

非線形格子に於ける波の伝播

法政大 教養 左 岡 一

§ 1. 序

非線形格子に於ける波の伝播の問題は物理学に於いて多くの意味ある対象であるが、その一つは熱伝導の問題である。Visseren¹⁾は質量、異質、に不純物粒子を含む無秩序格子 (disordered lattice) に非線形相互作用をもつときの熱伝導係数を計算機実験から求めることを試みている。彼らは中心力と非中心力を持つてなされた2次元格子 (10×50) で、各最隣接粒子間に

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\mu x^3 + \frac{1}{4}\nu x^4$$

のポテンシャルをもつとき、 $\mu = \nu = 0.0$ の調和振動子の場合と $\mu = 0.35$, $\nu = 0.069$ の非調和振動子の場合について熱伝導を計算している。実験の結果は予測に反して一般に無秩序格子に於ける非調和なポテンシャルを含む場合の方が対応する調和振動子の場合よりも熱伝導が大きくなった。理論では非調和項はエネルギー伝播に対する抵抗を与え

熱伝導を小さくすると考えられる。こゝでは Keeschen の実験の説明及び熱伝導の計算機シミュレーションの基礎としてもっと単純なモデルについてこの計算機実験を行い、非線形格子における波の伝播の様子及び不純物粒子の影響を調べる。

2. 非線形格子における局在振動

ポテンシャルが

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\mu x^3$$

と

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\mu x^4$$

で与えられる様な3次, 4次の非調和項を含む各々の場合に調和振動のとき、局在振動に与える影響を調べる。一次元格子で中心に質量の異なる1個の不純物を含む場合に、初期条件として $t=0$ で不純物粒子を変位させ、他の粒子は静止して置くとき、波の伝播をしらべた。この様なときには調和振動子系では不純物粒子が他の粒子より軽い場合には、その粒子のまわりの局在振動を生じ、エネルギーが遠くへほとんど伝播しない。この性質は4次のポテンシャルを含むときにはより強められ、この場合には不純物粒子の質量が他の粒子に等しいときにも局在振動がみられる。これに反し

3 次のポテンシャルのときは局在振動が弱められ、可成りのエネルギーの wave packet の形で安定に遠く迄伝達される。これらのことは上記で与えられるような条件では、4 次の場合には不純物粒子の質量を軽くすると同じような効果を与え、3 次の場合には重くする効果と与えてゐる。3 次のポテンシャルを含む場合にこの変位及び wave packet の挙動を次の節に図示する。

2.3. Wave packet の時間挙動

両端が固定された一次元格子で3 次のポテンシャル ($\mu=0.4$) のとき、波の伝播の様子及びこのときに見られる wave packet の軌跡を調べた。Fig. 1 は粒子数 $N=90$ で30番目の格子点にある重粒子 (質量比2) を置き、 $t=0$ でこの粒子に変位を与えた場合であり、(a) は時間に対する各粒子の変位の様子が示されてゐる。重粒子の如く減衰した変位の左右に大きな wave packet があり、伝播してゆく。これは調和振動の場合にも同様であるが、このときには wave packet の高さが次第に減衰してゆくのに反して、非線形格子では可成り安定な挙動を示す。(b) はこの2つの wave packet の最大値の位置の時間に対する軌跡が示されてゐる。一定の速度で格子中で運動し、両端での反射、2つの packet の衝突

、重粒子との衝突に対しては安定な振舞いとして
 あり、soliton と似た挙動を示している。Fig. 2 は代りに
 軽い粒子 (質量比 0.5) を置いた時で、この場合には軽い粒
 子のまわりの局在振動が生じるが、残りのエネルギーは同様
 に wave packet で左右へ運ばれ、両端で反射した後、局在振
 動の処でも安定に通り抜けるのがみられる。Fig. 3 は
 $N=71$ の homogeneous 系での wave packet の形の時
 間変化及び軌跡を示している。まわりの小さい高振動数
 の波によ、二次的に wave packet の形がくずれてゆき、こ
 のために最大値の位置がずれるが、ほぼ一定の速度の運
 動を示している。実線は一定の速度の運動と見做す軌跡であ
 り、点線が大体の最大値の位置を結んだものである。僅か
 は差のみみられるが、これらの詳細はこれは wave packet の安
 定性とともに更に検討を要することになる。以上の結果は
 Visscher らによ、示唆された様に非調和項によってエネル
 ギーの流れを増加する理由として調和振動子系に於いては
 軽い質量の粒子のところに局在しやすき高振動数のモード
 が非調和項のためにエネルギーを運びやすき低振動数のモ
 ードになるためと思われる。この低振動数のモードは 1, 2
 位の不純物では余り影響されない。wave packet の中と同
 程度の impurity island があれば影響をうけると考えられ

