

擬微分作用素と TRANSMISSION
PROPERTY について

東大 教養 内山 康一

§ 楕円型の境界値問題を考える。ふつうは compact な領域 Ω とその境界 $\partial\Omega$ について考える。最近、多様体 M とその部分多様体 S に対する楕円型“境界値”問題が藤原[3], []において扱われた。それは $H^*(M)$ に対する Hodge 分解を $H^*(M, S)$ の場合に拡張するものである。余次元が 1 より大きい“境界”に対する楕円型の問題は、少し古くは S. L. Sobolev [], 比較的最近には B. Sternin [4] の一般的結論がある。内部での方程式は proper elliptic の単独あるいは決定系を考えているので、問題は境界条件のつけ方と、境界 S に近づくときの関数の挙動に対する制限の設定、(これも境界条件といえる) がどうなされたら適切かということである。解関数の S への trace が常に存在するように、 S の余次元に合わせて優決定系の方程式に対して問題を作ることは、ここでは考えない。

以下では境界値問題 $(\Omega, \partial\Omega)$ と (M, S) の比較をして、
 (M, S) の型の問題の特殊性を説明する。Boutet de Monvel
 の transmission property をもつ pseudo differential ops
 に対する楕円型境界値問題のとり扱い^が (M, S) の場合にど
 うなるかみるのが標題の意味であつたが、結果的には内容と
 ずれたかもしれない。

§ transmission property をもつ ということの意味をきめ
 ておく。そのために Boutet de Monvel [1][2] をかんたん
 にみなおしておこう。

$$\begin{array}{l} \text{境界値問題} \\ \text{(EBVP)} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{ll} Pu = f & \text{in } \Omega \\ Bu|_{\partial\Omega} = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{array} \right.$$

において、 (P, B) は、はじめ Diff. Ops とする。楕円型の特
 長は、 $f \in C^\infty(\bar{\Omega}) = \{ \tilde{f}|_{\Omega} : \tilde{f} \in C^\infty(V), V \text{ は } \Omega \text{ を open} \\ \text{set として含む manifold} \}$,

$\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ であつて、 (P, B) が Lopatinskiĭ-Shapiro 条件
 をみたせば“解 $u \in C^\infty(\Omega)$ のみならず” $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ になるこ
 とである。さて、(EBVP) を解くときにあらわれる Green 作
 用素、Poisson 作用素はそれぞれ $C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$, $C^\infty(\partial\Omega) \\ \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ に作用する。これら^を pseudo diff op (ΨDO)
 の symbol calculus で扱いたい。次のように考える。

manifold $V \supset \bar{\Omega} \supset \partial\Omega$ を固定する. たとえば Ω の 'double' をとればよい. $C^\infty(\bar{\Omega}) \ni f$ を 0 で延長して V 上の函数と思ひ $\tilde{f}$ とかく. Diff Op P を elliptic のまま V 上に延長しておく. それを $\tilde{P}$ とする.

$$\tilde{P}\tilde{f}|_{\Omega} = Pf \quad \text{in } \Omega.$$

$\tilde{P}$ の parametrix を V ($\partial V = \emptyset$) で考えることは容易である. 一般に Q を V 上の ΨDO_p としたとき, $C^\infty(\bar{\Omega})$ 上に Q_Ω を次のように定義する.

$$Q_\Omega f = Q\tilde{f}|_{\Omega}.$$

これは一般には $C^\infty(\bar{\Omega})$ ではない. Q の pseudo local prop. から $C^\infty(\bar{\Omega})$ ではある.

定義. ΨDO_p Q は, $\forall Q_\Omega f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ のとき

transmission property を ($\partial\Omega$ に沿って) もつという.

注意として, Green 作用素の例を考えるならば, Q が elliptic Diff Op の parametrix なら (TP) をもつ. 従つてもちろん Diff Op の枠より広い. かつ, ΨDO 全体にならないことは後の証明でわかる.

ついでに (TP) をもつ Ops の性質等を列挙しておく.

• P, Q が (TP) をもつならば $P \cdot Q$ もそうである.

(合成をするとき properly supported を仮定).

• $\partial\Omega$ に measure をもつ $\delta_{\partial\Omega} \in \mathcal{D}'(V)$ と $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ により,

$$K_P(\varphi) = P(\varphi \otimes \delta_{\partial\Omega})|_{\Omega} \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

が (TP) をもつ ΨDO_P P に定義できる. (Poisson op.)

