

## ジーゲル保型形式のヘッケ作用素に関する 2, 3 の話題

室工大工 桂田 英典 (Hidenori Katsurada)

このノートでは、ジーゲル保型形式のヘッケ作用素に関する話題のうち、フーリエ係数と関連するいくつかのよく知られている事実を解説する。

### §1. ヘッケ級数

この節において、ヘッケ環に係数をもついくつかの形式的巾級数（これらをヘッケ級数と総称する）の有理性について論ずる。以下、記号を用意する。

$$GSP_n^+(\mathbb{Q}) = \{ M \in GL_{2n}(\mathbb{Q}) ; \text{ある } \mu(M) > 0 \text{ が} \\ \text{存在して } {}^t M J_n M = \mu(M) J_n \},$$

$$\text{ただし } J_n = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta^n(N) = \{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GSP_n^+(\mathbb{Q}) \cap GL_{2n}(\mathbb{Z}_N) ; \\ C \in NM_n(\mathbb{Z}_N) \}$$

ただし、 $\mathbb{Z}(N) = \left\{ \frac{b}{a} ; a, b \in \mathbb{Z} \quad (a, N) = 1 \right\}$ 。

$$\Gamma_0^m(N) = \Delta^m(N) \cap SL_{2m}(\mathbb{Z})。$$

さて、 $H^m(N)$  をヘッケ対  $(\Delta^m(N), \Gamma_0^m(N))$  の  $\mathbb{C}$  上のヘッケ環、素数  $p$  ( $p \nmid N$ ) に対して  $H_p^m(N)$  をヘッケ対  $(\Delta^m(N) \cap GL_{2m}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]), \Gamma_0^m(N))$  の  $\mathbb{C}$  上のヘッケ環とする。

$$H^m(N) = \bigotimes_{p \nmid N} H_p^m(N)$$

である。正の整数  $d_1, \dots, d_n, e$  で  $d_i \mid d_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ )

$(e, N) = 1, (d_i, N) = 1$  を満たすものに対して  $H^m(N)$  の元

$T(d_1, \dots, d_n; e)$  を

$$T(d_1, \dots, d_n; e) = \Gamma_0^m(N) \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_n & \\ & & & e d_1^{-1} \\ & & & & e d_n^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_0^m(N)$$

で定義する。とくに、素数  $p$  ( $p \nmid N$ ) に対して

$$T_i(p) = T(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i; p^2)$$

とおく。また  $(m, N) = 1$  なる正の整数  $m$  に対して

$$T(m) = \sum_{d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n \mid m} T(d_1, \dots, d_n; m)$$

とおく。このとき  $p \nmid N$  なる素数  $p$  に対して

$$H_p^m(N) = \mathbb{C}[T(p), T_i(p) \quad (0 \leq i \leq m)]$$

であり、さらに algebra isomorphism

$$\Omega_p: H_p^m(N) \cong \mathbb{C}[X_0^\pm, \dots, X_m^\pm]^{W_m} \quad (\text{Satake 同型})$$

が存在する。ここで  $W_m$  は  $Sp_m$  のワイル群を表す。

さて我々は  $T(p^r)$  ( $r \geq 1$ ) を  $T(p)$ ,  $T_i(p)$  によって具体的に書き表すことを問題にする。これは  $n=1$  のときはよく知られていることであるが  $n \geq 2$  のときには一般にはそうではない。そこで次のような  $H_p^n(N)$  に係数をもつ形式的中級数

$$F_p^n(t) = \sum_{d=0}^{\infty} T(p^d) t^d$$

を導入し、その有理性および分母・分子の形について考える。これについては一般に次の結果が知られている。

(( Andriamar [2] ))  $F_p^n(t)$  は  $t$  の有理関数で

$$F_p^n(t) = \frac{P_p^n(t)}{Q_p^n(t)}$$

と表される。ここで  $P_p^n(t), Q_p^n(t) \in H_p^n(N)[t]$  で  $\deg P_p^n(t) = 2^n - 2$  かつ

$$\tilde{\Omega}_p(Q_p^n(t)) = (1 - x_0 t) \prod_{l=1}^n \prod_{1 \leq i_l < \dots < i_r \leq n} (1 - x_0 x_{i_l} \dots x_{i_r} t)$$

