

液体薄膜シートを伝播する非線形波

阪大・基礎工 吉永隆夫 (Takao YOSHINAGA)

阪大・基礎工 牧野雅臣 (Masaomi MAKINO)

1 はじめに

液体薄膜シートの振る舞いはシート表面の表面張力波の安定性に大きく依存している。そして、この安定性の問題は工業における重要な問題であるだけでなく、流体力学における典型的な問題でもある。

線形ポテンシャル理論から、シート表面での攪乱は対称モードと反対称モードの二種類が可能であり、両モードともシート周囲の流体の影響により、長波長攪乱に対しては線形不安定となることが知られている。[1, 2] ところが、不安定性で攪乱が大きくなった後や、初期に大きな攪乱が与えられたとき、大変形に伴い現れる非線形性のため現象は線形理論での予測とは異なったものとなることが予想される。しかし、このような非線形問題を解析的に解くことは特殊な場合を除いて難しく、一般に数値解法に頼らざるを得ない。最近、Rangel と Sirignano [3] は離散渦法を用いて、このような液体薄膜シートの不安定性により引き起こされるシートの変形や崩壊を調べている。しかし、彼らの解析では渦の配置や個数、渦が近接した場合に現れる不安定性などの離散渦法特有の問題に加え、計算時間が長くなるなどの難点があるため、比較的簡単に現象を統一的に把握できるような方程式の導出が望まれる。

そこで、本研究では、Lee と Wang [4] により用いられた薄膜近似を薄い平面液体シートに適用することにより、比較的簡単な非線形の発展方程式を導出し、シートの大変形にともない顕著に現れる非線形性の効果が安定性にどのような影響を及ぼすかを調べている。特に、対称モードと反対称モード攪乱を初期条件として発展方程式を空間周期条件の下で数値的に解き、得られた結果を離散渦法で得られた結果と比較して薄膜理論の有効性を調べている。また、対称モード攪乱に対して薄膜近似で得られた方程式は簡単な非線形波動方程式に帰着され、その厳密解を求めている。

2 薄膜近似

本節では，Lee と Wang [4] により用いられた薄膜近似を用いて薄膜シートの定式化を行う．図1で示すように，断面を (x, y) 面（単位ベクトルをそれぞれ (x, y) ）にとり，シートは紙面に垂直な方向に無限に広がっているとする．シートの厚さは十分薄いとし，シート厚さにわたって諸量の変化を無視する‘薄膜近似’を導入する．微小長さ δs の要素を通る流線に対して法線方向単位ベクトルを n ，接線方向単位ベクトルを s と取り，要素には表面張力（表面張力係数 σ ）が働くとする．さらに，要素の速度ベクトルと厚さをそれぞれ $v(x, t)$ ， $b(x, t)$ とし， x 軸方向とジェットのなす角を $\theta(x, t)$ ，要素の中心線の y 座標を $\eta(x, t)$ とする．そして， n, s を含むこれらの量はすべて x と t のみの関数と仮定する．かくして問題は，以下のように定式化される：