る。

2.4. 今後の問題として

以上の4つあるように非線形格子における熱伝導には soliton like 挙動を示す wave packet の重要な役割を担っており、無秩序格子における熱伝導をシミュレートするためにはこれらの wave packet の安定性, impurity island の大きさの影響について更に調べる必要がある。非調和格子における低振動数のモードの挙動については

Fermi ²⁾ の実験以来多く議論されているところであり、
の再帰現象と Chirikov ³⁾ の β 数 ⁴⁾ による非線形項の入り
はと王 (王王振巾のと王) には運動が random になり熱
平衡に接近するという結果には未だ問題が残されている。

しかしこの gap は一つには各々の実験条件に用いられる格子振動子系への程度まで KdV 方程式の soliton の運動で記述出来るからにあると思う。格子振動子系で初期条件の非線形項 (例えば振巾) を大きくして置くことは KdV 方程式

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$$

で β を小さくすることに対応している。Karpman ⁵⁾ は同じ
初期条件に対して β を小さくしていくと次第に多くの soliton

にわかれることが示した。 Fermi の場合は 9 位。

soliton にわかれる様子をみてみると、もっと大きな非線形にしていくとそこには次第により多くの soliton にわかれ、あるところでは格子系では完全に soliton にわかれしてしまう状態は実現される。ところが生じ、これ以上では random な挙動を示すと考えられる。このことは寧ろ KdV 方程式の $\beta \rightarrow 0$ にしたときにシヨックが生じることに対応しているものと思われる。これらの変は非線形格子の超伝導における低周波数のモードの life time の関連とともに現在検討中である。

文献

- 1) D. N. Peyton, III, M. Rich and W. M. Viatches; Phys. Rev. 160 (1967) 706.
- 2) E. Fermi, J. R. Pasta and S. Ulam; Los Alamos Report No. 1940 (1955).
- 3) F. M. Ismailiev and B. V. Chirikov; Soviet Physics - Doklady 11 (1966) 30.
- 4) N. Ooyama, H. Hirooka and N. Saitô; J. Phys. Soc. Japan 27 (1969) 815.
- 5) Yu. A. Izrael and V. I. Karpman; Soviet Physics JETP 24 (1967) 1049.