ここで  $\tilde{\Omega}_p$  は前に述べた同型  $\Omega_p$  を  $H_p^n(N)[[t]]$  から  $\mathbb{C}[x_0^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]^W[[t]]$  への同型に拡張したものである。

$n=1$  のときはよく知られているように

$$F_p(t) = \frac{1}{1 - T(p)t + T_1(p^2)t^2}$$

となる。  $F_p^m(t)$  の具体的な形は現在のところ  $m=1, 2, 3$  のときしか与えられていない。<sup>1)</sup>

また、Böcherer は 次のようなヘツケ級数

$$G_p^m(t) = \sum_{d_1 | d_2 | \dots | d_m} T(d_1, \dots, d_m; 1) t^{d_1 + \dots + d_m}$$

についてその具体的な形をもとめた。

(( Böcherer [7] ))

$$\tilde{\Omega}_p(G_p^m(t)) = \frac{1-t}{1-p^m t} \prod_{i=1}^n \frac{(1-p^{2i} t^2)}{(1-x_i p^m t)(1-x_i^{-1} p^m t)}$$

## §2. Žarkovskaya の関係式

この節では、ヘツケ作用素の固有値とフーリエ係数の関係を述べた Žarkovskaya の関係式およびそれに関連する話題を述べる。  $\chi$  を  $\text{mod } N$  のディリクレ指標で  $\chi(-1) = (-1)^k$  とする。  $M_k^N(N, \chi)$  を  $\Gamma_0^N(N)$  に対する重さ  $k$ , 指標  $\chi$  のジークル保型形式の空間とする。 とくに  $N=1$ ,  $\chi$  trivial のとき  $M_k^N(N, \chi) = M_k^N$  と表す。  $H^m(N)$  の元  $T$  の  $F(Z)$  への作用  $F|_k \chi T$  をよく知られている方法で定義する。

$$F(Z) = \sum_A C(A) \exp(2\pi i \operatorname{tr} AZ)$$

を  $F(Z) \in M_{\mathbb{R}}^m(N, \chi)$  のフーリエ展開とする。  $F(Z)$  が  $H^m(N)$  のすべての元の同時固有関数<sup>2)</sup>とし、  $T \in H^m(N)$  に対して  $F|_{\mathbb{R}\chi} T = \lambda(T) F$  とおく。とくに  $m$  が正の整数のとき  $\lambda(m) = \lambda(T^m)$  とおく。古典的には、ヘッケ作用素の同時固有関数とフーリエ係数の間には密接な関係があった。すなわち、上の仮定のもとで  $(\ell, m) = 1, (\ell, m) = 1$  なるすべての  $\ell$  に対して

$$C(\ell m) = \lambda(\ell) C(m) \quad (*)$$

$m \geq 2$  のときは一般にはこのような簡明な関係式は存在しないが、ヘッケ級数と同時固有関数のフーリエ係数からなるある中級数の間に関係が存在する。これが Zarkovskaya の関係式である。これを説明する。  $F(Z) \in M_{\mathbb{R}}^m(N, \chi)$  を上の通りとするとき、中級数  $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda(p^i) t^i$  は  $t=0$  の近くで収束する中級数で

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda(p^i) t^i = \frac{P_{p,F}^m(t)}{Q_{p,F}^m(t)}$$

と表される。ただし、  $Q_{p,F}^m(t)$  は前節で定義した多項式

$$Q_p^m(t) = \sum_{i=0}^{2^m} q_i t^i \quad (q_i \in H_p^m(N)) \quad \text{に対して}$$

$Q_{p,F}^m(t) = \sum_{i=0}^{2^m} \lambda(q_i) t^i$  とおいたものである。  $P_{p,F}^m(t)$  も同様に定める。このとき

