

正準交換関係の摂動論 その固有値分布理論への応用について

京都大学 理学部 峯 拓矢 (Takuya Mine)

Faculty of Science, Kyoto University

1 作用素の交換関係とスペクトル

次の命題を考える.

命題 1.1 A を $m \times n$ 行列, B を $n \times m$ 行列 とする. このとき, $m \times m$ 行列 AB と $n \times n$ 行列 BA の固有値は 0 を除いて一致する.

証明 行列 AB が固有値 $\lambda \neq 0$ をもったとする. λ に対応する固有ベクトル $u \neq 0$ に対し $Bu \neq 0$ であり, さらに

$$BA(Bu) = B(ABu) = \lambda Bu$$

であるから λ は行列 BA の固有値である. 逆も同様. $\square$

この命題には様々な一般化が考えられる. その一例として Deift [D] による次の結果がある.

命題 1.2 (Deift) $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ を Hilbert 空間とする. $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ を稠密な定義域を持つ閉作用素, $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ をその共役作用素とする. このとき, 2つの作用素 $X = A^*A|_{(\text{Ker } A^*A)^\perp}$ と $Y = AA^*|_{(\text{Ker } AA^*)^\perp}$ はユニタリ同値である.

証明 作用素 A の極分解 $A = U|A|$ を行う. $\tilde{U} = U|_{(\text{Ker } A)^\perp}$ とおくと, $\tilde{U}$ は $(\text{Ker } A)^\perp = (\text{Ker } A^*A)^\perp$ から $(\text{Ker } A^*)^\perp = (\text{Ker } AA^*)^\perp$ へのユニタリ作用素であり,

$$A^*A|_{(\text{Ker } A^*A)^\perp} = |A|^2|_{(\text{Ker } A)^\perp}, AA^*|_{(\text{Ker } AA^*)^\perp} = \tilde{U}|A|^2|_{(\text{Ker } A)^\perp}\tilde{U}^*$$

であるから主張は成立. $\square$

命題 1.2 の仮定の下で作用素 A^*A と AA^* は自己共役であることが知られている (Reed-Simon II [R-S2, Theorem X.25]). 特に, 2つの自己共役作用素 AA^* と A^*A に何らかの関

係式が成り立つ場合, 命題 1.2 によりそれらのスペクトルについての情報を導くことができる. 以下にその例を挙げる.

(1) 有界区間上のラプラシアン

有界区間上の L^2 空間 $L^2([a, b])$ における 1 階微分作用素 A を次で定義する:

$$Au = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} u, \quad D(A) = \{u \in H^1([a, b]) ; u(a) = u(b) = 0\}.$$

A の共役作用素 A^* は次で与えられる:

$$A^*u = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} u, \quad D(A^*) = H^1([a, b]).$$

このとき, AA^*, A^*A は微分作用素としてはラプラシアン $-\Delta = -\frac{d^2}{dx^2}$ であるが, それらの定義域は

$$\begin{aligned} D(A^*A) &= \{u \in D(A) ; Au \in D(A^*)\} = \{u \in H^2([a, b]) ; u(a) = u(b) = 0\}, \\ D(AA^*) &= \{u \in D(A^*) ; A^*u \in D(A)\} = \{u \in H^2([a, b]) ; u'(a) = u'(b) = 0\} \end{aligned}$$

となる. すなわち, A^*A は Dirichlet ラプラシアン $-\Delta^D$, AA^* は Neumann ラプラシアン $-\Delta^N$ である. このことより, 有名な事実「 $-\Delta^D$ と $-\Delta^N$ のスペクトルは $\{0\}$ 以外は等しい」が導かれる. さらに A の境界条件を取り換えることにより, $\{0\}$ 以外は同じスペクトルを持つラプラシアンの 2 つの境界条件の組を無数に作りだすことも出来る.

(2) 正準交換関係

作用素等式 (すなわち, 定義域を込めて成り立つ等式)

$$AA^* = A^*A + cI \quad (c > 0, I \text{ は恒等写像}) \quad (1)$$

を正準交換関係と呼ぶ. 自己共役作用素 $H = \frac{1}{2}(AA^* + A^*A)$ のスペクトルを考える.

命題 1.3 $\mathcal{H}$ を $\{0\}$ でない Hilbert 空間とし, $\mathcal{H}$ 上の稠密な定義域を持つ閉作用素 A は

(1) を満たすとする. このとき次が成り立つ:

- (i) $\sigma(H) = \{(n - \frac{1}{2})c \mid n = 1, 2, \dots\}$.
- (ii) $\mathcal{H}_n = \text{Ker} \left(H - (n - \frac{1}{2})c \right)$ とおくと,

$$\begin{aligned} A|_{\mathcal{H}_n} : \mathcal{H}_n &\rightarrow \mathcal{H}_{n-1}, \text{ 同型 } (n \geq 2), \quad A|_{\mathcal{H}_1} = 0, \\ A^*|_{\mathcal{H}_n} : \mathcal{H}_n &\rightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \text{ 同型.} \end{aligned}$$

特に $\mathcal{H}_n$ の次元は全ての n について同一である.

証明 Birman-Solomjak [B-S] Chapter 12 の Lemma 3 を参照せよ ([B-S] では (1) を Bose commutation relations と呼んでいる). $\square$

以下は正準交換関係を満たす作用素の例である。但し、定義域としては maximal なもの (作用素を超関数の意味で作用させた結果が L^2 空間に属するような関数全体) を取る。

例 1. 一次元調和振動子

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2, \quad A = x + \frac{d}{dx}, \quad A^* = x - \frac{d}{dx}, \quad \text{on } L^2(\mathbf{R}).$$

このとき $c=2$ となり, $\sigma(H) = \{2n-1; n=1, 2, \dots\}$ となる。

例 2. ユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ における定数磁場中のシュレディンガー作用素

以下, $D_x = \frac{1}{i}\partial_x$, $D_y = \frac{1}{i}\partial_y$ と書く。ベクトルポテンシャル $\mathbf{a} = (a_x, a_y) \in C^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$ に対し,

$$H = \Pi_x^2 + \Pi_y^2, \quad \Pi_x = D_x + a_x, \quad \Pi_y = D_y + a_y, \quad \text{on } L^2(\mathbf{R}^2) \quad (2)$$

とおく。このとき関数

$$\text{rot } \mathbf{a}(z) := \partial_x a_y(z) - \partial_y a_x(z), \quad z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

は平面に垂直な磁場の強さを表す。もし $\text{rot } \mathbf{a}$ が $\mathbf{R}^2$ 上有界であれば,

$$A = i\Pi_x + \Pi_y, \quad A^* = -i\Pi_x + \Pi_y \quad (3)$$

とおくと, 作用素等式

$$H = \frac{1}{2}(AA^* + A^*A), \quad AA^* = A^*A + 2\text{rot } \mathbf{a}, \quad (4)$$

が成り立つ。特に 0 でない実定数 B に対し

$$\text{rot } \mathbf{a} = B \quad (5)$$

が満たされるとき, $B > 0$ ならば, $c = 2B$ として正準交換関係が成り立ち, $\sigma(H) = \{(2n-1)B; n=1, 2, \dots\}$ となる。また, $B < 0$ の場合は複素共役を考えれば $B > 0$ の場合に帰着でき, その結果

$$\sigma(H) = \{(2n-1)|B|; n=1, 2, \dots\}$$

が得られる。 $\sigma(H)$ はランダウ準位と呼ばれており, 各準位の多重度は無限大である。

(3) Shape invariance

ポアンカレ上半平面 $\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\}$ における定数磁場中のシュレディンガー作用素

$$H_B = y^2(D_x - a_x)^2 + y^2(D_y - a_y)^2, \quad \text{on } L^2(\mathbf{H}; y^{-2}dxdy) \quad (6)$$

を考える。ただし B は 0 でない実定数であり, ベクトルポテンシャル (a_x, a_y) に対応する 1-form $\mathbf{a} = a_x dx + a_y dy$ の外微分が $\mathbf{H}$ の体積要素 $y^{-2}dxdy$ の B 倍である, すなわち

$$\text{rot } \mathbf{a}(z) = \frac{B}{y^2}, \quad z = (x, y), \quad y > 0 \quad (7)$$

を仮定する（‘磁場が定数である’とはこのことを意味する）。作用素 H_B のスペクトルは B の値のみによって定まる。作用素 A を

$$A = y(D_x - a_1) + iy(D_y - a_2)$$

と定義する（定義域は maximal なものを取る）。このとき, **shape invariance** と呼ばれる次の関係式

$$A^*A = H_B - B, \quad AA^* = H_{B-1} + (B-1)$$

が成り立つ。したがって, 命題 1.2 より

$$H_B|_{(\text{Ker}(H_B-B))^\perp} \simeq H_{B-1}|_{(\text{Ker}(H_{B-1}+B-1))^\perp} + 2B - 1$$

が成り立つ（記号 $\simeq$ はユニタリ同値を表す）。さらに,

$$\begin{aligned} \sigma(H_B) &= [B^2 + 1/4, \infty), \quad |B| \leq \frac{1}{2}, \\ \text{mult}\{|B|; H_B\} &= \infty, \quad |B| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つことが確かめられる。ただし, 記号 mult は固有値の重複度を表す。これらの事実から $\sigma(H_B)$ は完全に決定される（詳細は Roelcke [R], Elstrodt [E] 参照）。

命題 1.4 次が成り立つ。

$$\sigma(H_B) = \begin{cases} [B^2 + 1/4, \infty) & |B| \leq 1/2, \\ \sigma_L(B) \cup [B^2 + 1/4, \infty) & |B| > 1/2. \end{cases}$$

ただし, $N(B)$ を $|B| - \frac{1}{2}$ より小さい最大の整数としたとき,

$$\sigma_L(B) = \bigcup_{l=0}^{N(B)} \{(2l+1)|B| - l(l+1)\}.$$

この他, グラフ上のラプラシアンとそのライングラフ上のラプラシアンの関係 (白井 [S], 小栗栖 [O], 中野-野村 [N-N]), non-linear oscillator のスペクトルの決定 (Spiliotopoulos [Sp]), SuperSymmetric Quantum Mechanics (SUSY QM) における Witten Index に関する様々な表示 (例えば Junker [J]) など, 様々な場面において命題 1.2 は用いられている。

2 遠方で減衰する磁場の摂動

(1) 岩塚の定理

再びユークリッド平面における磁場付きシュレディンガー作用素を考える. 交換関係 (5) において, 遠方で減衰するような摂動項が加わった場合を考える:

$$\operatorname{rot} \alpha(z) = B + o(1), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (8)$$

このとき, (2), (3) で定義される作用素 H , A は次の作用素等式を満たす:

$$A^*A = H - B + o(1), \quad AA^* = H + B + o(1), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

上の式において, 遠方で減衰する項は作用素の本質的スペクトルには影響しない (Weyl の本質的スペクトル定理). $S = \sigma_{\text{ess}}(H)$ とおくと, 命題 1.2 と (9) より,

$$S \setminus \{B\} = S + 2B$$

が導かれる. さらに $S \neq \emptyset$ であることも示すことができ, これから岩塚 [I] による次の定理が得られる.