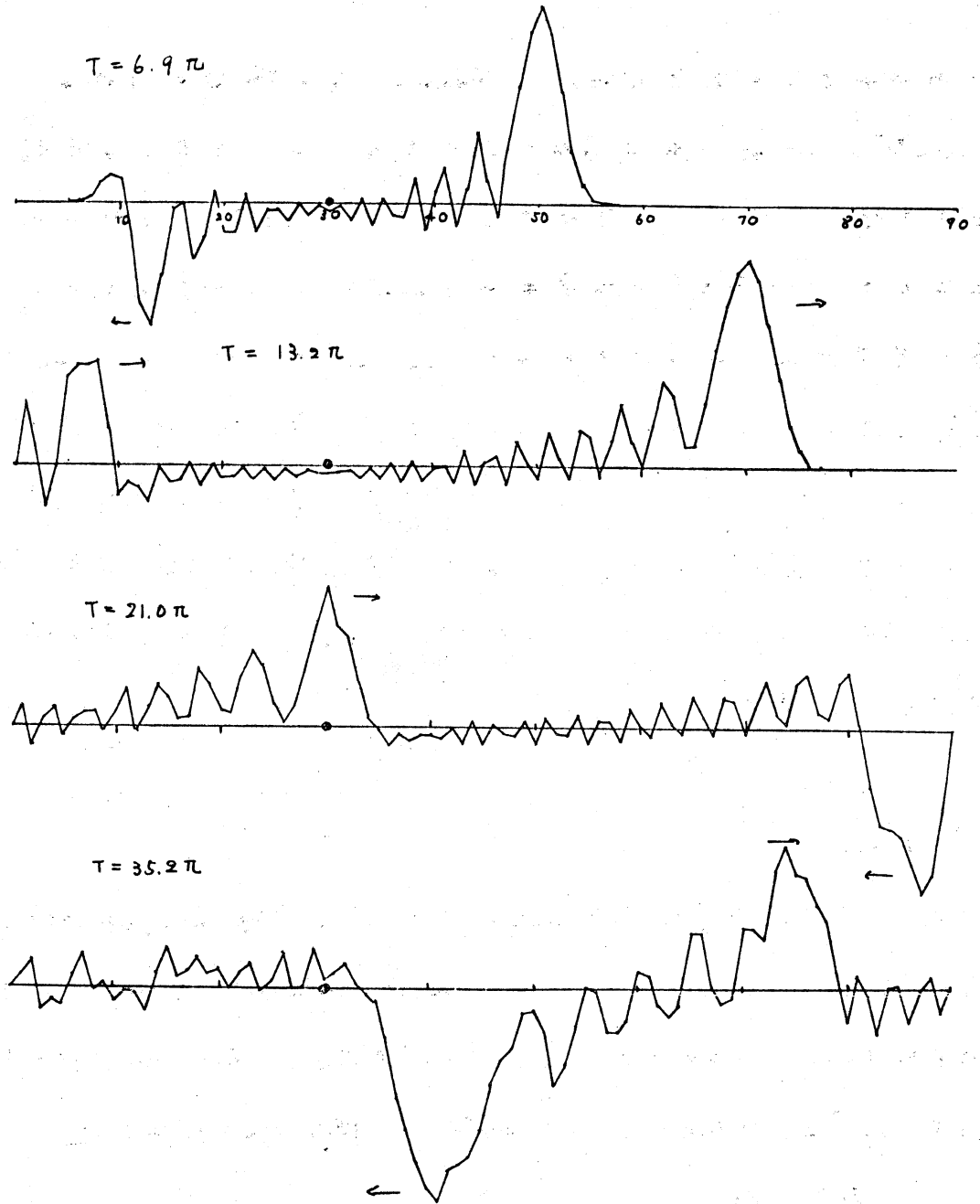


Fig. 1a, $T=0 \sim 30$ 番目の位置。重粒子(質量2)の変位と、隣接格子との波の伝播、縦軸は変位、横軸は格子位置 x 番目 ($N=90, \lambda=0.4$)

