仮定する。このとき $\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_N \end{bmatrix}$ に関する ($\text{mod } 2\pi$ で) 方程式

$$x^{p+1} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} = \hat{f}(x, y) + \hat{C}(x, y) \hat{\varphi} + \sum_{|\nu|=2} \hat{B}_\nu(x, y) \hat{\varphi}^\nu$$

は、一意解 $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{O}}_{(p, q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)^N$ をもつ。但し、

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) \in \mathbb{N}^N, |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_N, \hat{\varphi}^\nu := \hat{\varphi}_1^{\nu_1} \dots \hat{\varphi}_N^{\nu_N}$$

のこととする。

この定理4を示すには、 $B_{p,q}$ により $\mathcal{H}_{(p,q)}$ での方程式に書きかえる。その際、次の補題を用いる。

補題5 $f(t,s), b_\nu(t,s) \in \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)^N$
 $F_i(t,s) \in M_N(\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2))$
 $G(t,s)$: 原点の近傍及び $\alpha_1 < \forall \alpha'_1 \leq \arg t \leq \forall \beta'_1 < \beta_1$,
 $\alpha_2 < \forall \alpha'_2 \leq \arg s \leq \forall \beta'_2 < \beta_2$ で有界正則な函数
 を係数とする $N \times N$ 行列

に対して作用素 L を

$$L\psi = G[f + L_1\psi + L_2\psi + L_3\psi + P\psi]$$

$$L_1\psi = \frac{F_1(t,s)}{t^{p-1}} \#_{p,*} \psi(t,s)$$

$$L_2\psi = \frac{F_2(t,s)}{s^{q-1}} \#_{*,q} \psi(t,s)$$

$$L_3\psi = \frac{F_3(t,s)}{t^{p-1}s^{q-1}} \#_{p,q} \psi(t,s)$$

$$P\psi = \sum_{|\nu|=2} b_\nu(t,s) \#_{p,q} \psi(t,s)^{\#_\nu}$$

で定義する。但し、 $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}$, $\psi^{\#_\nu} = \underbrace{\psi_1 \# \cdots \# \psi_1}_{\nu_1 \text{回}} \cdots \# \underbrace{\psi_N \# \cdots \# \psi_N}_{\nu_N \text{回}}$
 とする。このとき方程式

$$L\psi = \psi$$

は、唯一つの解 $\psi \in \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)^N$ をもつ。

略証 次の3つのステップにより示される:

イ) 原点の近傍で一意的に正則解が存在すること

ロ) その解が $\alpha_1 < \arg t < \beta_1$, $\alpha_2 < \arg s < \beta_2$ での正則解に延長されること

ハ) $|\psi(t, s)| \leq K e^{\lambda_1 |t|^p + \lambda_2 |s|^q}$ となること

イ) は、 $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ を十分小さく取り、 $D = \{(t, s) \mid |t| \leq \epsilon_1, |s| \leq \epsilon_2\}$ とおくと、 $L: \mathcal{O}(D)^N \longrightarrow \mathcal{O}(D)^N$ が縮小写像になることが分るので成り立つ。

ロ) は次のようにする。 $|t| \leq \epsilon_1, |s| \leq \epsilon_2$ での解 $\psi(t, s)$ があるとき、 $\frac{1}{2}\epsilon_1 < |t_0| < \epsilon_1$ なる t_0 を取り、未知変数を、

$$\psi'(t, s) = \psi(\sqrt[p]{t_0^p + t^p}, s)$$

と取りかえて、 $L\psi = \psi$ を ψ' に関する方程式に書き直すと、 ψ に関して2次の部分は $\#$ が convolution のようなものだから、片方は“既知”となり、 ψ' に関する線型の Volterra 型の積分方程式になる。こうして $\arg t = \arg t_0$ の方向に $|t| \leq \frac{3}{2}\epsilon_1$ までは解が延長される。 s についても同じことを行う。これをくり返せば、 t, s それぞれについて、原点からのびる半直線に沿って (係数が定義される限り) 解が延長されることが分る。従って、 $\alpha_1 < \arg t < \beta_1$, $\alpha_2 < \arg s < \beta_2$ での正則解が作れる。