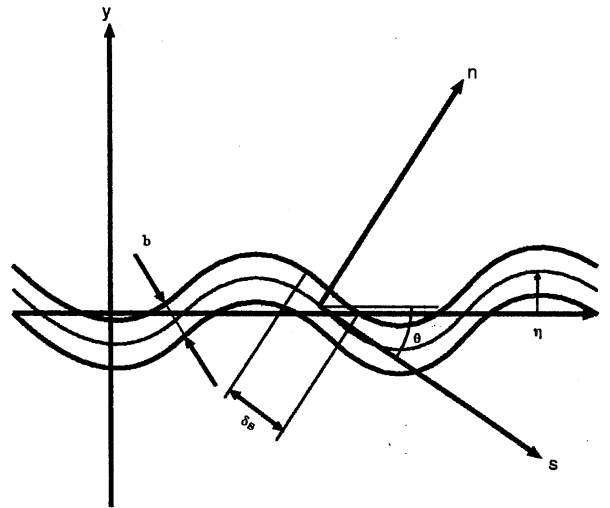


図 1: 流体薄膜シート

2.1 連続の式

長さ δs ，厚さ b ，単位幅の要素に含まれる質量の時間変化が 0 であることから以下の連続の式を得る：

$$\frac{d}{dt}(\rho b \delta s) = 0, \quad (1)$$

ここで， ρ は流体の密度を表し， d/dt はラグランジュ微分である．

(1) 式は

$$b \frac{d(\delta s)}{dt} + \frac{db}{dt} \delta s = 0, \quad (2)$$

のようにと書けるので，各項は以下のように計算できる：

- 要素の長さが時刻 t において δs であったものが、時刻 $t + \delta t$ において $\delta s'$ に変化したと仮定する。この時、 δx を x 軸における δs の射影とすると、

$$\delta s' = \delta s + \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x \delta t, \quad (3)$$

となる。ここで $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + v_s \mathbf{s}, \quad (4)$$

である。さらに、 $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$ は x , y を用いて

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{y} - \sin \theta \mathbf{x}, \quad (5)$$

$$\mathbf{s} = \sin \theta \mathbf{y} + \cos \theta \mathbf{x}, \quad (6)$$

と表され、

$$\tan \theta = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (7)$$

である。

(5), (6) 式を x で微分し、(7) 式の関係を用いると、

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos^2 \theta \mathbf{s}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos^2 \theta \mathbf{n}, \quad (9)$$

が得られる。その結果、(4) 式を (3) 式に用いて、(8), (9) 式を考慮することにより、

$$\frac{d(\delta s)}{dt} = \frac{\delta s' - \delta s}{\delta t} = \delta x \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} - v_n \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos^2 \theta \right), \quad (10)$$

が導かれる。

- db/dt は $b = b(x, t)$ であるので、

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} v_x, \quad (11)$$

と表せる。また、(4), (5), (6) 式より

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = v_s \cos \theta - v_n \sin \theta, \quad (12)$$

を得る。(12) 式を (11) 式に代入し、(7) 式の関係を用いると

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \cos \theta \left(v_s - v_n \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (13)$$

を得る。

以上の結果より、(10), (13) 式を (2) 式に代入すると連続の式は

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\cos \theta \left(v_s - v_n \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial b}{\partial x} - \cos \theta \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} - v_n \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos^2 \theta \right) b, \quad (14)$$

と書くことができる。

2.2 境界条件

シートは十分薄いとして，中心線 $y = \eta(x, t)$ で境界面が与えられると仮定すると，変形するシートの境界面は

$$F(x, y, t) = 0, \quad (15)$$

で与えられる。但し，

$$F(x, y, t) \equiv y - \eta(x, t), \quad (16)$$

今，粘性の影響は考えていないので，境界上の流体粒子は，法線方向に相対速度を持たず，境界面上を滑ることはあっても，面から離れることはない。従って，時刻 t ，位置 x において (15) 式を満足した流体粒子は，時刻 $t + \delta t$ には位置 $x + v\delta t$ にあり，依然として (15) 式を満たすので次式が成立する：

$$F(x + v\delta t, y + v\delta t, t + \delta t) = 0. \quad (17)$$

(17) 式と (15) 式の差をとり， δt で割って $\delta t \rightarrow 0$ の極限をとれば次の運動学的境界条件を得る：

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}v_x + \frac{\partial F}{\partial y}v_y = 0. \quad (18)$$

かくして，(18) 式に (16) 式を用いて

$$v_y - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x}v_x = 0, \quad (19)$$

を得る。さらに，(7) 式を $\partial \eta / \partial x$ に用いて

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_y - \frac{\partial \eta}{\partial x}v_x = v_y - v_x \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}(v_y \cos \theta - v_x \sin \theta),$$