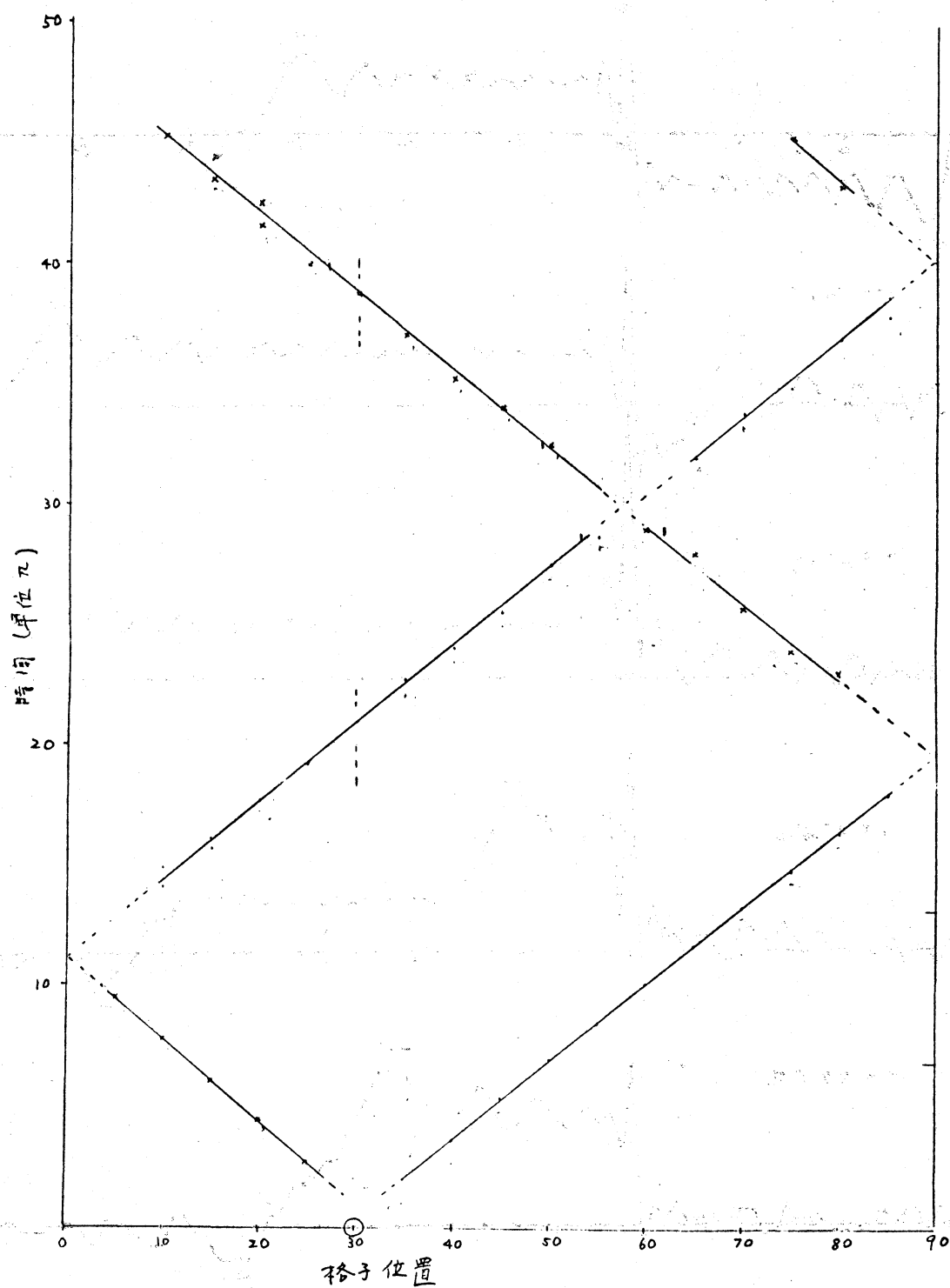
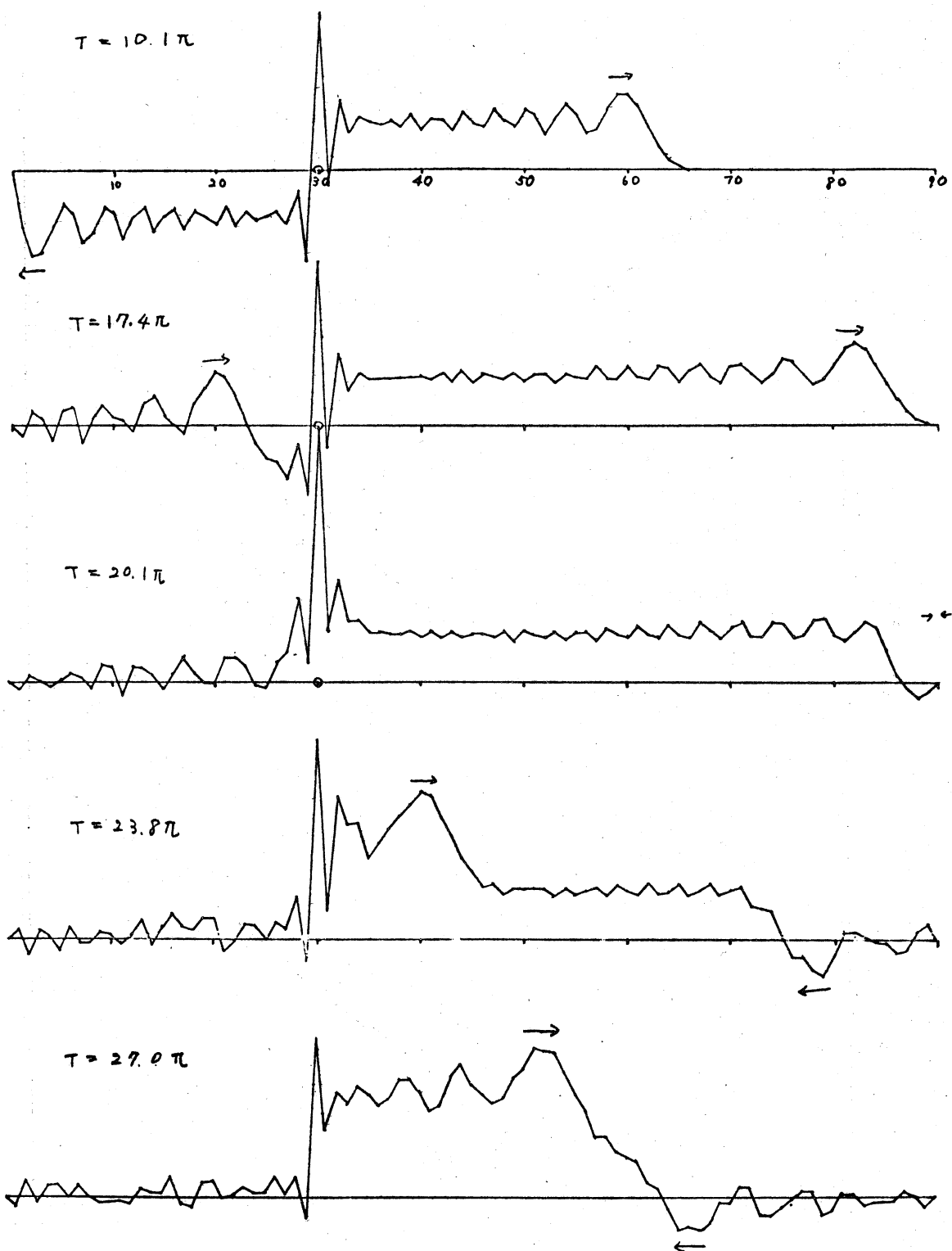


Fig. 1b, Fig 1a に示した 2 つの Wave packet の最大値の格子長軌跡.