(( Zarkovskaya [12] )) 定義、仮定は上の通りとする。  
 $B$  を  $n$  次正定値 half integral かつ  $(B, p) = 1^{(3)}$  とする。  
 このとき形式的中級数  $\sum_{i=0}^{\infty} C(p^i B) t^i$  は  $t=0$  の近くで収束し

$$\sum_{i=0}^{\infty} C(p^i B) t^i = \frac{P_{p, FB}^m(t)}{Q_{p, F}^m(t)}$$

となる。ここで  $P_{p, FB}^m(t)$  は ( $B$  に依存する)  $t$  の多項式  
 で  $\deg P_{p, FB}^m(t) \leq 2^m - 2$ 。

$n=1$  のとき (\*) より  $p \nmid N$  のとき  $(m, p) = 1$  なる

すべての  $m$  について

$$\sum_{i=0}^{\infty} C(p^i m) = \frac{C(m)}{1 - \lambda(p)t + p^{k+1} \chi(p) t^2}$$

である。 $n \geq 2$  のとき  $P_{p, FB}(t)$  を具体的に求めることは非常に難しい問題であると思われる。 $k$  が偶数  $k > n+1$  のとき

重さ  $k$ 、次数  $n$  のジーゲル Eisenstein series  $E_k(Z)$   
 $= \sum_{c, D} |cZ + D|^{-k}$  は  $M_k^n$  の元で すべての  $T \in \text{He}_k^n(N)$  の同時固有関数であり、Zarkovskaya の関係式から  $(B, p) = 1$  のとき

$$\sum_{i=0}^{\infty} C(p^i B) t^i = \frac{P_{p, FB}(t)}{(1-t) \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (1 - p^{\sum_{j=1}^r (B - i_j)} t)}$$

が得られる。しかし、この場合は、もう少し詳しい結果が得られる。

(( Kitaoka [9] ))

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^i B) t^i = \frac{\tilde{P}_{F,P,B}(t)}{\prod_{j=0}^n (1 - p^{j(j+1)/2} t)}$$

ただし  $\tilde{P}_{F,P,B}(t)$  は  $t$  の多項式で  $\deg \tilde{P}_{F,P,B}(t) \leq n-1$ .

### §3. ゼータ関数とデイリクレ級数

$n=1$  のとき 前節で述べた固有値とフーリエ係数の関係は、同時固有関数に付随するあるゼータ関数とデイリクレ級数の関係としても定式化できる。ここではその拡張について述べる。  $F(Z) = \sum c(A) \exp(2\pi i \operatorname{tr} AZ) \in M_b^m(N, \chi)$  をすべての  $T \in H^m(N)$  の同時固有関数とし、 $F$  の (Spinor) ゼータ関数  $\zeta(s, F)$  を

$$\zeta(s, F) = \prod_{P \times N} Q_{P,F}(P^{-s})$$

で定義する。  $n=1$  のとき (\*) から

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}}^{\infty} c(m) m^{-s} = c(1) \zeta(s, F)$$

である。このことの  $n=2$  への拡張を考える。  $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$  を2次の正定値, half integral 行列とし、 $\Delta = b^2 - 4ac$  とおく。また

$$H(\Delta) = \left\{ A_i = \begin{pmatrix} a_i & \frac{b_i}{2} \\ \frac{b_i}{2} & c_i \end{pmatrix} ; A_i \text{ half integral } b_i^2 - 4a_i c_i = \Delta \right\} / \text{properly equivalence}$$

とする。  $d$  を  $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$  の判別式、 $\ell = \sqrt{\Delta/d}$  とし、 $O_\ell$  を conductor  $\ell$  の  $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$  の order とするとき、 $H(\Delta)$  はガウス