定理 2.1 (岩塚) H を (2) で与えられるユークリッド平面上のシュレディンガー作用素とし, 磁場 $\operatorname{rot} \alpha$ は定数 $B \neq 0$ に対し条件 (8) を満たすとする. このとき

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \{(2n-1)|B|; n=1, 2, \dots\}$$

が成り立つ.

(2) 稲浜-白井の定理

同様の議論をポアンカレ上半平面におけるシュレディンガー作用素 (6) について適用して得られるのが稲浜-白井 ([I-S]) による次の定理である:

定理 2.2 (稲浜-白井) H_B を (6) で与えられるポアンカレ上半平面 H 上のシュレディンガー作用素とし, 磁場 $\operatorname{rot} \alpha$ は

$$\operatorname{rot} \alpha(z) = \frac{B + B_0(z)}{y^2}$$

を満たすとする. ただし, B は実定数で, $B_0(z)$ は H における無限遠で 0 に収束するものとする. このとき, 次が成り立つ:

$$\sigma_{\text{ess}}(H_B) = \begin{cases} [B^2 + 1/4, \infty) & |B| \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_L(B) \cup [B^2 + 1/4, \infty) & |B| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

なお, ポアンカレ上半平面における Weyl の本質的スペクトル定理は彼らの論文の中で示されている.

3 特異磁場摂動

(1) 作用素の定義

ユークリッド平面上のシュレディンガー作用素 (2) において, 磁場 $\text{rot } \mathbf{a}$ が δ 型の特異性を持つ場合を考える. まず $\Gamma = \{z_j\}_{j=1}^N$ ($N = \infty$ でもよい) を $\mathbf{R}^2$ 中の離散集合とし,

$$R := \inf_{j \neq k} |z_j - z_k| > 0 \quad (10)$$

を仮定する. さらに $\mathbf{a} \in C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma; \mathbf{R}^2) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$ とし,

$$\text{rot } \mathbf{a}(z) = B + \sum_{j=1}^N 2\pi\alpha_j \delta(z - z_j) \quad (11)$$

が成り立つとする. (11) の右辺は Schwartz 超関数の意味での微分と解釈する. B, α_j は実定数であるが, 適当な (アンチ) ユニタリ作用素によるゲージ変換を行うことにより, B を $-B$ に, あるいは α_j を $\alpha_j + m_j$ (m_j は整数) にそれぞれ取り換えることができる. $\alpha_j = 0$ であればその点における特異性は消えるので,

$$B > 0, \quad 0 < \alpha_j < 1, \quad j = 1, \dots, N$$

の場合を考えることにする.

具体的には, $\mathbf{a}(z)$ は以下のように構成することができる (新井 [A], Melgaard-Ouhabaz-Rozenblum [M-O-R] 参照). まず $\mathbf{R}^2$ を複素平面 C と同一視する. Mittag-Leffler の定理より, 全平面で定義された有理型関数 $\psi(z)$ で, Γ 上にのみ極を持ち, その $z = z_j$ における主要部が $\frac{\alpha_j}{z - z_j}$ であるものが存在する. このとき, $\phi(z) = \frac{Bz}{2} + \psi(z)$ とおき, $\mathbf{a}(z) = (\text{Im } \phi(z), \text{Re } \phi(z))$ とおけば (11) を満たすことが, Cauchy-Riemann の関係式と超関数等式 $\Delta \log |z| = 2\pi\delta(z)$ を用いて確かめられる.

(定義域を無視した) 微分作用素 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}u = \Pi_x^2 u + \Pi_y^2 u$$

と定め, minimal operator L を

$$Lu = \mathcal{L}u, \quad D(L) = C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma)$$

と定める. ベクトルポテンシャル $\mathbf{a}(z)$ は Γ において L^1_{loc} 程度の特異性を持つため, L は正値対称作用素であるが, 本質的自己共役ではない. したがって, L の自己共役拡張を定義するには Γ の点における境界条件を定める必要がある. 以下, L の任意の自己共役拡張を H と表し, 特に L の Friedrichs 拡張を H^{AB} と表す. H^{AB} は標準 Aharonov-Bohm ハミルトニアンと呼ばれ, Γ の点における電子の存在確率が 0 である境界条件に相当する, 物理的には自然な作用素である.

以下で作用素 H あるいは H^{AB} のスペクトル構造を調べていく. なお, 以下では区間 I と自己共役作用素 X に対し, $\mathcal{N}(I; X) = \dim \text{Ran } P_I(X)$ ($P_I(X)$ は X の I に対応するスペクトル射影作用素) と書く.

(2) N が有限の場合

定理 3.1 $1 \leq N < \infty$ とする. このとき, 次が成り立つ:

(i) L の任意の自己共役拡張 H に対し,

$$\mathcal{N}(\{(2n-1)B\}; H) = \infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(ii) 作用素 H^{AB} について,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}((-\infty, B); H^{AB}) &= 0, \\ \mathcal{N}(((2n-1)B, (2n+1)B); H^{AB}) &\leq nN, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(iii) L の任意の自己共役拡張 H について,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}((-\infty, B); H) &\leq 2N, \\ \mathcal{N}(((2n-1)B, (2n+1)B); H) &\leq (n+1)N, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

注 1. $N = 1$ の場合, 区間 $((2n-1)B, (2n+1)B)$ に属する H^{AB} の固有値は, 重複度 n の固有値 $(2n + 2\alpha_1 - 1)B$ のみである (南部 [N], Exner-Št'ovíček-Vytrás [E-S-V] 参照).

注 2. α_j の値が全て等しい場合, 各 n に対して, R が十分大きければ上記 (ii) の第二式において等号が成立し, また (iii) の二つの不等号において等号が成立するような自己共役拡張 H が存在することが証明できる. よって (ii), (iii) は最適な不等式である.

(3) Γ が格子の場合

Γ が R^2 の格子, つまり

$$\Gamma = \begin{cases} \omega \mathbf{Z}, & \omega \neq 0 & (\text{階数 1 のとき}) \\ 2\omega_1 \mathbf{Z} \oplus 2\omega_3 \mathbf{Z}, & \text{Im } \omega_3/\omega_1 > 0 & (\text{階数 2 のとき}) \end{cases}$$

の場合を考え, さらに $\gamma \in \Gamma$ における特異磁束の値が全て等しい値 $2\pi\alpha$ を取ると仮定する. すなわち

$$\text{rot } \mathbf{a}(z) = B + 2\pi\alpha \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta(z - \gamma).$$

階数 2 の格子 Γ に対し, Ω を格子 Γ の単位領域

$$\Omega = R^2/\Gamma \simeq \left\{ 2s\omega_1 + 2t\omega_3; \quad -\frac{1}{2} < s \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2} \right\}$$

とし, $|\Omega|$ で Ω の面積を表す. このとき, 次が成り立つ.

定理 3.2 Γ は階数 1 の格子とし, H は L の自己共役拡張で, 一様な境界条件を持つとする. このとき, 任意の自然数 n に対し, $(2n-1)B$ は H の無限多重度の固有値である.

定理 3.3 Γ は階数 2 の格子とし, 有理磁束条件と呼ばれる次の条件

$$\frac{|\Omega|B}{2\pi} + \alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad (p, q \text{ は互いに素な整数}, q \geq 1) \quad (12)$$

が成り立つとする. このとき, 次が成り立つ.

(i) 自然数 n は $n < \frac{|\Omega|B}{2\pi}$ を満たすとする. このとき, $(2n-1)B$ は H^{AB} の無限多重度の固有値である.

(ii) H は L の自己共役拡張で, 一樣な境界条件を持つとする. 自然数 n は $n < \frac{|\Omega|B}{2\pi} - 1$ を満たすとする. このとき, $(2n-1)B$ は H の無限多重度の固有値である.

上記の 2 つの定理における ‘一樣な境界条件を持つ’ という用語の定義は次章で説明する (定義 4.2 参照).

上記の定理の証明には交換関係が大きな役割を果たす. 以下ではその作用素論的な扱いを詳しく説明していく.

4 特異磁場を持つシュレディンガー作用素の自己共役拡張

微分作用素 $A, A^\dagger$ ($\dagger$ は形式的共役) を

$$\begin{aligned} A &= i\Pi_x + \Pi_y = 2\partial_z + \phi(z), \\ A^\dagger &= -i\Pi_x + \Pi_y = -2\partial_{\bar{z}} + \overline{\phi(z)}, \end{aligned}$$

と定める. ただし, $\partial_z = \frac{\partial_x - i\partial_y}{2}$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial_x + i\partial_y}{2}$. 線形作用素 $A, A^\dagger$ を

$$Au = \mathcal{A}u, \quad A^\dagger u = \mathcal{A}^\dagger u, \quad D(A) = D(A^\dagger) = D(L)$$

で定義する. このとき, 作用素の関係式

$$L = A^\dagger A + B = AA^\dagger - B, \quad A^* \supset A^\dagger, \quad A^{*\dagger} \supset A$$

が成り立つ. ただし, 記号 $X \supset Y$ は $D(X) \supset D(Y)$ かつ $X|_{D(Y)} = Y$ を意味する. したがって, 4 つの作用素

$$A^* \bar{A} + B, \quad \bar{A} A^* - B, \quad \bar{A}^\dagger A^{*\dagger} + B, \quad A^{*\dagger} \bar{A}^\dagger - B \quad (13)$$

は全て L の自己共役拡張であるが, 有界区間上のラプラシアンの場合と同様に, それらの境界条件は等しいとは限らない. 以下では L の自己共役拡張の構造を調べ, それを用いて上の 4 つの作用素の定義域を詳しく調べることにする.

ここで von Neumann による自己共役拡張の理論を復習しておく ([R-S2] 参照). L の共役作用素 L^* に対し, $\mathcal{N}_\pm = \text{Ker}(L^* \mp i)$ を不足空間と呼び, その次元 $n_\pm = \dim \mathcal{N}_\pm$ を不足指数と呼ぶ. 微分作用素 $\mathcal{L}$ を超関数空間 $D'(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ 上の作用素と解釈すると,

$$L^* u = \mathcal{L} u, \quad D(L^*) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2); \mathcal{L} u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

であることが, $D(L) = C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma)$ より直ちに分かる (この事実により, L^* は maximal operator と呼ばれる). したがって, $\mathcal{N}_\pm$ は微分作用素 $\mathcal{L}$ の, 固有値 $\pm i$ に対応する, $L^2(\mathbf{R}^2)$ に属する固有関数全体である.