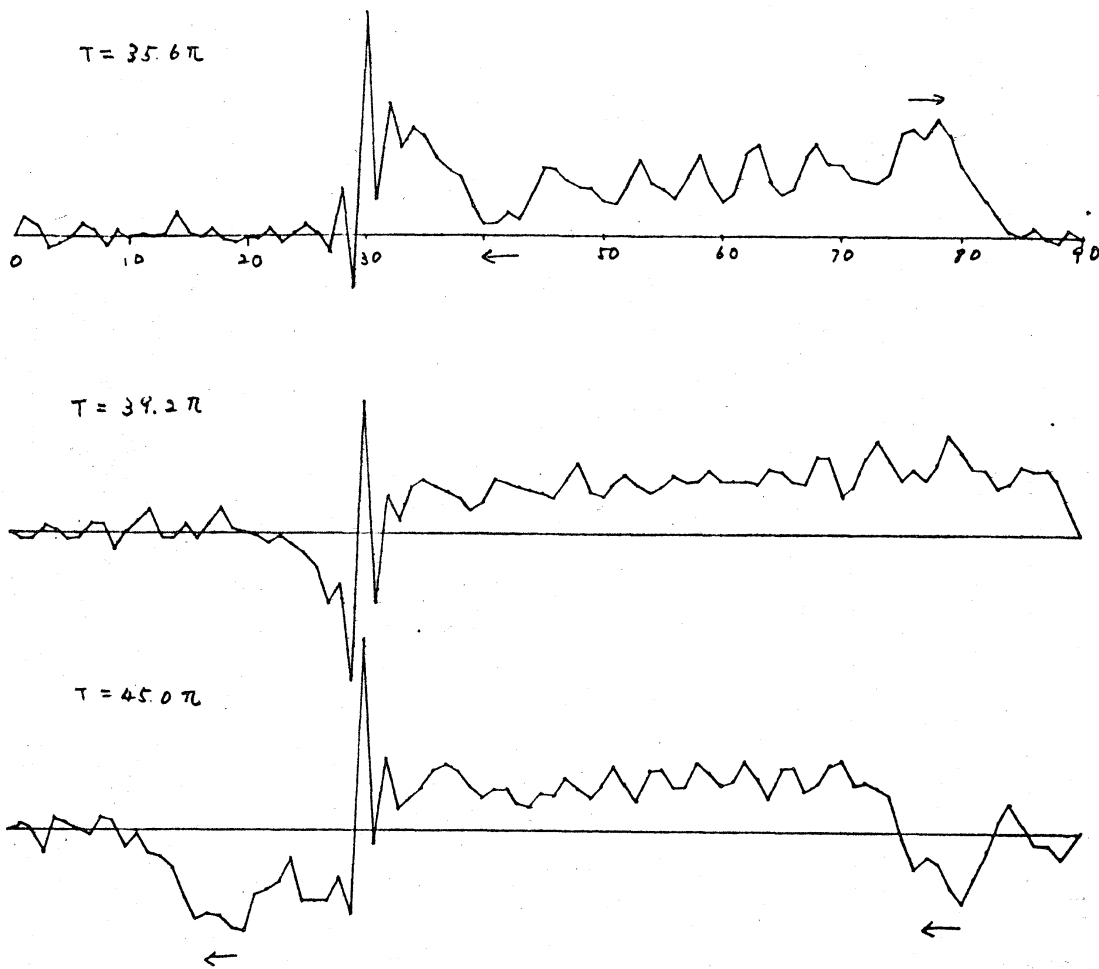


Fig. 2a, $T=0$ での 30 番目の位置の軽い粒子 (質量 0.5) の変位 E と
 離れ E と E の波の伝播, 縦軸は変位, 横軸は格子位置 E 表示
 ($N=90, \lambda=0.4$)