ハ) の証明には、2変数の Laplace 変換を用いる。難しくはな

いか、記号 etc. の説明から始めると弱々長くなるので、ここでは省略するか、解 $\varphi(t, s)$ に対して、

$$\Phi(u, v) = \sup_{\substack{t+s=u \\ |s|^q=v}} |\varphi(t, s)|$$

とあって、次の補題を使えばできる。 $\square$

補題 6 $F(z, w)$ は、 $\operatorname{Re}(z) > \lambda_1, \operatorname{Re}(w) > \lambda_2$ で正則で、

ここで $z, w \rightarrow \infty$ のとき $\exists c_1, c_2 > 1$ があり

$$F(z, w) = O(|z|^{-c_1} |w|^{-c_2})$$

が成り立つとすると、 $\forall \xi_1 > \lambda_1, \forall \xi_2 > \lambda_2$ に対して、積分

$$f(u, v) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} \int_{\xi_2 - i\infty}^{\xi_2 + i\infty} e^{uz + vw} F(z, w) dz dw$$

は存在して、

i) $f(u, v)$ は $\mathbb{R}^2$ で連続で、 $u < 0$ or $v < 0$ ならば $f(u, v) = 0$

ii) $\forall \lambda'_1 > \lambda_1, \forall \lambda'_2 > \lambda_2, \exists K > 0$ があり $|f(u, v)| \leq K e^{\lambda'_1 u + \lambda'_2 v}$

iii) $\operatorname{Re}(z) > \lambda_1, \operatorname{Re}(w) > \lambda_2$ のとき、

$$F(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zu - wv} f(u, v) du dv \quad \text{——}$$

この補題は、1変数の Laplace 変換ではよく知られたもので、2変数でも証明は入差ない。

定理4の証明 $\hat{b}_\nu(0,0)=0$ より $\hat{b}_\nu(x,y) \in x^p y^{2q} \hat{b}_\nu(x,y)$ で取り換えてよい。このとき $B_{p,q}(\hat{f}) = \tilde{f}$ etc. と $B_{p,q}$ による像を $\hat{}$ を $\tilde{}$ にかえて表わすことにすれば、 $B_{p,q}$ により方程式は、

$$\begin{aligned} [pt^p - C(0,0)] \tilde{\varphi}(t,s) &= \tilde{f}(t,s) + \left[p + \frac{1}{p} \frac{\partial \tilde{C}(t,0)}{\partial t} \right] \#_{p,*} \tilde{\varphi}(t,s) \\ &+ \frac{1}{q} \frac{\partial \tilde{C}(0,s)}{\partial s} \#_{*,q} \tilde{\varphi}(t,s) + \frac{1}{pq} \frac{\partial \tilde{C}(t,s)}{\partial t \partial s} \#_{p,q} \tilde{\varphi}(t,s) + \sum_{|\nu|=2} \hat{b}_\nu(t,s) \#_{p,q} \tilde{\varphi}(t,s)^{\#_{p,q} \nu} \end{aligned}$$

と $\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)^N$ に於ける積分方程式に変換される (命題2を使う)。すると補題5により $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{O}}_{(p,q)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)^N$ となる $\square$

これで Block-diagonalization が Borel 総和可能であることが分った。定理3で、 $\det[pt^p - C] = 0$ の根の偏角の方向が障害には、たが、この方向が Borel 総和できない方向である。この方向を "特異方向" ということにする。Pfaff系(1)の特異方向は、determining factor から求めることができる (後述)。