補題 4.1 次が成り立つ:

- (i) $D(L^*) = D(\bar{L}) \oplus \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_-$.
- (ii) $n_+ = n_-$.
- (iii) U を $\mathcal{N}_-$ から $\mathcal{N}_+$ へのユニタリ作用素とすると,

$$H^U u = \mathcal{L}u, \quad D(H^U) = \{u_0 + u_- + Uu_-; u_0 \in D(\bar{L}), u_- \in \mathcal{N}_-\}$$

で定められる作用素 H^U は L の自己共役拡張である. さらに, L の任意の自己共役拡張 H に対して $\mathcal{N}_-$ から $\mathcal{N}_+$ へのユニタリ作用素 U がただひとつ存在して $H = H^U$ を満たす.

証明 (i) [R-S2] の 138 ページの Lemma 参照.

(ii) [R-S2] の 136 ページの Theorem X.1, およびその Corollary 参照.

(iii) [R-S2] の 140 ページの Theorem X.2, およびその Corollary 参照. $\square$

(1) $N = 1$ の場合

$N = 1$ の場合の作用素 $L, H, A, A^\dagger$ を特に $L_1, H_1, A_1, A_1^\dagger$ と書くことにする. 簡単のため $z_1 = 0$ ととり, $\alpha_1 = \alpha$ と書く. このとき

$$\phi(z) = \frac{B\bar{z}}{2} + \frac{\alpha}{z}$$

ととれば,

$$L_1 = \left(D_x - \frac{B}{2}y - \frac{\alpha y}{|z|^2} \right)^2 + \left(D_y + \frac{B}{2}x + \frac{\alpha x}{|z|^2} \right)^2$$

となる. この作用素を極座標 $z = re^{i\theta}$ を用いて表すと

$$L_1 = -\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{i}\partial_\theta + \alpha + \frac{B}{2}r^2\right)^2$$

となる. この表示を用いて不足空間および不足指数を決定し, 補題 4.1 により作用素 L_1 の自己共役拡張を決定することができる. その結果は, $B = 0$ の場合は Adami-Teta [A-T], Dąbrowski-Št'ovíček [D-S] により, $B \neq 0$ のときは Exner-Št'ovíček-Vytrás [E-S-V] によって得られている. 特に [E-S-V] の結果について, その要約を以下に記す.

定理 4.2 (Exner, Št'ovíček, Vytrás) 以下が成り立つ:

- (i) 作用素 L_1 の不足指数は $(2, 2)$ である.

(ii) $u \in D(L_1^*)$ とすると, 原点の近傍において極座標 $z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0, \theta \in \mathbf{R}$) を用いて

$$u(r, \theta) = c_1 r^{\alpha-1} e^{-i\theta} + c_2 r^{1-\alpha} e^{-i\theta} + c_3 r^\alpha + c_4 r^{-\alpha} + \xi, \quad (14)$$

$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{C}, \xi \in D(\overline{L_1})$ と一意的に表される.

(iii) $D(L_1^*)$ の元 u に対し, (14) における係数 (c_1, c_2, c_3, c_4) を与える作用素 $\Xi: D(L_1^*) \rightarrow \mathbf{C}^4$ を考える. 4×4 行列 M に対し, 作用素 H_1^M を

$$H_1^M u = \mathcal{L}_1 u, \quad D(H_1^M) = \{u \in D(L_1^*) ; \Xi u \in \text{Ran } M\}$$

と定義する. このとき, H_1^M が自己共役であることは, 条件

$$\text{rank } M = 2, \quad M^* J_\alpha M = O \quad (15)$$

と同値である. ただし, J_α は次で与えられる 4×4 行列である:

$$J_\alpha = 4\pi \begin{pmatrix} 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

さらに, L_1 の任意の自己共役拡張は H_1^M の形で表される.

定理 4.2 (iii) における Ξu を u の 0 における境界値と呼ぶことにする. 4つの関数 $\phi_{-1}, \psi_1, \phi_0, \psi_0$ を, 原点の近傍で

$$\begin{aligned} \phi_{-1}(z) &= |z|^\alpha z^{-1} = r^{\alpha-1} e^{-i\theta}, & \psi_1(z) &= |z|^{-\alpha} \bar{z} = r^{1-\alpha} e^{-i\theta}, \\ \phi_0(z) &= |z|^\alpha = r^\alpha, & \psi_0(z) &= |z|^{-\alpha} = r^{-\alpha} \end{aligned} \quad (16)$$

に等しい, 有界な台を持つ, 原点を除いて滑らかな関数とする. (14) より

$$D(L_N^*) = D(\overline{L_N}) \oplus \text{L.h.}\{\phi_{-1}, \psi_1, \phi_0, \psi_0\}$$

が成り立つ. 但し, 記号 L.h. は線形包 (linear hull) を表す.

[E-S-V] では 補題 4.1 の (iii) を用いて定理 4.2 の (iii) を示しているが, 後の都合上補題 4.1 を用いない別証明を与えておく.

定理 4.2 (iii) の別証明 $D(L_1^*)$ の元 u, v に対し,

$$[u, v]_1 = (\mathcal{L}_1 u, v) - (u, \mathcal{L}_1 v)$$

と定義する. $u \in D(\overline{L_1})$ または $v \in D(\overline{L_1})$ ならば $[u, v]_1 = 0$ である. $L \subset H \subset L^*$ なる作用素 H に対し,

$$D(H^*) = \{u \in D(L^*) ; [u, v]_1 = 0, \forall v \in D(H)\} \quad (17)$$

であることが共役作用素の定義より従う。

さらに、境界値 Ξu を縦ベクトルとみなしたとき、

$$[u, v]_1 = {}^t \bar{c} J_\alpha d, \quad c = \Xi u, \quad d = \Xi v \quad (18)$$

が任意の $u, v \in D(L_1^*)$ に対して成り立つ事が、以下のような計算で確かめられる。いま

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= 2\partial_z + \phi(z) = 2\partial_z + \frac{B}{2}\bar{z} + \frac{\alpha}{z}, \\ \mathcal{A}_1^\dagger &= -2\partial_{\bar{z}} + \overline{\phi(z)} = -2\partial_{\bar{z}} + \frac{B}{2}z + \frac{\alpha}{\bar{z}} \end{aligned}$$

であるから、関数の置換

$$Uu(z) = e^{i\alpha\theta}u(z) = (z/\bar{z})^{\alpha/2}u(z) \quad (19)$$

を行うと(多価関数 $e^{i\alpha\theta}$ は $0 \leq \theta < 2\pi$ なる分枝を取る), 原点の近傍で

$$\begin{aligned} U\phi_{-1} &= z^{\alpha-1}, \quad U\psi_1 = \bar{z}^{1-\alpha}, \quad U\phi_0 = z^\alpha, \quad U\psi_0 = \bar{z}^{-\alpha}, \\ U\mathcal{A}_1U^{-1} &= 2\partial_z + \frac{B}{2}\bar{z}, \quad U\mathcal{A}_1^\dagger U^{-1} = -2\partial_{\bar{z}} + \frac{B}{2}z \end{aligned}$$

となる。例えば $u = \phi_{-1}, v = \psi_1$ のとき、

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}_1 u, v) - (u, \mathcal{L}_1 v) \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|z| \geq \epsilon} (\overline{U\mathcal{L}_1 u} Uv - \overline{Uu} U\mathcal{L}_1 v) d\bar{z} \wedge dz \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|z| \geq \epsilon} \left(\left((2\partial_z + \frac{B}{2}z)(-2\partial_z + \frac{B}{2}\bar{z}) \overline{Uu} \right) Uv \right. \\ &\quad \left. - \overline{Uu} \left((2\partial_z + \frac{B}{2}\bar{z})(-2\partial_z + \frac{B}{2}z) Uv \right) \right) d\bar{z} \wedge dz \\ &= -\frac{1}{i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|z|=\epsilon} \left(\left((-2\partial_z + \frac{B}{2}\bar{z}) \overline{Uu} \right) Uv dz + \overline{Uu} \left((-2\partial_z + \frac{B}{2}z) Uv \right) d\bar{z} \right) \\ &= -\frac{1}{i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|z|=\epsilon} \left\{ \left(\frac{B}{2}\epsilon^2 \right) z^{-1} dz + (-2(1-\alpha) + \frac{B}{2}\epsilon^2) \bar{z}^{-1} d\bar{z} \right\} \\ &= 4\pi(\alpha-1) \end{aligned}$$

であるから (18) は成り立つ。ただし、第二の等号では $\mathcal{L}_1 = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1^\dagger - B$, 第三の等号では Stokes の定理を用いており、線積分 $\int_{|z|=\epsilon}$ の向きは反時計周りに取っている。その他の基底に対しても同様に計算すればよい。

したがって、(17) と (18) より

$$\begin{aligned} D\left((H^M)^*\right) &= \{u \in D(L^*); {}^t \Xi u J_\alpha \Xi v = 0, \forall v \in D(H^M)\} \\ &= \{u \in D(L^*); {}^t \Xi u J_\alpha M c = 0, \forall c \in \mathbb{C}^4\} \\ &= \{u \in D(L^*); \Xi u \in \text{Ker}(M^* J_\alpha)\} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$(H^M)^* = H^M \Leftrightarrow \text{Ran } M = \text{Ker } M^* J_\alpha \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow \text{rank } M = 2, M^* J_\alpha M = O. \quad (21)$$

よって第一の主張は成り立つ. 逆に, 任意の L の自己共役拡張 H に対し, M として $\exists D(H)$ への直交射影作用素を取れば明らかに $H = H^M$ となる. $\square$

命題 4.3 L_1 の自己共役拡張 H_1^+ , H_1^- が存在して作用素等式

$$H_1^{AB} = A_1^* \overline{A_1} + B = A_1^{\dagger*} \overline{A_1^\dagger} - B, \quad (22)$$

$$H_1^+ = \overline{A_1} A_1^* - B, \quad H_1^- = \overline{A_1^\dagger} A_1^{\dagger*} + B \quad (23)$$

が成り立つ. さらに,

$$D(H_1^{AB}) = D(\overline{L_1}) \oplus \text{L.h.}\{\phi_0, \psi_1\}, \quad (24)$$

$$D(H_1^+) = D(\overline{L_1}) \oplus \text{L.h.}\{\phi_{-1}, \phi_0\}, \quad (25)$$

$$D(H_1^-) = D(\overline{L_1}) \oplus \text{L.h.}\{\psi_1, \psi_0\}. \quad (26)$$

証明 作用素 H^+ , H^- が存在して (23) を満たすことは, $\overline{A_1} A_1^* - B$, $\overline{A_1^\dagger} A_1^{\dagger*} + B$ が自己共役作用素であることと L_1 の拡張であることから明らかである.