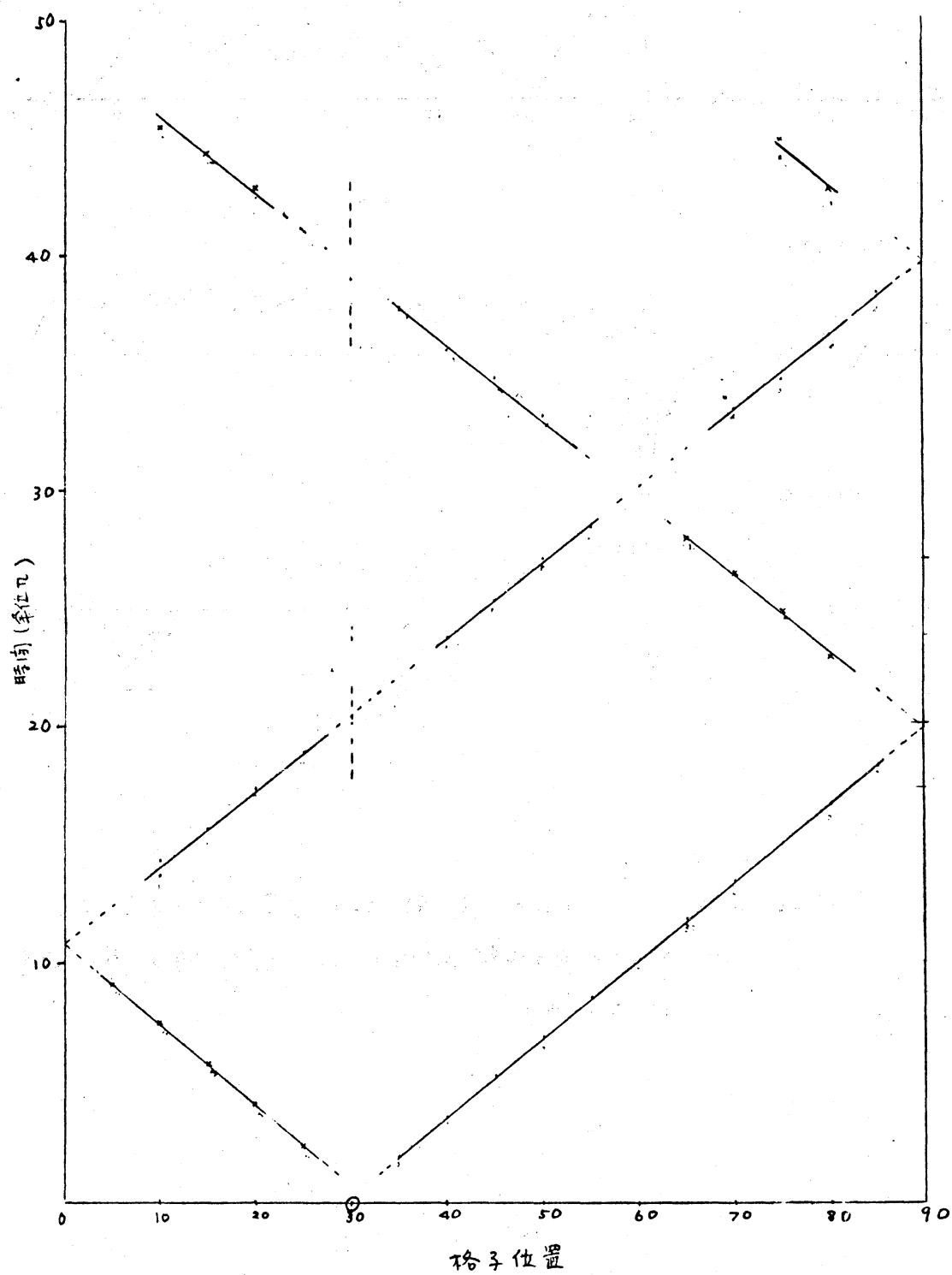
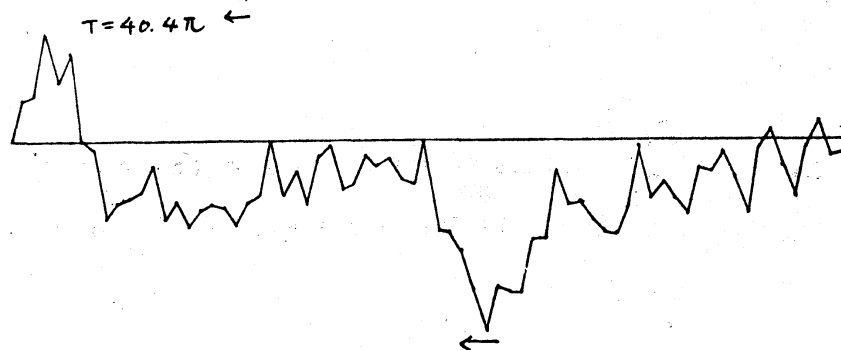
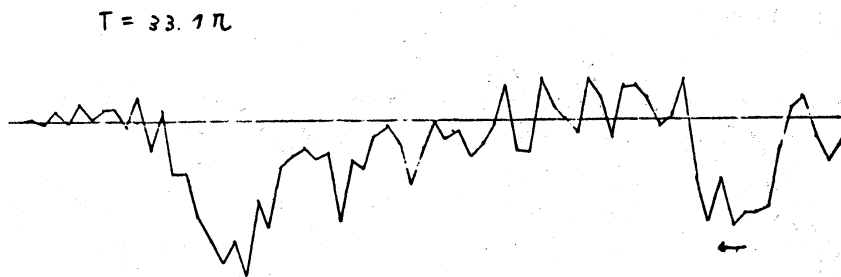