• $\partial\Omega$ 上の ΨDO_P B と (TP) をもつ P により

$$Tf = B(P_\Omega f|_{\partial\Omega}) \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

が定義される. (trace operator).

• P_1, P_2 が (TP) をもつとき, $(P_1 \cdot P_2)_\Omega - P_{1,\Omega} \cdot P_{2,\Omega}$

は 0 でない. これは上の Poisson op と trace op. の合成

$K \cdot T : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ で近似されるもので singular Green op とよばれている []. 逆の $T \cdot K$ は $\partial\Omega$ 上の ΨDO_P になる. ゆえに, $C^\infty(\bar{\Omega}) \oplus C^\infty(\partial\Omega) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega}) \oplus C^\infty(\partial\Omega)$

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\bar{\Omega}) & \xrightarrow[\text{sing. Green}]{\Psi DO_P, (TP)} & C^\infty(\bar{\Omega}) \\ \oplus & \swarrow \text{Poisson op} \quad \searrow \text{trace op} & \oplus \\ C^\infty(\partial\Omega) & \xrightarrow{\Psi DO_P} & C^\infty(\partial\Omega) \end{array}$$

として $\begin{pmatrix} P+G & K \\ T & B \end{pmatrix}$ という matrix 型の作用素が考え

られ, "elliptic algebra" を構成できる. 詳しくは [1][2].

以上は boundary $\partial\Omega$ 付近の local なところが肝心だから, local に考え (R^n_+, R^{n-1}) とする. さらに, R^{n-1} 方向に Fourier 変換したと思って, 1次元で (TP) をもつ ΨDO_P

はどんなものかスケッチしておく。

$P(x, D)$ を R^n 上の ΨDO_p . R^{n+1} に τ として (TP) をもつとする。かんたんのため, いわゆる classical ΨDO_p とし, properly supported とする。 $f \in C^\infty(\overline{R_+^n})$ のとき, $P(x, D)f$ の $x_n \rightarrow +0$ の挙動を精密にみる必要がある。しかし粗く, $f(x) = \delta(x_n)$ としてみるまゝをみよう。

$$(*) = \int p(x, \xi', \xi_n) \hat{f}(\xi_n) e^{it\xi_n} d\xi_n \quad \hat{f} = 1$$

の計算。まず,

$$\begin{aligned} p(x, \xi', \xi_n) &\sim \sum p_k(x, \xi', \xi_n) \quad \text{near } (0, \xi_n) \\ &\sim \sum p_k^{(\sigma)}(x, 0, \pm 1) \xi'^\sigma |\xi_n|^{d_k - |\sigma|} \end{aligned}$$

ここで d_k は p_k の degree. 二行目は ξ' についての Taylor 展開である。

$$\begin{aligned} (*) &\sim \sum \{ p_k^{(\sigma)}(x, 0, 1) \xi'^\sigma \chi_{-d_k+|\sigma|-1}(t) \\ &\quad + p_k^{(\sigma)}(x, 0, -1) \xi'^\sigma \chi_{-d_k+|\sigma|-1}(-t) \} \\ &= \sum \{ p_k^{(\sigma)}(x, 0, 1) - (-1)^{-d_k+|\sigma|} p_k^{(\sigma)}(x, 0, -1) \} \\ &\quad \times \xi'^\sigma \chi_{-d_k+|\sigma|+1}(t). \end{aligned}$$

~~ただし~~, $\chi_{-d_k+|\sigma|-1}$ は $(\xi_n)_+^{d_k-|\sigma|}$ の逆 Fourier 変換である。それは t について $t \rightarrow 0$ のとき C^∞ 級でない。従ってその係数は全て消滅しなければならない。

定理. (TP) をもつ ΨDO_p の symbol は,

$$p_K^{(\sigma)}(x, 0, 1) = (-1)^{d_K - 1} p_K^{(\sigma)}(x, 0, -1) \text{ for } \forall \sigma.$$

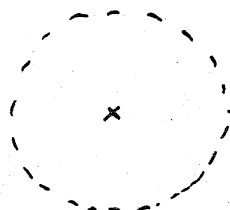
この逆も成り立つ。

注意. しかし、Hilbert変換 H は $\sigma(H)(\xi) = c \operatorname{sgn} \xi$ だから (TP) をもたない。

§ 次に (M, S) 型の問題を考える。 S の近傍がとくに問題であるから、Euclid空間の領域で適当に考えることにする。

例1. $\mathbb{R}^3$ の領域 $D = \{x \mid 0 < |x| < 1\}$ において,

$$\begin{cases} \Delta \Delta u = 0 \\ u|_{r=1} = u_r|_{r=1} = 0 \\ u|_{r=0} = 1 \end{cases}$$