(22) を示す. [R-S2] の Theorem X.25 の証明によると, 作用素 $A_1^* \overline{A_1}$ に対応する二次形式の定義域 $Q(A_1^* \overline{A_1})$ は $D(\overline{A_1})$ と等しい. 一方, $u \in D(L_1)$ に対し,

$$(L_1 u, u) = ((A_1^\dagger A_1 + B)u, u) = \|A_1 u\|^2 + B\|u\|^2,$$

であるから, L_1 の Friedrichs 拡張 H_1^{AB} に対応する二次形式のノルムは A_1 のグラフノルムと同値である. よって 2 つの自己共役作用素 $A_1^* \overline{A_1} + B$ と H_1^{AB} の二次形式は定義域も込めて等しいので, 作用素等式 $A_1^* \overline{A_1} + B = H_1^{AB}$ が成り立つ. さらに $L_1 = A_1 A_1^\dagger - B$ を用いれば, $A_1^{\dagger*} \overline{A_1^\dagger} - B = H_1^{AB}$ も同様に示される.

上の証明より,

$$Q(H_1^{AB}) = D(\overline{A_1}) = D(\overline{A_1^\dagger}) \subset \{u \in L^2; A_1 u \in L^2, A_1^\dagger u \in L^2\}$$

が成り立つ. したがって,

$$D(H_1^{AB}) \subset Q(H_1^{AB}) \cap D(L_1^*) \subset \{u \in D(L_1^*); A_1 u \in L^2, A_1^\dagger u \in L^2\} \quad (27)$$

が成り立つ. さらに

$$\begin{aligned} D(H_1^+) = D(\overline{A_1} A_1^*) &= \{u \in D(A_1^*); A_1^\dagger u \in D(\overline{A_1})\} \\ &\subset \{u \in D(L_1^*); A_1^\dagger u \in L^2, A_1^{\dagger 2} u \in L^2\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} D(H_1^-) &= D(\overline{A_1^\dagger A_1^{\dagger*}}) = \{u \in D(A_1^{\dagger*}); A_1 u \in D(\overline{A_1^\dagger})\} \\ &\subset \{u \in D(L_1^*); A_1 u \in L^2, A_1^2 u \in L^2\}. \end{aligned} \quad (29)$$

が成り立つ. 再び関数の置換 (19) を用いれば, (27), (28), (29) の右辺がそれぞれ (24), (25), (26) の右辺と一致することが確かめられる. したがって (24), (25), (26) の左辺の集合はそれぞれ右辺の集合に含まれ, しかも作用素 $\mathcal{L}_1$ を右辺のそれぞれの集合に制限した作用素は自己共役であることが定理 4.2 より分かるので, それぞれの両辺は一致する. $\square$

(2) $N \geq 2$ の場合

$N \geq 2$ のときは具体的な計算から不足空間, あるいは不足指数を決定することは困難であるが, 局所化の理論を用いることによりこの困難を回避できる (同様のアイデアは Bulla-Gesztesy [B-G] により用いられている).

まず, 磁場付き平行移動作用素を定義する.

定義 4.1 U, V を $\mathbf{R}^2$ の開集合とし, あるベクトル $w \in \mathbf{R}^2$ に対し $V = U + w$ が成り立つとする. $a \in L_{\text{loc}}^1(U; \mathbf{R}^2)$, $b \in L_{\text{loc}}^1(V; \mathbf{R}^2)$ はそれぞれ U, V の離散集合を除いた集合上で C^∞ であり, さらに条件

$$\text{rot } a(z) = \text{rot } b(z + w), \quad z \in U$$

が超関数の意味で成り立つとする. このとき, U 上定義された絶対値 1 の関数 $\Phi(z)$ が存在し,

$$t_{-w}u(z) := \Phi(z)u(z + w)$$

で定義される作用素 t_{-w} が

$$\left(\frac{1}{i}\nabla + a\right)t_{-w} = t_{-w}\left(\frac{1}{i}\nabla + b\right), \quad \mathcal{L}(a)t_{-w} = t_{-w}\mathcal{L}(b) \quad (30)$$

を満たす. ただし $\mathcal{L}(a) = (\frac{1}{i}\nabla + a)^2$, $\mathcal{L}(b) = (\frac{1}{i}\nabla + b)^2$ である. このとき作用素 t_{-w} を, $\mathcal{L}(b)$ と $\mathcal{L}(a)$ を繋絡 (intertwine) する V から U への磁場付き平行移動作用素 (magnetic translation operator) と呼ぶ.

関数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ を

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq R/3, \\ 0, & |z| \geq R/2 \end{cases}$$

を満たすようにとる. $j = 1, \dots, N$ に対し $\chi_j(z) = \chi(z - z_j)$ とおく. $u \in D(L^*)$ に対し, 作用素 T_j を

$$T_j u = t_{-z_j} \chi_j u$$

と定義する. ただし, t_{-z_j} は $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}_1^{\alpha_j}$ (作用素 $\mathcal{L}_1$ で $\alpha = \alpha_j$ とおいたもの) を繋絡する $\{|z - z_j| < \frac{R}{2}\}$ から $\{|z| < \frac{R}{2}\}$ への磁場付き平行移動作用素である. 作用素 T を

$$T: D(L^*)/D(\overline{L}) \ni [u] \mapsto \bigoplus_{j=1}^N [T_j u] \in \bigoplus_{j=1}^N D(L_1^{\alpha_j})/D(\overline{L_1^{\alpha_j}})$$

で定義する. ただし, Hilbert 空間 X とその閉部分空間 Y に対し X/Y は商 Hilbert 空間を表し, X/Y のノルム (商ノルム) は

$$\|[x]\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x + y\|_X = \|Px\|_X, \quad x \in X$$

で与えられる. $[x]$ は x の属する同値類を表し, P は Y の直交補空間への直交射影作用素を表す.

命題 4.4 T は $D(L^*)/D(\overline{L})$ から $\bigoplus_{j=1}^N D(L_1^{\alpha_j})/D(\overline{L_1^{\alpha_j}})$ への写像として *well-defined* であり, 全単射, 連続でその逆写像も連続である.

証明 t_{-z_j} の定義より, $\{|z| < \frac{R}{2}\}$ において

$$t_{-z_j} \mathcal{L} u = \mathcal{L}_1^{\alpha_j} t_{-z_j} u \quad (31)$$

が成り立つ. この等式と Leibniz rule より $u \in D(L^*)$ ならば $\mathcal{L}_1^{\alpha_j} T_j u \in L^2(\mathbf{R}^2)$, したがって $T_j u \in D(L_1^{\alpha_j})$ が成り立つことが分かる. また, $u \in D(L) = C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma)$ のとき, 明らかに $T_j u \in D(L_1^{\alpha_j}) = C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ である. また, (31), Leibniz の公式および部分積分により, ある定数 C が存在して, 任意の $j = 1, \dots, N$ と $u \in D(L^*)$ に対し

$$\|\mathcal{L}_1^{\alpha_j} T_j u\|^2 \leq C \int_{|z-z_j| < \frac{R}{2}} (|\mathcal{L} u|^2 + |u|^2) dx dy \quad (32)$$

が成り立つことが示せる (交換子 $[\mathcal{L}_1^{\alpha_j}, \chi]$ に対し, [C-N] の (2.31) 式と同様の評価を行えばよい). よって T_j は $D(L^*)$ から $D(L_1^{\alpha_j})$ への連続写像となるので, $u \in D(\overline{L})$ のとき $T_j u \in D(\overline{L_1^{\alpha_j}})$ となる. (32) と商ノルムの定義より

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \| [T_j u] \|_{D(L_1^{\alpha_j})/D(\overline{L_1^{\alpha_j}})}^2 \\ & \leq \sum_{j=1}^N (\| \mathcal{L}_1^{\alpha_j} T_j u \|^2 + \| T_j u \|^2) \leq (C+1) (\| \mathcal{L} u \|^2 + \| u \|^2) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, T は well-defined かつ連続である.

T の逆写像 T^{-1} は

$$T^{-1} \left(\bigoplus_{j=1}^N [u_j] \right) = \sum_{j=1}^N t_{z_j} \chi u_j, \quad u_j \in D(L_1^{\alpha_j}) \quad (33)$$

により与えられる. ただし, 代表元 u_j は $\|u_j\|_{D(L_1^{\alpha_j})/D(\overline{L_1^{\alpha_j}})} = \|u_j\|_{D(L_1^{\alpha_j})}$ を満たすもの (すなわち, Hilbert 空間 $D(L_1^{\alpha_j})$ における $D(\overline{L_1^{\alpha_j}})$ の直交補空間の元) を取る. (33) が T の逆写像であることは「 $u \in D(L^*)$ かつ $\text{dist}(\text{supp } u, \Gamma) > 0$ ならば $u \in D(\overline{L})$ 」という事実を用いれば分かる (この事実は, 滑かなベクトルポテンシャルを持つ $\mathbf{R}^2$ 上のシュレディンガー作用素は本質的自己共役であること (池部-加藤 [I-K] 参照) を用いて示される). さらに (32) で与えられた定数 C に対して

$$\|\mathcal{L}(t_{z_j} \chi u_j)\|^2 \leq C \|u_j\|_{D(L_1^{\alpha_j})}^2$$

が成り立つ事を用いれば, T^{-1} の連続性も証明できる. $\square$

系 4.5 $1 \leq N \leq \infty$ のとき, L の不足指数は $(2N, 2N)$ である.

証明 補題 4.1 (ii) より, 不足指数 $n_{\pm} = \dim \mathcal{N}_{\pm}$ について $n_+ = n_-$ が成り立つ. 定理 4.2 (i) より, $\dim D(L_1^{\alpha_j})/D(\overline{L_1^{\alpha_j}}) = 4$ である. よって, 命題 4.4 より $n_+ + n_- = \dim D(L^*)/D(\overline{L}) = 4N$ となるので, 主張が従う. $\square$

次に L の自己共役拡張の構造を調べる. $N = \infty$ の場合の扱いを容易にするために, 以下を仮定する.

仮定 4.6 ある正の数 α_-, α_+ が存在し,

$$0 < \alpha_- \leq \alpha_j \leq \alpha_+ < 1, \quad j = 1, \dots, N,$$

が成り立つ.

$j = 1, \dots, N$ に対し

$$\begin{aligned} \phi_{-1}^{(j)} &:= t_{z_j}(\chi \phi_{-1}^{\alpha_j}), & \psi_1^{(j)} &:= t_{z_j}(\chi \psi_1^{\alpha_j}), \\ \phi_0^{(j)} &:= t_{z_j}(\chi \phi_0^{\alpha_j}), & \psi_0^{(j)} &:= t_{z_j}(\chi \psi_0^{\alpha_j}) \end{aligned}$$

と定義する. ただし, t_{z_j} は t_{-z_j} の逆作用素であり, 上付き添字 α_j は関数 $\phi_{-1}, \dots$ における α の値を表す.