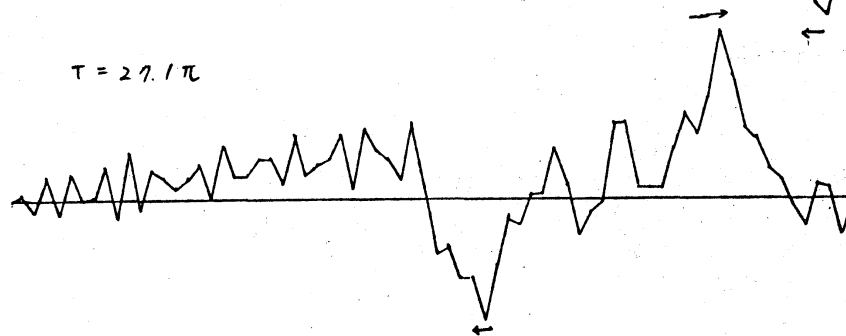
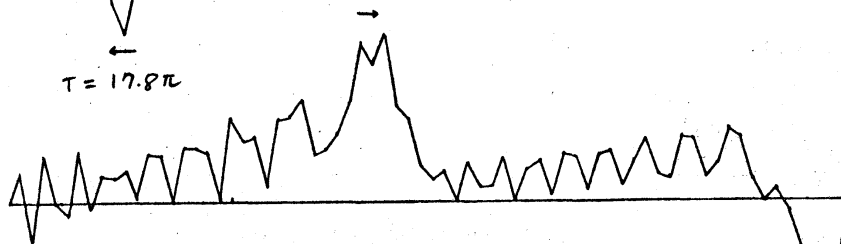
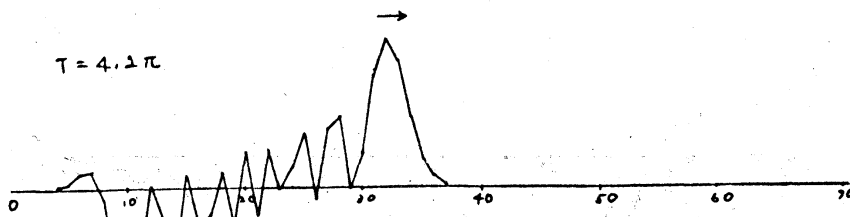