§3. 形式解と Gevrey 強漸近解

Pfaff系(1)は、常微分方程式と似た形の形式解をもつが、このことは Charrière [1] によって示された。それによれば、適当に変数変換 $x = x_i^k, y = y_i^l$ ($k, l \in \mathbb{N}$) を施すことにより Pfaff系(1)は次の形の形式解をもつ：

$$(3) \quad \hat{H}(x, y) x^{L_1} y^{L_2} e^{Q_1(\frac{1}{x})} e^{Q_2(\frac{1}{y})}$$

$$(\heartsuit) \left\{ \begin{array}{l} \hat{H} \in M_n(\mathbb{C}[[x, y]]) \\ L_1, L_2 \in M_n(\mathbb{C}) \\ Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & Q_{1,n} \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{2,1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & Q_{2,n} \end{bmatrix} \\ Q_{1,i}, Q_{2,j} \text{ は定数でない多項式} \end{array} \right.$$

系(1)が与えられたとき最初に $x \mapsto x^{1/k}, y \mapsto y^{1/l}$ として書き直せば、その系は分数巾をとらずに $x_1 = x, y_1 = y$ として(3)なる形式解をもつ。以下では、この状況で話を進める。i.e.

Pfaff系(1)は、(♥)をみたす $H, L_1, \dots$ たちによって

$$(4) \quad \hat{H}(x, y) x^{L_1} y^{L_2} e^{Q_1(\frac{1}{x})} e^{Q_2(\frac{1}{y})}$$

と表わされる形式解をもつものとする。(4)を求めるには、

Formal Reduction と呼ばれる操作を行うのだが、これは §2

で説明した Block-diagonalization や他の変換を組み合わせ、

(1)から始めて順次 p または q がより小さい(他の)Pfaff系に変換し最終的には $p=q=0$ まで導いていく Algorithm である。(1)の

係数 $A(x, y), B(x, y)$ が収束巾級数 のとき (または、より一般的

に (p, q) -Borel 総和可能 のとき)、Formal Reduction で現れる

形式巾級数は Borel 総和可能 であり (定理3を参照)、Block-

diagonalization を除いては、その class も悪くなることはない。

(何故なら、それらは代数的な変換だから)

以上のことと、定理3を組合せると、形式解(4)における $\hat{H}(x, y)$ を Borel 総和可能級数の積に分解できることが分る。

しかも、Formal Reduction のやり方をみると、Block-diagonalization が行なわれるときの "p" 及び "q" の値や、定理3における角度 α_1, β_1 の制限となつた "特異方向" が $Q_1(\frac{1}{x}), Q_2(\frac{1}{y})$ から決定できることが分る。結果のみを以下に述べる。

$$Q_{1,i}(\frac{1}{x}) = \sum_{\nu} \frac{\lambda_{i\nu}^{(1)}}{x^{\nu}} \quad , \quad Q_{2,j}(\frac{1}{y}) = \sum_{\nu} \frac{\lambda_{j\nu}^{(2)}}{y^{\nu}}$$

$$\{\deg(Q_{1,i} - Q_{1,j})\} \text{ の全体を } 0 < p_1 < \dots < p_r < \infty$$

$$\{\deg(Q_{2,i} - Q_{2,j})\} \text{ の全体を } 0 < q_1 < \dots < q_e < \infty$$

$$\sum_{p'}^{(1)} = \left\{ \arg \sqrt[p']{\lambda_{ip'}^{(1)} - \lambda_{jp'}^{(1)}} \mid \deg(Q_{1,i} - Q_{1,j}) = p' \text{ なる } i, j \right\}$$

$$p' \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

$$\sum_{q'}^{(2)} = \left\{ \arg \sqrt[q']{\lambda_{iq'}^{(2)} - \lambda_{jq'}^{(2)}} \mid \deg(Q_{2,i} - Q_{2,j}) = q' \text{ なる } i, j \right\}$$

$$q' \in \{q_1, \dots, q_e\}$$

$$\Sigma^{(1)} = \bigcup \sum_{p'}^{(1)} \quad , \quad \Sigma^{(2)} = \bigcup \sum_{q'}^{(2)}$$