命題 4.7 $1 \leq N \leq \infty$ とし, 仮定 4.6 が成り立つとする. このとき以下が成り立つ:

(i) $u \in D(L^*)$ は

$$u = \sum_{j=1}^N (c_{j,1} \phi_{-1}^{(j)} + c_{j,2} \psi_1^{(j)} + c_{j,3} \phi_0^{(j)} + c_{j,4} \psi_0^{(j)}) + \xi \quad (34)$$

と一意的に表される. ただし, $\xi \in D(\overline{L})$ であり, $N = \infty$ のときには $\sum_{j,k} |c_{j,k}|^2 < \infty$ かつ (34) の右辺は $D(L^*)$ のグラフノルムに関して収束する.

(ii) (34) の係数 $(c_{1,1}, \dots, c_{N,4}) \in C^{4N}$ ($N = \infty$ のときは $C^{4N} = l^2(N)$ とみなす) を与える作用素を Ξ と表す. C^{4N} 上の有界作用素 M で

$$\text{Ran } M : \text{closed}, \quad \text{Ker } M^* J = \text{Ran } M \quad (35)$$

を満たすものを考える. ただし, J は以下の $4N \times 4N$ 行列で与えられる C^{4N} 上の有界作用素である:

$$J = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1} & O & \dots & O \\ O & J_{\alpha_2} & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & J_{\alpha_N} \end{pmatrix}.$$

作用素 H^M を

$$H^M u = \mathcal{L}u, \quad D(H^M) = \{u \in D(L^*) ; \Xi u \in \text{Ran } M\} \quad (36)$$

で定義すると, H^M は L の自己共役拡張である. 逆に L の任意の自己共役拡張はこの形で表される.

証明 以下, L^* のグラフ・ノルムを $\|u\|_{L^*} = \|\mathcal{L}u\|^2 + \|u\|^2$ と書く. 仮定 4.6 の下で, ある定数 C_1 が存在して

$$\max\{\|\phi_{-1}^{(j)}\|_{L^*}, \|\psi_1^{(j)}\|_{L^*}, \|\phi_0^{(j)}\|_{L^*}, \|\psi_0^{(j)}\|_{L^*}\} \leq C_1 \quad (37)$$

が全ての j について成り立つ事が, 関数の置換 (19) を用いた直接計算により分かる.

(i) $u \in D(L^*)$ に対し, $\Xi T_j u = {}^t(c_{j,1}, c_{j,2}, c_{j,3}, c_{j,4})$ (Ξ は作用素 $(L_1^{\alpha_j})^*$ についての 0 における境界値を与える作用素) とおくと, (18) より

$$\begin{aligned} c_{j,1} &= \frac{1}{4\pi(1-\alpha)} [\psi_1^{\alpha_j}, T_j u]_1, & c_{j,2} &= \frac{1}{4\pi(\alpha-1)} [\phi_{-1}^{\alpha_j}, T_j u]_1, \\ c_{j,3} &= \frac{1}{-4\pi\alpha} [\psi_0^{\alpha_j}, T_j u]_1, & c_{j,4} &= \frac{1}{4\pi\alpha} [\phi_0^{\alpha_j}, T_j u]_1 \end{aligned}$$

が成り立つ. この式と 仮定 4.6, (32), (37) および Schwarz の不等式より, ある正定数 C_2 が存在して

$$|c_{j,1}|^2 + |c_{j,2}|^2 + |c_{j,3}|^2 + |c_{j,4}|^2 \leq C_2 \int_{|z-z_j| < \frac{R}{2}} (|\mathcal{L}u|^2 + |u|^2) dx dy \quad (38)$$

が全ての j に対して成り立つことが分かる. 特に $N = \infty$ のときには, (38) の両辺を j について足し合わせれば列 $\{c_j\}$ が $l^2(N)$ に属することが分かる. さらに (37) より, 無限和

$$u' = \sum_{j=1}^{\infty} (c_{j,1} \phi_{-1}^{(j)} + c_{j,2} \psi_1^{(j)} + c_{j,3} \phi_0^{(j)} + c_{j,4} \psi_0^{(j)})$$

が $D(L^*)$ において収束することが分かる (上付きの添字 j が相異なる二つの基底は $D(L^*)$ において互いに直交することに注意). さらにこのとき, 任意の j について $\Xi T_j(u-u') = 0$ となるから, 定理 4.2 (ii) より $T_j(u-u') \in D(\overline{L_1^{\alpha_j}})$, ゆえに $T([u-u']) = 0$ である. 命題 4.4 より T は同型であるから $[u-u'] = 0$, すなわち $\xi = u-u' \in D(\overline{L})$ を得る. 一意性は, (34) の両辺に ΞT_j を作用させれば $\Xi T_j u = {}^t(c_{j,1}, c_{j,2}, c_{j,3}, c_{j,4})$ が得られることより従う.

(ii) $u, v \in D(L^*)$ に対して $[u, v]_N = (\mathcal{L}u, v) - (u, \mathcal{L}v)$ とおけば,

$$[u, v]_N = {}^t \mathbf{c} \mathbf{J} \mathbf{d}, \quad \mathbf{c} = \Xi u, \quad \mathbf{d} = \Xi v,$$

が成り立つことが, t_{-z_j} の性質 (31) と (18) を用いて示される. 残りの議論は定理 4.2 (iii) の別証明のときと同様である (ただし, (20) については第一の等号のみを用いる). $\square$

以下では, 係数 $\Xi_j u = (c_{j,1}, \dots, c_{j,4}) \in C^4$ を点 z_j における u の境界値と呼ぶ.

定義 4.2 L の自己共役拡張 H が次の条件を満たすとき, H は一様な境界条件を持つという:

- (i) ある α が存在し, $\alpha_j = \alpha$ が全ての $j = 1, \dots, N$ について成り立つ.
- (ii) 条件 (15) を満たす 4×4 行列 M が存在し,

$$D(H) = \{u \in D(L^*) ; \Xi_j u \in \text{Ran } M, \forall j = 1, 2, \dots, N\}$$

が成り立つ. ただし, $\Xi_j u$ は点 z_j における u の境界値である.

定義 4.2 における作用素 H と行列 M に対し, M を N 個対角線状に並べた $4N \times 4N$ 行列を M_N とすると, M_N は (35) を満たし, $H = H^{M_N}$ となるので, H が自己共役作用素になる事が確かめられる.

また, (30) より

$$\mathcal{A}_1^{\alpha_j} t_{-z_j} = t_{-z_j} \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}_1^{\alpha_j, \dagger} t_{-z_j} = t_{-z_j} \mathcal{A}^\dagger, \quad \text{in } \{|z - z_j| < \frac{R}{2}\} \quad (39)$$

が成り立つ. この式を用いると, $N \geq 2$ の時の 4 つの作用素 (13) の定義域を局所化の議論により求めることができる.

命題 4.8 $1 \leq N \leq \infty$ とし, 仮定 4.6 が成り立つとする. このとき, L の自己共役拡張 H^+ , H^- が存在して作用素等式

$$H^{AB} = A^* \overline{A} + B = A^{\dagger*} \overline{A}^\dagger - B \quad (40)$$

$$H^+ = \overline{A} A^* - B, \quad H^- = \overline{A}^\dagger A^{\dagger*} + B \quad (41)$$

が成り立つ. さらに,

$$D(H^{AB}) = D(\overline{L}) \oplus \bigoplus_{j=1}^N \text{L.h.} \{\phi_0^{(j)}, \psi_1^{(j)}\}, \quad (42)$$

$$D(H^+) = D(\overline{L}) \oplus \bigoplus_{j=1}^N \text{L.h.} \{\phi_{-1}^{(j)}, \phi_0^{(j)}\}, \quad (43)$$

$$D(H^-) = D(\overline{L}) \oplus \bigoplus_{j=1}^N \text{L.h.} \{\psi_1^{(j)}, \psi_0^{(j)}\}. \quad (44)$$

証明 命題 4.3 の証明を, (29) まで $H_1^\#$ ($\# = AB, +, -$), $A_1, A_1^\dagger$ をそれぞれ $H^\#, A, A^\dagger$ に取り替えて行くと,

$$D(H^{AB}) \subset \{u \in D(L^*); Au \in L^2, A^\dagger u \in L^2\}, \quad (45)$$

$$D(H^+) \subset \{u \in D(L^*); A^\dagger u \in L^2, A^{\dagger 2} u \in L^2\}, \quad (46)$$

$$D(H^-) \subset \{u \in D(L^*); Au \in L^2, A^2 u \in L^2\} \quad (47)$$

を得る. (45), (46), (47) の右辺がそれぞれ (42), (43), (44) の右辺に一致することが, (39) と $N = 1$ の場合の結果を用いれば示される. さらに, 作用素 $\mathcal{L}$ を (42), (43), (44) の右辺に制限した作用素は全て自己共役であることが命題 4.7 より示されるので, 両辺はそれぞれ一致する. $\square$

これより, α_j の値が全て等しければ, 作用素 H^{AB}, H^+, H^- はいずれも一様な境界条件を持つことが分かる.

5 交換関係の特異摂動を用いた固有値数の評価

基礎となるのは次の補題である.

補題 5.1 S を Hilbert 空間上の対称閉作用素とし, その不足指数は (n, n) であり, $n < \infty$ とする. X, Y を S の自己共役拡張とする. このとき, 以下が成り立つ:

- (i) X と Y の本質的スペクトルは集合として等しい.
- (ii) 閉または开区間 I は, 条件 $\mathcal{N}(I; X) < \infty$ を満足するものとする. このとき $\mathcal{N}(I; Y) < \infty$ であり, さらに

$$|\mathcal{N}(I; X) - \mathcal{N}(I; Y)| \leq d$$

が成り立つ. ただし,

$$d = \dim D(X)/(D(X) \cap D(Y)) = \dim D(Y)/(D(X) \cap D(Y)).$$

証明 (i) Weidmann [W] の Theorem 8.17 を参照せよ.

(ii) [W] の Exercise 8.8 を参照せよ (开区間の場合の主張があるが, その証明を少し修正することにより, 閉区間の場合にも成り立つ事が分かる). $\square$

注. 補題 5.1 の仮定の下で, 常に $d \leq n$ が成り立つ.

(1) 磁束が有限個の場合

定理 3.1 の証明 まず, (40) より

$$H^{AB} = A^* \bar{A} + B \geq B \quad (48)$$

であるから, (ii) の第一式は成り立つ.

作用素 $\overline{A^\dagger}$ に対し命題 1.2 を適用し, (40), (41) を用いると

$$(H^{AB} + B)|_{(\text{Ker}(H^{AB}+B))^\perp} \simeq (H^- - B)|_{(\text{Ker}(H^- - B))^\perp}$$

を得る ($\simeq$ はユニタリ同値を表す). (48) より $\text{Ker}(H^{AB} + B) = \{0\}$ である. したがって,

$$H^{AB} + 2B \simeq H^-|_{(\text{Ker}(H^- - B))^\perp} \quad (49)$$

が成り立つ.