積に関してアーベル群をなし、さらに  $\mathcal{O}_L$  のイデアル類群  $I(\Delta)$  と同型である:  $\varphi: H(\Delta) \cong I(\Delta)$ 。また  $\check{H}(\Delta), \check{I}(\Delta)$  をそれぞれ  $H(\Delta), I(\Delta)$  の指標群とする。以下しばしば  $H(\Delta)$  と  $I(\Delta)$ , および  $\check{H}(\Delta)$  と  $\check{I}(\Delta)$  を同一視する。  $\eta \in \check{H}(\Delta)$  に対して  $L$  関数

$$L_{\text{def}}(s, \eta) \text{ を } L_{\text{def}}(s, \eta) = \prod_{\mathfrak{f}} (1 - \chi(N(\mathfrak{f})) \eta(\mathfrak{f}) N(\mathfrak{f})^{-s})^{-1}$$

で定義する。ここでは  $\mathcal{O}_L$  のすべての素イデアルでそのノルム  $N(\mathfrak{f})$  が  $N$  でわりきれないものすべてを走る。また  $\mathfrak{f}$  は  $\mathfrak{f}$  のイデアル類を表す。  $n$  次正定値 half integral 行列  $B$  と

$F(Z) = \sum C(A) \exp(2\pi i \text{tr} AZ) \in M_{\mathbb{R}}^n(N, \chi)$  に対して、ディリクレ級数  $D(S, B, F)$  を

$$D(S, B, F) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m, N)=1}}^{\infty} \frac{C(mB)}{m^S}$$

で定義する。

(Andrianov [3], Evdokimov [8])

$F(Z) \in M_{\mathbb{R}}^2(N, \chi)$  を  $H^2(N)$  の同時固有関数とするとき  $a|N^\alpha$  なるすべての  $a$  と  $\eta \in \check{H}(\Delta)$  に対して

$$\sum_{\bar{A}_i \in H(\Delta)} \eta(\bar{A}_i) D(S, aA_i, F)$$

$$= \sum_{\bar{A}_i \in H(\Delta)} \eta(\bar{A}_i) \sum_{\substack{u|v|N \\ (u, N)=1 \\ (v, N)=1}} \frac{\chi(u^2) M(u) M(v)}{u^{S-2R+3} v^{S-R+2}} \ll \left( \frac{v}{u} \right)^{\frac{1}{2}} \zeta(\bar{A}_i)$$

が  $\text{Re } S > 2R+1+\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) なる  $S \in \mathbb{C}$  で成立する。 <

に  $F$  が cusp form のときは  $\operatorname{Re} s > k+1+\varepsilon$  で成立する。  
 ただし  $M$  は  $X$ -ビウス関数で  $\gamma$  は  $I(\Delta)$  から  $I(\Delta x^{-2}v^2)$   
 への自然な準同型。

この結果より  $\zeta(S, F)$  の meromorphy および関数等式が  
 証明される。<sup>4)</sup> また上の結果より  $k \geq 4$  ならば  $H^2(1)$  の  
 同時固有関数  $F \in M_k^2$  は固有値 および  $\{C(A); A \text{ は}$   
 $\text{primitive, 正定値, half integral}\}$  によって一意に決ることが  
 わかる。しかし固有値のみによって (up to constant に)  
 決るかどうかという いわゆる "multiplicity one  
 condition" が成立するかどうかはわかっていない。 $\zeta(S, F)$   
 と  $D(S, B, F)$  の関係については現在のところ  $n=2$  の  
 場合しか明快な結果は得られていない。

一方これとは別のゼータ関数とあるディリクレ級  
 数の間には一般の  $n$  について次のような関係が知られてい  
 る。まず多項式  $R(x_0, \dots, x_n, t) = \prod_{i=1}^n (1-x_i t)(1-x_i^2 t)$   
 は  $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]^{W_n}[t]$  の元であるから  $p \nmid N$  のときある多項式  
 $R_p(t) = \sum_{i=0}^{2n} r_i t^i \in H_p^n(N)$  が存在して  $\tilde{\omega}_p(R_p(t)) =$   
 $R(x_0, \dots, x_n, t)$  となる。 $F \in M_k^n(N, \chi)$  を  $H^n(N)$  の同時固有  
 関数とすると  $R_{p,F}(t) = \sum_{i=0}^{2n} \lambda_i(n) t^i$  とおく。このとき  
 $\zeta^+(S, F)$  を