とすると Block-diagonalization を行うときの "p" "q" の値はそれぞれ $p_1 < \dots < p_r ; q_1 < \dots < q_e$ であり、その時の特異方向全体は $\sum_{p'}^{(1)}, \sum_{q'}^{(2)}$ である。これらのことは、Formal Reduction のやり方より容易に分る。

今までのことより、次の定理を得る：

定理7 記号は前頁のものをを用いる。

$$\Gamma_\nu = (p_i, q_j) \quad , \quad \nu = i+j-1$$

なる“降下列” $\Gamma_{k+l-1} \not\subset \cdots \not\subset \Gamma_1$ を任意にとり、また

$$\alpha_1 < \beta_1, \quad \alpha_2 < \beta_2 \quad \text{を}$$

$$(\alpha_1, \beta_1) \cap \Sigma^{(1)} = \emptyset \quad , \quad (\alpha_2, \beta_2) \cap \Sigma^{(2)} = \emptyset$$

と取る。このとき、

$$\hat{H}(x, y) = \hat{H}_{\Gamma_{k+l-1}}(x, y) \cdots \hat{H}_{\Gamma_1}(x, y)$$

$$\hat{H}_{\Gamma_\nu}(x, y) = \hat{H}_{(p_i, q_j)}(x, y) \in M_n(\hat{\mathcal{O}}_{(p_i, q_j)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2))$$

なる $\hat{H}(x, y)$ が (1) の形式基本解を

$$\hat{H}(x, y) x^{L_1} y^{L_2} e^{Q_1(\frac{1}{x})} e^{Q_2(\frac{1}{y})}$$

とかける。

同じことだが漸近展開の言葉でいうと、

定理7' $\Gamma_\nu = (p_i, q_j)$, $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$ は上の通りと

する。このとき (1) は 基本解行列

$$H(x, y) x^{L_1} y^{L_2} e^{Q_1(\frac{1}{x})} e^{Q_2(\frac{1}{y})}$$

但し、

$$H(x, y) = H_{\Gamma_{k+l-1}}(x, y) \cdots H_{\Gamma_1}(x, y)$$

$$H_{\Gamma_\nu}(x, y) \in M_n(\mathcal{A}_{(p_i, q_j)}(\alpha_1 - \frac{\pi}{2p_i}, \beta_1 + \frac{\pi}{2p_i}; \alpha_2 - \frac{\pi}{2q_j}, \beta_2 + \frac{\pi}{2q_j}))$$

をもつ。
 $p_i = 1 + \frac{1}{p_i} \quad , \quad q_j = 1 + \frac{1}{q_j}$

参考文献

- [1] H. Charrière : Triangulation formelle de certains systèmes de Pfaff complètement intégrables et application à l'étude C^∞ des systèmes non linéaires , thèse de 3^{ième} cycle de Université Strasbourg , Publ. IRMA (1980)
- [2] R. Gérard, Y. Sibuya : Étude de certains systèmes de Pfaff avec singularités , Lecture Notes in Math. 712 (1979)
- [3] H. Majima : Analogues of Cartan's decomposition theorem in asymptotic analysis , Funk. Ekvac. 26 (1983)
- [4] F. Nevanlinna : Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen , Ann. Acad. Sci. Fennicae ser. A. 12 (1918)
- [5] F. Nevanlinna : Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen , Ann. Acad. Sci. Fennicae ser. A. 16 (1922)
- [6] J. P. Ramis : Les séries k-sommables et leurs applications , Lecture Notes in Physics 126 (1980)
- [7] Y. Sibuya : Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point , Funk. Ekvac. 4 (1962)
- [8] G. N. Watson : A theory of asymptotic series , Trans. Royal Soc. London , ser. A 211 (1911)