この解を Sobolev空間 H^2 でもとめると,

$$u = (1-r)^2. \quad (r = |x|).$$

$S = \{0\}$ の境界条件は1つであり、 u は $r=0$ において滑らかさを失う。

例2. 例1を $(\Omega, \partial\Omega)$ 型の問題で近似できないことを意味すると思われる。

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon < |x| < 1\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} D$$

$$\partial\Omega_\varepsilon = \{x \mid |x| = \varepsilon\} \cup \{x \mid |x| = 1\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \partial D$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & u_r|_{r=1} = u|_{r=1} = 0, \\ \underline{u_r|_{\varepsilon=r} = \theta \text{ (定数)}}, & u|_{r=\varepsilon} = 1. \end{cases}$$

とあって, radial solution を求める.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{4}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + (\dots) \Delta (\dots) \quad T=0 \text{ から,}$$

$$\begin{cases} u^{(4)} + \frac{4}{r} u^{(3)} = 0 & \text{を計算する.} \\ u'(1) = u(1) = 0 \\ u'(\varepsilon) = 0, \quad u(\varepsilon) = 1 \end{cases}$$

$$u(r) = \frac{a(\varepsilon, \theta)}{r} + b(\varepsilon, \theta) r^2 + c(\varepsilon, \theta) r + d(\varepsilon, \theta)$$

$$a(\varepsilon, \theta) \sim -\theta(1-\varepsilon)^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon) \rightarrow 0$$

$$b(\varepsilon, \theta) \sim 1 + \varepsilon \theta - 2\varepsilon^2 \theta + O(\varepsilon) \rightarrow 1$$

$$c(\varepsilon, \theta) \sim -2 - \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)\theta + 4\varepsilon^2\theta - 2\varepsilon\theta + O(\varepsilon) \rightarrow -2$$

$$d \rightarrow 1.$$

$$\text{故に, } u_{\varepsilon, \theta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(r) = r^2 - 2r + 1 = (1-r)^2$$

これは θ に依らない.

例3. $\mathbb{R}^3$ で Δu を扱うのは原点で trace を与えたためである. Δ で領域を倒して見るとどうか.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varepsilon < |x| < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \\ u|_{r=\varepsilon} = 1. \end{cases} ; \begin{cases} u'' + \frac{2}{r} u' = 0 \\ u(1) = 0 \\ u(\varepsilon) = 1 \end{cases}$$

$$u(r) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (\text{各点で})$$

これらの例から, $(\Omega, \partial\Omega)$ 型の問題の limit としてはとらえにくいと思われる. そこで $A(D)$ を定係数楕円型作用素として, その主部 (m 階) を $A_m(D)$ とするとき, $A_m(D)u=0$, $x \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ の原典付近のふるまいをみることにする.

② $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ を仮定する.

ある微分作用素 $Q(D)$ が存在して,

$$A_m(D)u = Q(D)\delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

$$A_m(D)E = \delta \quad \text{とするならば, } u = Q(D)E + U \quad (A_m(D)U=0).$$

したがって特異性は elementary solution の微分 $Q(D)E$ による. それはよく知られているように r についていえば,

$O(r^{-p})$ あるいは, $O(r^p \log r)$ である.

命題. $p(x, D)$ を $\mathbb{R}^n$ の classical ΦDO_p とする. (C^∞ 係数).

(1) $p(x, D)\delta \in \mathcal{S}'$ かつ $\text{sing supp } p(x, D)\delta = \{0\}$.

(2) $p(x, D)\delta \sim f_0(\omega)r^{-m-n} + f_1(\omega)r^{-m-n+1} + \dots$

i.e.

$$\left[p(x, D)\delta - \sum_{j=0}^{N-1} f_j(\omega)\Phi_{j-n}(r) \right] = O(\Phi_{N-n}(r))$$

ただし, $\Phi_{j-n}(r)$ は $\text{const} \times r^{m_j}$ の逆

Fourier 変換. ここで m_j は $p(x, D)$ の漸近展開の項の次数.

がわかる.

補題. $a(w)$ は S^{n-1} 上の C^∞ 関数, $x' = x/|x|$ とする.