Fig. 2b, Fig. 2a is the trajectory of the wave packet maximum at the lattice position.



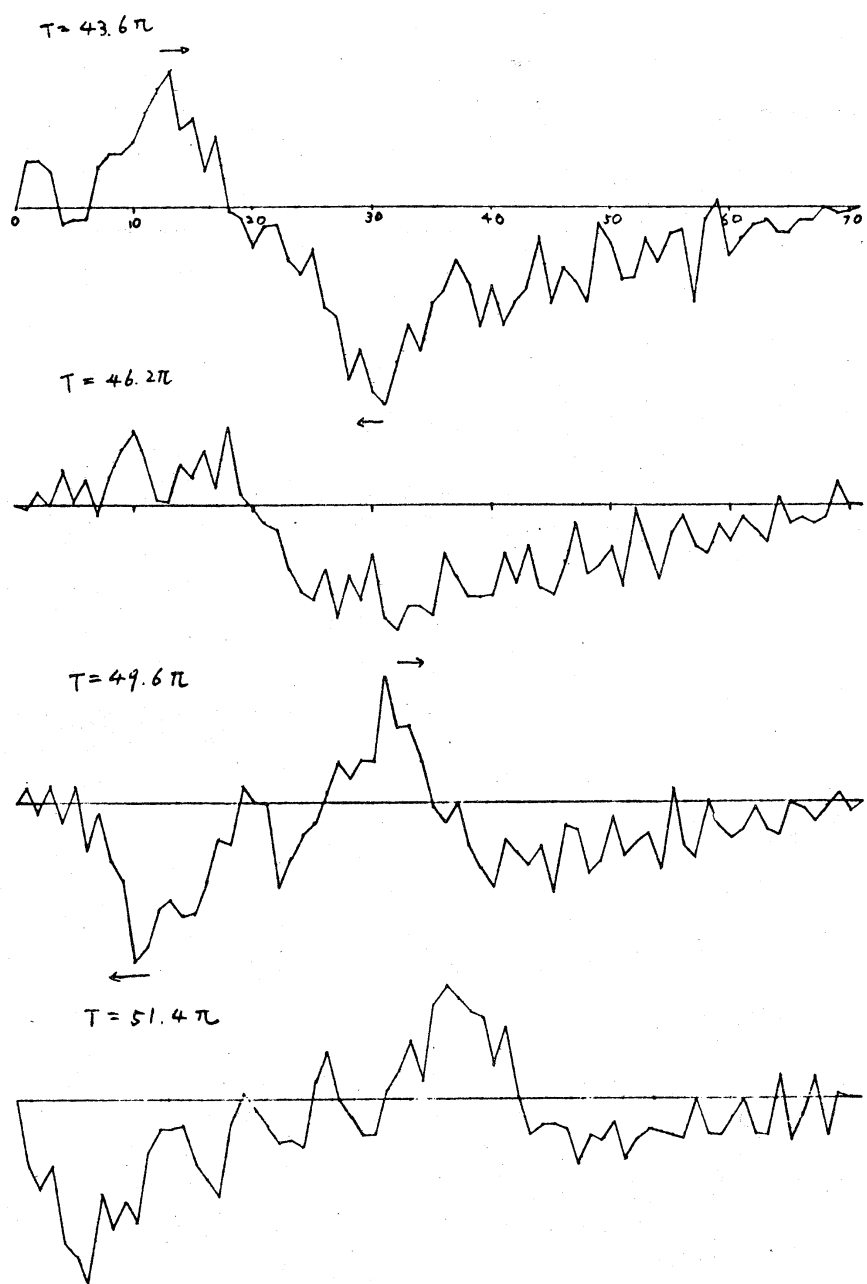


Fig. 3a, homogeneous T 格子 $t=0$ $t=20$ 節目 a 位置
 の粒子 r 変位 E 与之 隣接 1 t t きの波 a 伝播 ($N=71$,
 $\lambda = 0.4$)

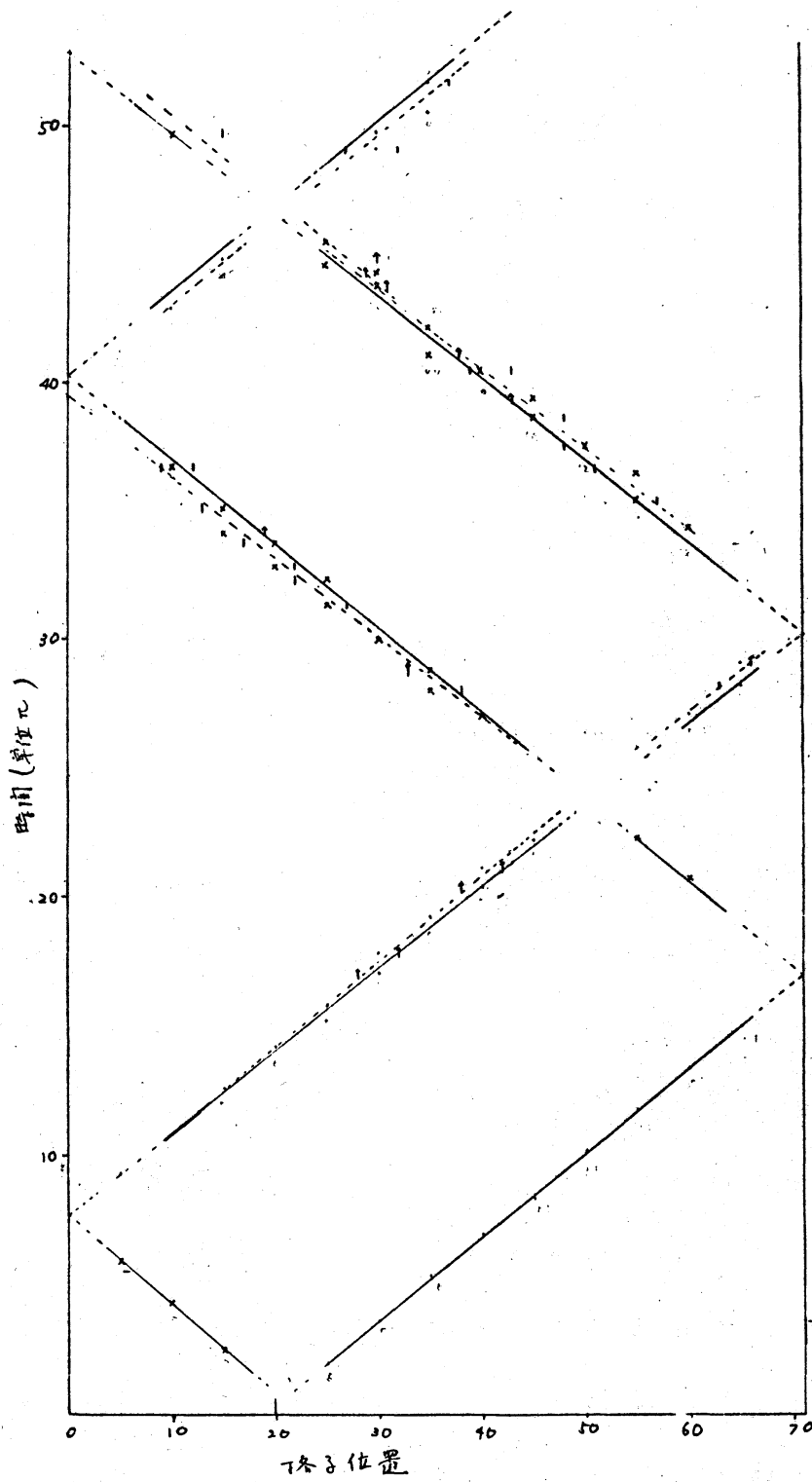


Fig. 3b, Fig 3a 的 2-sin wave packet 之 最不值之位置之軌跡。
(虛線), 實線之一定之速度運動之軌跡。