$$\zeta^+(s, F) = \prod_{p \nmid N} R_{p, F}(\chi(p) p^{-s})$$

で定義する。また、 $n$  次正定値、half integral 行列  $A_0$  に対して

$$B_p(s, A_0) = \frac{1 - p^{-2s} \chi(p^2)}{1 - p^{-s} \chi(p)}$$

$$\times \begin{cases} (1 - \chi_{A_0}(p) \chi(p) p^{-s}) \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (1 - p^{-2i-2s} \chi(p^2)) & n \text{ 偶数} \\ \prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} (1 - p^{-2i-2s} \chi(p^i)) & n \text{ 奇数} \end{cases}$$

とおく。ただし  $\chi_{A_0}$  は  $A_0$  に対応する二次形式の sign を表す。

(( Andrianov [4] ))  $2A_0 \in GL_n(\mathbb{Z})^{(6)}$  のとき

$$\sum_{\substack{M \in GL_n(\mathbb{Z}) \setminus M_n(\mathbb{Z}) \\ \det M > 0 \\ (\det M, N) = 1}} \frac{C(MA_0^t M)}{(\det M)^s} = C(A_0) \prod_{p \nmid N} B_p(s - \frac{n}{2}, A_0) \zeta^+(s - \frac{n}{2}, F)$$

注

- 1)  $n = 2$  のとき Shimura [10],  $n = 3$  のとき Andrianov [1]。
- 2) 以下  $H^n(N)$  の元  $T$  と  $T$  の  $M_n(\mathbb{Q}(\chi))$  への作用  $|_{A_0} \chi T$  を同一視する。
- 3) half integral 行列  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  に対して  $(b_{ii} \ (1 \leq i \leq n) \quad 2b_{ij} \ (1 \leq i < j \leq n), p) = 1$  のとき  $(B, p) = 1$  と表す。

4) Andrianov [3].

5)  $\zeta^+(S, F)$  の meromorphy, および関数等式については Shimura [11], Andrianov-Kamlin [5], Böcherer [6] を参照せよ。

6) 実際はこの仮定はとり除かれるか。結果はやや複雑になる。

### Reference

[1] A. N. Andrianov, Shimura's conjecture for Siegel modular group of genus 3, Soviet Math. Dokl. vol. 8 No. 6 (1967) 1474 - 1478

[2] \_\_\_\_\_, Spherical functions for GL<sub>n</sub> over local fields and summation of Hecke series, Math. USSR Sb. 12, No 3, (1970) 429-452

[3] \_\_\_\_\_, Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of degree 2, Proc. Steklov Inst. Math. 112 (1971) 70-93

[4] \_\_\_\_\_, Euler expansions of theta transforms

- of Siegel modular forms of degree  $n$ , Math. USSR Sb. 34 No 3, (1978) 259-300
- [5] A.N. Andrianov and V.L. Kanihin, On analytic properties of standard zeta functions of Siegel modular forms, Math. USSR Sb. 35 No 1, (1979) 1-17
- [6] S. Böcherer, Über die Funktionalgleichung automorpher  $L$ -Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe, J. reine angew. Math. 362 (1985) 146-188
- [7] ———, Ein Rationalitätssatz für formale Hecke-Reihen zur Siegelschen Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 56 (1986) 35-47
- [8] S.A. Evdokimov, Euler products for congruence subgroups of the Siegel group of genus 2, Math. USSR Sb. 28 (1976)
- [9] Y. Kitaoka, Local densities of quadratic forms and Fourier coefficients of Eisenstein series, Nagoya Math. J. 103 (1986) 144-160
- [10] G. Shimura, On modular correspondences for  $Sp(n, \mathbb{Z})$  and their congruence relations, Proc Natl. Acad. Sci. USA 49 No 6, (1963) 824-828
- [11] ———, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. Lond. Math. Soc. III Ser. 31 (1975) 79-98

- [12] N.A. Žarkovskaya, On the connection between the eigenvalues of Hecke operators and the Fourier coefficients of eigen functions for Siegel's modular forms of genus  $n$ . Math. USSR Sb. 25 (1975)