このとき

$$\int_{S^{n-1}} \frac{a(w) dw}{(x'w + i0)^{n+j}}, \quad \int_{S^{n-1}} a(w) \log |x'w| dw$$

$$\int_{S^{n-1}} a(w) (x'w)^j \log |x'w| dw, \quad \int_{S^{n-1}} a(w) Y(xw) dw$$

$$\int_{S^{n-1}} a(\xi') \delta^{(j)}(x\xi') d\xi'$$

はすべて 0 次同次の $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ 関数である.

命題の証明は省略する. r による $\log r$ の $\frac{\partial}{\partial x_i}$ の逐次微分
を考慮することにより, $A(D)u = 0 \checkmark_{x \neq 0}$ の特異性は $\neq$

奇数次元のとき

$$(1) \quad u(x) \sim a_{-p}(w) r^{-p} + \dots + a_{-1}(w) r^{-1} + a_0(w) + a_1(w) r + \dots + O(r^2)$$

偶数次元のとき,

$$(2) \quad u(x) \sim a_{-p}(w) r^{-p} + b_{-p}(w) r^{-p} \log r + \dots + a_q r^q \log r + b_q r^q + O(r^{q+1}).$$

従って, $(\Omega, \partial\Omega)$ のときの $C^\infty(\bar{\Omega})$ に相当する関数空間は考
えられない. それゆえ "transmission property" を翻訳するこ
とも無理かもしれないが次のことは考えられる.

原点での特異性が $\log r$ を含まず r の中にかぎられている
(1) の右辺の ような関数は微分作用素に対して閉じている. D
は $\pm D0$ について閉じているか?

つまり, $p(x, D)$ m 次 $\square D O$. 楕円型.

$$f(x) \sim a(\omega) r^{*p} + O(r^{*p+1}) \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$p(x, D) u = f(x)$$

$$\Rightarrow u(x) \sim b(\omega) r^{*q} + O(r^{*q+1}) \quad ?$$

空間次元が奇数ならば成立することが予想される. ただし,

$$p_j(x, -\xi) = (-1)^{m_j} p_j(x, \xi) \text{ を仮定する.}$$

Sternin [] に, Sobolev space の枠の下で A priori 評価と index が有限になるような境界条件が述べられている.

上述のことからすぐわかることを注意しておく.

$p(x, D)$ m 階 楕円型 とする.

$$p(x, D) u = 0 \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$

ならば, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ の中で最も特異性の弱いのは, $O(r^{m-n})$.

C^∞ -modulo で考えると, Null space の次元は特異性を

$O(r^k)$ と指定すると

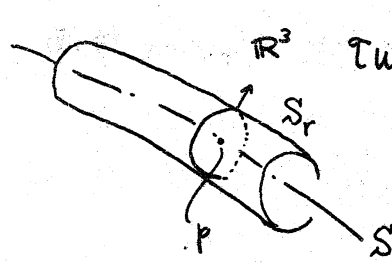
$$k > m-n \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0 \pmod{C^\infty}$$

$$k \leq m-n \quad \Rightarrow \quad \dim \left\{ Q(D); \deg Q(D) \leq m-n-k \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{の微分作用素} \\ = \ell(m-n-k) \end{array} \right\}$$

$$\ell(0) = 1, \quad \ell(1) = n+1, \quad \ell(2) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

ゆえに, ① $\ell(m-n-k)$ 次元の自由度をなくすだけの条件が得る.

- ② 境界条件を $B(x,0)u|_S$ の形にすると, trace をとる必要がある, $Bu = \bigcirc (1) \quad r \rightarrow 0$ より悪い挙動をすると trace がとれない. $m-n \geq k > \frac{m-n}{2} > 0$ が要求される. $(\Omega, \partial\Omega)$ の Lopatinskiï 条件に対応するものは求まる.
- ③ 境界条件を重DO (積分作用素) にすれば, S における特異性を滑らかにして trace をとることが出来る. しかしこれは local op. でない. 境界作用素として



$$Tu(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r(p)} \frac{\partial u}{\partial n} dS_r(p)$$

の向きがどれ位使えるかは検討中である.

文 献

- [1] Boutet de Monvel ; Comportement d'un opérateur pseudo différentiel sur une variété à bord
J. Anal. Math. 17 (1966)
- [2] — ; Boundary problems for pseudo-differential operators Acta Math. (197) 11-51
- [3] Fujiwara, D ; A relative Hodge decomposition
- [4] Sternin, B. Elliptic and parabolic problems on manifolds with a boundary consisting of components of various dimensions (はんやぐ)
Soviet Math. Dokl. 8 (1967) 41-45.