次に $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し, $a_n = \mathcal{N}(((2n-1)B, (2n+1)B); H^{AB})$ とおく. (48) より

$$a_0 = 0 \quad (50)$$

である. (49) より,

$$a_{n-1} = \mathcal{N}(((2n-1)B, (2n+1)B); H^-), \quad n = 1, 2, \dots \quad (51)$$

である. さらに, (42), (44) より

$$\dim D(H^{AB}) / (D(H^{AB}) \cap D(H^-)) = N$$

が成り立つ. よって, 補題 5.1 より

$$a_n \leq a_{n-1} + N, \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つ. この式と (50) より (ii) の第二式は成り立つ.

さらに L の不足指数が $(2N, 2N)$ であることより, L の任意の自己共役拡張 H に対し

$$\dim D(H) / (D(H) \cap D(H^-)) \leq 2N$$

である. したがって, 補題 5.1 (ii) より

$$\begin{aligned} \mathcal{N}((-\infty, B); H) &\leq \mathcal{N}((-\infty, B); H^-) + 2N = 2N, \\ \mathcal{N}(((2n-1)B, (2n+1)B); H) &\leq \mathcal{N}(((2n-1)B, (2n+1)B); H^-) + 2N \\ &\leq (n-1)N + 2N = (n+1)N \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 最後の不等号では (ii) と (51) を用いた. よって (iii) も成り立つ.

最後に (i) を示す. まず, 補題 5.1 (i) よりある R の閉集合 S が存在して, L の任意の自己共役拡張 H に対し, $S = \sigma_{\text{ess}}(H)$ となる. さらに (49) より

$$S + 2B = S \setminus \{B\} \quad (52)$$

が成り立つ. さらに固有値 B に対する Weyl 列 $\{u_n\}$ (正規直交列 $\{u_n\}$ で $\|(H-B)u_n\| \rightarrow 0$ を満たすもの) を具体的に構成することにより, $B \in S$ が言える. これと (52) を合わせると,

$$S = \sigma_{\text{ess}}(H) = \{(2n-1)B; n=1, 2, \dots\} \quad (53)$$

が言える. ところが, (ii), (iii) より各ランダウ準位の周りには高々有限個の固有値しかないので, ランダウ準位は全て無限多重度の固有値である. $\square$

(2) 周期的特異摂動の場合

以下に定理 3.3 の証明を述べる (定理 3.2 の証明は, より易しい). 証明には, 以下に述べる磁場付き Bloch 理論を用いる ([M-R] 参照). まず, $\mathbf{a}(z) = (\text{Im } \phi(z), \text{Re } \phi(z))$ を満たす関数 ϕ として,

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{B\bar{z}}{2} + \alpha\zeta(z), \\ \zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 0} \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2} \right) \end{aligned}$$

を取る. 関数 $\zeta(z)$ は Weierstrass の ζ 関数と呼ばれる. さらに $\gamma = 2m\omega_1 + 2n\omega_3 \in \Gamma$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) に対し,

$$\begin{aligned} t_\gamma u(z) &= e^{-i\text{Im}(\frac{B\bar{\gamma}}{2}z + 2\alpha(m\eta_1 + n\eta_3)z)} u(z - \gamma), \\ \eta_1 &= \zeta(\omega_1), \eta_3 = \zeta(\omega_3) \end{aligned}$$

と定義すると次が成り立つ.

補題 5.2 (i) 任意の $\gamma \in \Gamma$ について,

$$t_\gamma \mathcal{A} = \mathcal{A} t_\gamma, \quad t_\gamma \mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\dagger t_\gamma, \quad t_\gamma \mathcal{L} = \mathcal{L} t_\gamma.$$

(ii) $\gamma = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, $\gamma' = 2m'\omega_1 + 2n'\omega_3$ ($m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$) のとき,

$$t_\gamma t_{\gamma'} = e^{i(m'n - mn')(|\Omega|B + 2\pi\alpha)} t_{\gamma'} t_\gamma.$$

証明 次の公式を用いて計算する ([岩波] 参照):

$$\begin{aligned} \zeta(z + 2\omega_j) &= \zeta(z) + 2\eta_j, \quad (j=1, 3) \\ \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_3 \\ \omega_1 & \omega_3 \end{vmatrix} &= \frac{\pi i}{2}. \quad (\text{Legendre の関係}) \end{aligned}$$

$\square$

以下, 有理磁束条件 (12) が成り立つと仮定する. Γ の部分格子 $\tilde{\Gamma} = \nu_1 \mathbf{Z} \oplus \nu_3 \mathbf{Z}$ ($\nu_1 = 2q\omega_1$, $\nu_3 = 2\omega_3$) を取る. $\tilde{\Gamma}$ の基本領域 $\tilde{\Omega}$ を

$$\tilde{\Omega} = \{2s\omega_1 + 2t\omega_3; -\frac{1}{2} < s \leq q - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2}\}$$

と取る. 補題 5.2 (ii) より, $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \tilde{\Gamma}}$ は互いに可換なユニタリ作用素の族となる. 特に t_{ν_1} と t_{ν_3} は可換になるので,

$$T_\gamma = t_{\nu_1}^m t_{\nu_3}^n \quad \gamma = m\nu_1 + n\nu_3 \in \tilde{\Gamma}$$

と定義すれば, $\{T_\gamma\}_{\gamma \in \tilde{\Gamma}}$ は

$$T_{\gamma+\gamma'} = T_\gamma T_{\gamma'} \quad \gamma, \gamma' \in \tilde{\Gamma}$$

を満たす. さらに, 補題 5.2 (i) より, 作用素 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\dagger$, $\mathcal{L}$ のそれぞれと可換になる.

以下, $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ に対し, その実内積を $z \cdot z' := xx' + yy'$ と書く. $\tilde{\Gamma}$ の双対格子 $\tilde{\Gamma}^* = \mathbf{Z}\nu_1^* \oplus \mathbf{Z}\nu_3^*$ ($\nu_j \cdot \nu_k^* = 2\pi\delta_{jk}$) をとり, その基本領域

$$\tilde{\Omega}^* = \mathbf{R}^2 / \tilde{\Gamma}^* \simeq \{s\nu_1^* + t\nu_3^*; -\frac{1}{2} < s \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2}\}$$

を取る. $\theta \in \tilde{\Omega}^*$ とする. Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\theta$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\theta &= \{u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^2); T_\gamma u = e^{i\theta \cdot \gamma} u, \forall \gamma \in \tilde{\Gamma}\}, \\ \|u\|_{\mathcal{H}_\theta}^2 &= \int_{\tilde{\Omega}} |u|^2 dx dy \end{aligned}$$

と定義する. 作用素 L_θ , A_θ , $A_\theta^\dagger$ を

$$\begin{aligned} L_\theta u &= \mathcal{L}u, \quad A_\theta u = \mathcal{A}u, \quad A_\theta^\dagger u = \mathcal{A}^\dagger u, \\ D(L_\theta) &= D(A_\theta) = D(A_\theta^\dagger) = D_\theta, \\ D_\theta &= \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^2) \cap \mathcal{H}_\theta; \text{supp } u \cap \Gamma = \emptyset\} \end{aligned}$$

と定義する. 補題 5.2 (i) より, 作用素 L_θ , A_θ , $A_\theta^\dagger$ は D_θ をそれ自身の中にうつすことが分かる. 作用素 L_θ は正值対称であり, その任意の自己共役拡張を H_θ , Friedrichs 拡張を H_θ^{AB} と表す. また, 以下の関係式が成り立つ.

$$L_\theta = A_\theta^\dagger A_\theta + B = A_\theta A_\theta^\dagger - B, \quad A_\theta^* \supset A_\theta^\dagger, \quad A_\theta^{*\dagger} \supset A_\theta.$$

再び局所化の理論を用いると, 次の事実を証明できる.

補題 5.3 次が成り立つ:

(i) 作用素 L_θ の不足指数は $(2q, 2q)$ である.

(ii) L_θ の自己共役拡張 H_θ^+ , H_θ^- が存在し,

$$H_\theta^{AB} = A_\theta^* \overline{A_\theta} + B = A_\theta^{\dagger*} \overline{A_\theta^\dagger} - B, \quad (54)$$

$$H_\theta^+ = \overline{A_\theta} A_\theta^* - B, \quad H_\theta^- = \overline{A_\theta^\dagger} A_\theta^{\dagger*} + B \quad (55)$$

が成り立つ.

(iii) $\dim D(H_\theta^{AB}) / (D(H_\theta^{AB}) \cap D(H_\theta^-)) = q$ が成り立つ.

次の補題はポテンシャルが滑らかな場合には良く知られた事実である.

補題 5.4 (Weyl Asymptotics) 作用素 L_θ の任意の自己共役拡張 H_θ は固有関数の完全系を持ち, その下から k 番目の固有値を $\lambda_k(\theta)$ と書くと, $\lambda_k(\theta) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) である. さらに次が成り立つ.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}((-\infty, \lambda]; H_\theta)}{\lambda} = \frac{q|\Omega|}{4\pi}. \quad (56)$$

証明 補題 5.1 (ii) および補題 5.3 (i) より $H_\theta = H_\theta^{AB}$ の時に示せば十分である.

$\mathcal{H}_\theta$ の元を $\tilde{\Omega}$ に制限することにより $L^2(\tilde{\Omega})$ の元とみなす. $j = 0, 1, \dots, 2q-1$ に対し,

$$\tilde{\Omega}_j = \{2s\omega_1 + 2t\omega_3; \frac{j-1}{2} < s < \frac{j}{2}, -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\}$$

とおく. $\tilde{\Omega}_j$ は単連結な開集合で, $z \in \tilde{\Omega}_j$ のとき $\text{rot } \mathbf{a}(z) = B$ である. よって, ある $\Psi_j \in C^\infty(\tilde{\Omega}_j)$ が存在して, $|\Psi_j(z)| = 1$ ($z \in \tilde{\Omega}_j$) かつ $\tilde{\Omega}_j$ において

$$\Psi_j \mathcal{L} \Psi_j^{-1} = \left(\frac{1}{i} \nabla + \mathbf{a}_0\right)^2, \quad \mathbf{a}_0 = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}\right)$$

を満たす. $L^2(\tilde{\Omega}_j)$ 上の二次形式 h_j^D, h_j^N を

$$h_j^D[v] = \|\nabla v\|^2, \quad Q(h_j^D) = C_0^\infty(\tilde{\Omega}_j)$$

$$h_j^N[v] = \|\nabla v\|^2, \quad Q(h_j^N) = C^\infty(\tilde{\Omega}_j)$$

と定義する ($Q(h)$ は二次形式 h の定義域を表す). ただし, $C^\infty(\tilde{\Omega}_j)$ は $\tilde{\Omega}_j$ のある開近傍上の C^∞ 級関数を $\tilde{\Omega}_j$ に制限して得られる関数全体を表す. 二次形式 h_j^D の閉包に付随する自己共役作用素は Dirichlet 境界条件を持つラプラシアン $-\Delta_j^D$, h_j^N の閉包に付随する自己共役作用素は Neumann 境界条件を持つラプラシアン $-\Delta_j^N$ である.

$L^2(\tilde{\Omega})$ から $\bigoplus_{j=0}^{2q-1} L^2(\tilde{\Omega}_j)$ へのユニタリ作用素 U を

$$Uu = \bigoplus_{j=0}^{2q-1} \Psi_j u|_{\tilde{\Omega}_j}, \quad u \in L^2(\tilde{\Omega})$$

で定義する. このとき

$$\bigoplus_{j=0}^{2q-1} Q(h_j^D) \subset U D_\theta \subset \bigoplus_{j=0}^{2q-1} Q(h_j^N).$$

が成り立つ。さらに $A_j = \sup_{z \in \tilde{\Omega}_j} |a_0(z)|$ とおくと、任意の正数 ϵ に対して

$$\sum_{j=0}^{2q-1} \left((1+\epsilon)h_j^D[v_j] + (1+\epsilon^{-1})A_j^2\|v_j\|^2 \right) \geq h_\theta^{AB}[U^{-1} \bigoplus_{j=0}^{2q-1} v_j], \quad v_j \in Q(h_j^D),$$

$$\sum_{j=0}^{2q-1} \left((1-\epsilon)h_j^N[\Psi_j u|_{\tilde{\Omega}_j}] - \epsilon^{-1}A_j^2\|\Psi_j u|_{\tilde{\Omega}_j}\|^2 \right) \leq h_\theta^{AB}[u], \quad u \in Q(h_\theta^{AB})$$

が成り立つことが Schwarz の不等式を用いて示される。ただし、 h_θ^{AB} は H_θ^{AB} に対応する二次形式である。よって、Colin de Verdière [C] の lemme 5.1 より、任意の実数 λ に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{2q-1} \mathcal{N} \left(\left(-\infty, \frac{\lambda - (\epsilon^{-1} + 1)A_j^2}{1 + \epsilon} \right]; -\Delta_j^D \right) \\ & \leq \mathcal{N}((-\infty, \lambda]; H_\theta^{AB}) \leq \sum_{j=0}^{2q-1} \mathcal{N} \left(\left(-\infty, \frac{\lambda + \epsilon^{-1}A_j^2}{1 - \epsilon} \right]; -\Delta_j^N \right) \end{aligned} \quad (57)$$

が成り立つ。(57) の最右辺は任意の実数 λ に対して有限値であるから、 H_θ^{AB} は固有関数の完全系を持ち、 $\lambda_k(\theta) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) となることが示される。さらに、(57) と Dirichlet, Neumann ラプラシアンに対する Weyl Asymptotics から (56) が示される。□

以下、 H は一様な境界条件を持つとし、 M をその境界条件を定める 4×4 行列とする (定義 4.2 参照)。このとき、作用素 H の直和分解を考えることができる。まず、 $\theta \in \tilde{\Omega}^*$ に対し、作用素 H_θ を

$$H_\theta u = \mathcal{L}u, \quad D(H_\theta) = \{u \in D(L_\theta^*); \Xi_\gamma u \in \text{Ran } M, \forall \gamma \in \Gamma\} \quad (58)$$

と定義する。ただし、 $\Xi_\gamma u$ は u の γ における境界値である。対称作用素 L_θ の自己共役拡張に対しても命題 4.7 と同様の特徵付けが成り立つことを用いれば、 H_θ は $\mathcal{H}_\theta$ 上の自己共役作用素であることが示される。

命題 5.5 H_θ を (58) で定義される自己共役作用素とする。このとき、以下が成り立つ:

- (i) H_θ の下から k 番目の固有値 $\lambda_k(\theta)$ は θ について連続である。
- (ii) 作用素 H は Hilbert 空間の直積分 $\int_{\tilde{\Omega}^*}^\oplus \mathcal{H}_\theta d\theta / |\tilde{\Omega}^*|$ 上の作用素 $\int_{\tilde{\Omega}^*}^\oplus H_\theta d\theta / |\tilde{\Omega}^*|$ とユニタリ同値である (直積分の定義については [R-S4] の XIII.16 節を見よ)。
- (iii) $\sigma(H) = \bigcup_{\theta \in \tilde{\Omega}^*} \sigma(H_\theta)$ が成り立つ。
- (iv) 実数 λ が、全ての $\theta \in \tilde{\Omega}^*$ に対し H_θ の固有値であるとする。このとき、 λ は H の無限多重度の固有値である。

証明 (i) $\theta \in \tilde{\Omega}^*$ に対し、関数 $\Psi_\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ を以下のように定義する。まず $\tilde{\Omega}$ 上の実数値 C^∞ 級関数 η で、 $\partial\tilde{\Omega}$ の近傍で 1, $\Gamma \cap \tilde{\Omega}$ の近傍で 0 になるものを取る。 $z \in \tilde{\Omega}$ に対し、

$$\Psi_\theta(z) = e^{-i(\theta \cdot z)\eta(z)}$$

と定義する. さらに, 関係式

$$\Psi_\theta(z - \gamma) = e^{i\theta \cdot \gamma} \Psi_\theta(z), \quad z \in \mathbf{R}^2, \gamma \in \Gamma$$

を満たすように Ψ_θ を $\mathbf{R}^2$ 上の関数に拡張する. $\partial\tilde{\Omega}$ の近傍では Ψ_θ は $e^{-i\theta \cdot z}$ と一致するので, Ψ_θ は $\mathbf{R}^2$ 上の C^∞ 級関数になる.

簡単な計算により, $D(H_\theta) = \Psi_\theta D(H_0)$ が分かる. さらに, $v \in D(H_0)$ に対し,

$$\Psi_\theta^{-1} H_\theta \Psi_\theta v = \left(\frac{1}{i} \nabla + \mathbf{a} - \eta \theta - (\theta \cdot z) \nabla \eta \right)^2 v$$

であるから, パラメータ θ を C^2 に拡張することにより, 作用素の族 $\{\Psi_\theta^{-1} H_\theta \Psi_\theta\}_{\theta \in C^2}$ は Analytic family of Type (A) ([R-S4], 16 ページ参照) となる. 作用素 $\Psi_\theta^{-1} H_\theta \Psi_\theta$ は H_θ とユニタリ同値だから, その下から k 番目の固有値は $\lambda_k(\theta)$ である. よって $\lambda_k(\theta)$ は θ について連続である (固有値が重複しない範囲では解析的になる).

(ii) $\theta \in \tilde{\Omega}^*$ とコンパクトな台を持つ $u \in L^2(\mathbf{R}^2)$ に対して,

$$\mathcal{F}_\theta u(z) = \sum_{\gamma \in \tilde{\Gamma}} e^{i\theta \cdot \gamma} T_{-\gamma} u(z)$$

とおく. このとき, $T_\gamma \mathcal{F}_\theta u = e^{i\theta \cdot \gamma} \mathcal{F}_\theta u$ であるから, $\mathcal{F}_\theta u \in \mathcal{H}_\theta$ となる. さらに,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}^*} \|\mathcal{F}_\theta u\|_{\mathcal{H}_\theta}^2 \frac{d\theta}{|\tilde{\Omega}^*|} &= \int_{\tilde{\Omega}^*} \int_{\tilde{\Omega}} \left| \sum_{\gamma \in \tilde{\Gamma}} e^{i\theta \cdot \gamma} T_{-\gamma} u(z) \right|^2 dz \frac{d\theta}{|\tilde{\Omega}^*|} \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \left| \sum_{\gamma \in \tilde{\Gamma}} T_{-\gamma} u(z) \right|^2 dz = \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (59)$$

となる. 但し, $dz, d\theta$ は $\mathbf{R}^2$ の Lebesgue 測度を表し,

$$\int_{\tilde{\Omega}^*} e^{i\theta \cdot (\gamma - \gamma')} \frac{d\theta}{|\tilde{\Omega}^*|} = \begin{cases} 1 & (\gamma = \gamma') \\ 0 & (\gamma \neq \gamma') \end{cases}$$

を用いた. よって,

$$(\mathcal{F}u)(z, \theta) := (\mathcal{F}_\theta u)(z),$$

とおくと, $\mathcal{F}$ は $L^2(\mathbf{R}^2)$ から $\int_{\tilde{\Omega}^*}^\oplus \mathcal{H}_\theta d\theta / |\tilde{\Omega}^*|$ への等距離写像に拡張できる. さらに, $\mathcal{F}$ の逆写像が $v \in \int_{\tilde{\Omega}^*}^\oplus \mathcal{H}_\theta d\theta / |\tilde{\Omega}^*|$ に対して

$$\mathcal{F}^{-1}v(z) = \int_{\tilde{\Omega}^*} v(z, \theta) \frac{d\theta}{|\tilde{\Omega}^*|} \quad (60)$$

で与えられる (厳密には z, θ について C^∞ な v に対して定義してから連続性を使って拡張する) ことから, $\mathcal{F}$ はユニタリ作用素になることが分かる.

次に、コンパクトな台を持つ $u \in D(L^*)$ を取る. $T_{-\gamma}$ と $\mathcal{L}$ が可換になることから,

$$\mathcal{L}\mathcal{F}_\theta u = \mathcal{F}_\theta \mathcal{L}u \in \mathcal{H}_\theta \quad (61)$$

となる. よって, $\mathcal{F}_\theta u \in D(L_\theta^*)$ である. さらに (59) と (61) より, L^* と L_θ^* のグラフノルムについて,

$$\|u\|_{L^*}^2 = \int_{\tilde{\Omega}^*} \|\mathcal{F}_\theta u\|_{L_\theta^*}^2 \frac{d\theta}{|\tilde{\Omega}^*|}$$

を得る. よって, $\mathcal{F}$ は $D(L^*)$ から $\int_{\tilde{\Omega}^*} D(L_\theta^*) d\theta / |\tilde{\Omega}^*|$ への等距離写像に拡張され, さらに (60) が逆写像を与えることから $\mathcal{F}|_{D(L^*)}$ はユニタリ作用素になる.

さらに, コンパクトな台を持つ $u \in D(H)$ に対して,

$$\Xi_\gamma \mathcal{F}_\theta u = \Xi_\gamma \sum_{\gamma' \in \tilde{\Gamma}} e^{i\theta \cdot \gamma'} T_{-\gamma'} u = \sum_{\gamma' \in \tilde{\Gamma}} e^{i\theta \cdot \gamma} \Xi_{\gamma+\gamma'} u \in \text{Ran } M$$

となるので, $\mathcal{F}_\theta u \in D(H_\theta)$ となる. このような u は $D(H)$ の中で稠密であることと, $\mathcal{F}$ が $D(L^*)$ から $\int_{\tilde{\Omega}^*} D(L_\theta^*) d\theta / |\tilde{\Omega}^*|$ へのユニタリ作用素であることより, $\mathcal{F}|_{D(H)}$ は $D(H)$ から $\int_{\tilde{\Omega}^*} D(H_\theta) d\theta / |\tilde{\Omega}^*|$ への等距離写像になり, (60) が逆写像を与えることから

$$\mathcal{F}D(H) = \int_{\tilde{\Omega}^*} D(H_\theta) d\theta / |\tilde{\Omega}^*|$$

となる. この事実と (61) より主張が従う.

(iii) (i), (ii) の結果と [R-S4] の Theorem XIII.85 (d) より主張が従う.

(iv) 仮定を満たす λ が存在したとする. (ii) の結果と [R-S4] の Theorem XIII.85 (e) より, λ は H の固有値である. 対応する固有関数 $u \neq 0$ を一つ取ると, 関数系 $\{T_\gamma u\}_{\gamma \in \tilde{\Gamma}}$ は一次独立であり, その全てが H の固有値 λ に対応する固有関数となる. よって λ は H の無限多重度の固有値である. $\square$

定理 3.3 の証明の前に, いくつかの補題を用意しておく.

補題 5.6 任意の $\theta \in \tilde{\Omega}^*$, $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\mathcal{N}((-\infty, \lambda]; H_\theta^{AB}) \leq \mathcal{N}((-\infty, \lambda]; H_\theta^-). \quad (62)$$

証明 [R-S2, Theorem X.25] の証明によると, 一般に稠密な定義域を持つ閉作用素 X に対して $Q(X^*X) = D(X)$ となる. よって, $Q(H_\theta^{AB}) = Q(A_\theta^{+*} A_\theta^+) = D(\overline{A_\theta^+})$, $Q(H_\theta^-) = Q(A_\theta^+ A_\theta^{+*}) = D(A_\theta^{+*})$ である. したがって $Q(H_\theta^-) \supset Q(H_\theta^{AB})$ であり, $u \in D_\theta = D(A^+)$ については $(H_\theta^- u, u) = (H_\theta^{AB} u, u)$ が成り立つので, H_θ^{AB} の二次形式は H_θ^- の二次形式の制限であることが分かる. よって, 二次形式の意味での不等式 $H_\theta^{AB} \geq H_\theta^-$ が成り立つ. したがって, min-max 原理より主張が成り立つ. $\square$

補題 5.7 任意の開または閉区間 I と任意の L_θ の自己共役拡張 H_θ に対して,

$$|\mathcal{N}(I; H_\theta^{AB}) - \mathcal{N}(I; H_\theta^-)| \leq q, \quad (63)$$

$$|\mathcal{N}(I; H_\theta) - \mathcal{N}(I; H_\theta^-)| \leq 2q. \quad (64)$$

証明 補題 5.1 (ii) と補題 5.3 (i), (iii) より直ちに従う. $\square$

定理 3.3 の証明 $n = 1, 2, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} a_n &= \mathcal{N}(\{(2n-1)B\}; H_\theta^{AB}), \\ b_n &= \mathcal{N}(((2n-1)B, (2n+1)B); H_\theta^{AB}) \end{aligned}$$

とおく. 命題 5.5 (iv) より, 定理の仮定を満たすような n に対し

$$a_n > 0 \quad (65)$$

を示せばよい.

まず, (54) より

$$H_\theta^{AB} = A_\theta^* \overline{A_\theta} + B \geq B. \quad (66)$$

補題 5.3 (ii) と命題 1.2 より

$$H_\theta^{AB} + 2B \simeq H_\theta^-|_{(\text{Ker}(H_\theta^- - B))^\perp} \quad (67)$$

が成り立つ. よって, $n = 2, 3, \dots$ について,

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \mathcal{N}(\{(2n-1)B\}; H_\theta^-), \\ b_{n-1} &= \mathcal{N}(((2n-1)B, (2n+1)B); H_\theta^-) \end{aligned}$$

が成り立つ. また

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathcal{N}(\{B\}; H_\theta^-), \\ b_0 &= \mathcal{N}((B, 3B); H_\theta^-) \end{aligned}$$

とおくと, (66), (67) より

$$b_0 = 0 \quad (68)$$

である. さらに (63) より,

$$b_n \leq b_{n-1} + q, \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つので,

$$b_n \leq qn, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (69)$$

が従う.

次に, $\lambda = (2n-1)B$ に対して (62) を適用して

$$a_1 + b_1 + \cdots + b_{n-1} + a_n \leq a_0 + b_0 + \cdots + b_{n-2} + a_{n-1}$$

を得る. 両辺から同じ項を引くと, (68) より

$$b_{n-1} + a_n \leq a_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (70)$$

を得る. さらに, 閉区間 $I = [B, (2n-1)B]$ に対して (63) を適用して両辺から同じ項を引くと,

$$b_{n-1} + a_n + q \geq a_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (71)$$

を得る. また, (56) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + b_1 + \cdots + b_{n-1} + a_n}{(2n-1)B} = \frac{q|\Omega|}{4\pi} \quad (72)$$

を得る. (70), (71), (72) より

$$a_0 - q \leq \frac{q|\Omega|B}{2\pi} \leq a_0 \quad (73)$$

を得る. (69), (71), (73) より

$$a_n \geq a_0 - b_{n-1} - q \geq \frac{q|\Omega|B}{2\pi} - q(n-1) - q = q \left(\frac{|\Omega|B}{2\pi} - n \right) \quad (74)$$

を得る. よって $n < \frac{|\Omega|B}{2\pi}$ のとき $a_n > 0$ となるので (i) が示された.

最後に, 任意の L_θ の自己共役拡張 H_θ と 1 点 $I = \{(2n-1)B\}$ に対して (64) を用いると,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\{(2n-1)B\}; H_\theta) &\geq \mathcal{N}(\{(2n-1)B\}; H_\theta^-) - 2q \\ &\geq a_{n-1} - 2q \geq q \left(\frac{|\Omega|B}{2\pi} - 1 - n \right). \end{aligned}$$

ただし, 最後の不等式において (74) を用いた. これより (ii) が成り立つ. $\square$

参考文献

- [岩波] 森口繁一; 宇田川力ネ久*; 一松信; 数学公式 III 特殊函数, 岩波書店, 1960.
(* カネは金ヘンに圭)
- [A-T] Adami, R.; Teta, A.; On the Aharonov-Bohm Hamiltonian. Lett. Math. Phys. **43** (1998), no. 1, 43-53.

- [A] Arai, Asao; Representation-theoretic aspects of two-dimensional quantum systems in singular vector potentials: canonical commutation relations, quantum algebras, and reduction to lattice quantum systems, *J. Math. Phys.* **39** (1998), no. 5, 2476–2498.
- [B-S] Birman, M. Sh.; Solomjak, M. Z.; *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [B-G] Bulla, W.; Gesztesy, F.; Deficiency indices and singular boundary conditions in quantum mechanics, *J. Math. Phys.* **26** (1985), no. 10, 2520–2528.
- [C] Colin de Verdière, Yves; L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques (French), *Comm. Math. Phys.* **105** (1986), no. 2, 327–335.
- [C-N] Cornean, H. D.; Nenciu, G., Two-dimensional magnetic Schrödinger operators: width of mini bands in the tight binding approximation, *Ann. Henri Poincaré* **1** (2000), no. 2, 203–222.
- [D-S] Dąbrowski, L.; Št'ovíček, P.; Aharonov-Bohm effect with δ -type interaction, *J. Math. Phys.* **39** (1998), no. 1, 47–62.
- [D] Deift, P. A.; Applications of a commutation formula, *Duke Math. J.* **45** (1978), no. 2, 267–310.
- [E] Elstrodt, Jürgen; Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. I, II, III, *Math. Ann.* **203** (1973), 295–300; *Math. Z.* **132** (1973), 99–134; *Math. Ann.* **208** (1974), 99–132.
- [E-S-V] Exner, P.; Št'ovíček, P.; Vytrás, P.; Generalized boundary conditions for the Aharonov-Bohm effect combined with a homogeneous magnetic field, *J. Math. Phys.* **43** (2002), no. 5, 2151–2168.
- [I-K] Ikebe, Teruo; Kato, Tosio; Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, *Arch. Rational Mech. Anal.* **9** (1962), 77–92.
- [I-S] Inahama, Yuzuru; Shirai, Shin-ichi; The essential spectrum of Schrödinger operators with asymptotically constant magnetic fields on the Poincaré upper-half plane, *J. Math. Phys.* **44** (2003), no. 1, 89–106.
- [I] Iwatsuka, Akira; The essential spectrum of two-dimensional Schrödinger operators with perturbed constant magnetic fields, *J. Math. Kyoto Univ.* **23** (1983), no. 3, 475–480.

- [J] Junker, Georg; *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [M-O-R] Melgaard, Michael; Ouhabaz, El-Maati; Rozenblum, Grigori; Negative discrete spectrum of perturbed multivortex Aharonov-Bohm Hamiltonians, to appear in *Annales Henri Poincaré*.
- [M-R] Mohamed, Abdérémane; Raïkov, George D., On the spectral theory of the Schrödinger operator with electromagnetic potential, Pseudo-differential calculus and mathematical physics, 298–390, *Math. Top.*, **5**, Akademie Verlag, Berlin, 1994.
- [N-N] Nakano, Fumihiko; Nomura, Yuji; Random magnetic fields on line graphs, *J. Math. Phys.* **44** (2003), no. 11, 4988–5002.
- [N] Nambu, Yoichiro; The Aharonov-Bohm problem revisited, *Nuclear Phys. B* **579** (2000), no. 3, 590–616.
- [O] Ogurisu, Osamu; Supersymmetric analysis of the spectral theory on infinite graphs, preprint.
URL=http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=02-242
- [R-S2] Reed, Michael; Simon, Barry; *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness* Academic Press, New York-London, 1975.
- [R-S4] Reed, Michael; Simon, Barry; *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York-London, 1978.
- [R] Roelcke, Walter; Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I, *Math. Ann.* **167** (1966), 292–337.
- [S] Shirai, Tomoyuki; The spectrum of infinite regular line graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), no. 1, 115–132.
- [Sp] Spiliotopoulos, A. D; The general structure of eigenvalues in nonlinear oscillators, *J. Phys. A* **33** (2000), no. 20, 3809–3823.
- [W] Weidmann, Joachim; *Linear operators in Hilbert spaces*, Translated from the German by Joseph Szücs, Graduate Texts in Mathematics, **68**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.