となるので，

$$v_x = v_s \cos \theta - v_n \sin \theta, \quad (20)$$

$$v_y = v_s \sin \theta + v_n \cos \theta, \quad (21)$$

を考慮すれば，境界面は以下の式で記述される：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{v_n}{\cos \theta}. \quad (22)$$

2.3 運動方程式

表面張力による力がシート法線方向にのみ働くことに注意して連続の式を用いると，要素に対して次のような運動方程式を得る：

$$\rho b \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -(2\sigma \nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (23)$$

上式で $\nabla \cdot \mathbf{n}$ は (16) 式の F を用いて $[\nabla \cdot (\nabla F / |\nabla F|)]_{F=0}$ より次のようになる：

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos^3 \theta. \quad (24)$$

一方, d/dt は (13) 式で求めたように

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \cos \theta (v_s - v_n \frac{\partial \eta}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (25)$$

と書くことができるので, (5), (6) 式を (25) 式に用いて,

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\mathbf{s} \left[\cos^2 \theta \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} + \cos^3 \theta (v_s - v_n \frac{\partial \eta}{\partial x}) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right], \quad (26)$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{n} \left[\cos^2 \theta \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} + \cos^3 \theta (v_s - v_n \frac{\partial \eta}{\partial x}) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right], \quad (27)$$

を得る. ここで, $\partial^2 \eta / \partial t \partial x$ は (22) 式を x で微分することにより

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos \theta, \quad (28)$$

として得られる. さらに (23) 式の右辺に (24) 式を, 左辺に (4) 式を用いて, (25) 式から (28) 式を考慮することにより $\mathbf{n}$ 成分と $\mathbf{s}$ 成分を書きだすことができ, 以下のような接線方向及び法線方向の運動方程式：

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\cos \theta (v_s - v_n \frac{\partial \eta}{\partial x}) \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_n \cos \theta \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} + v_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos^2 \theta \right), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial t} = & -\cos \theta (v_s - v_n \frac{\partial \eta}{\partial x}) \frac{\partial v_n}{\partial x} - v_s \cos \theta \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} + v_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos^2 \theta \right) \\ & + \frac{2\sigma}{b} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \cos^3 \theta, \end{aligned} \quad (30)$$

を得る.

3 解析解 (対称モード)

前節で得られた方程式は $\eta \equiv 0$ と置くことにより, 対称モードの場合に帰着する. このとき, $\theta = 0$ を考慮すれば境界条件 (22) 式より $v_n = 0$ を得る. これを用いて, 連続の式 (14), 及び運動方程式 (29) はそれぞれ以下のような簡単な非線形方程式に帰着する：

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -v_s \frac{\partial b}{\partial x} - b \frac{\partial v_s}{\partial x}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -v_s \frac{\partial v_s}{\partial x}. \quad (32)$$

(32) 式は, $dx/dt = v_s$ に沿って $v_s = \text{const.}$ であることから, f を $\xi = x - v_s t$ の任意関数として,

$$v_s = f(\xi). \quad (33)$$

の解析解を持つ. この解は良く知られているように, $t = 0$ で $f(\xi) = f(x)$ となり, 初期波形として $f(x)$ に正弦的な波形を仮定した場合, 時間と共に波形が急峻になる部分と緩やかになる部分が現れる. そして $\partial\xi/\partial x = 1/(1 + f't)$ となることから $t_b \sim -1/f'$ で急峻な部分の勾配が発散して, 解は多価になり物理的な意味を失う. ただし, $' \equiv d/d\xi$ である.

この $f(\xi)$ を (31) 式に用いて以下の式を得る:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + f \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{f'}{1 + f't} b, \quad (34)$$

(34) 式の解を $b = g(x, t)$ として, $G(t, x, b) \equiv b - g(x, t)$ とおけば, (34) 式は次式のように書くことができる:

$$(1, f, -\frac{f'b}{1 + f't}) \cdot \nabla G = 0. \quad (35)$$

ここで, $\nabla \equiv (\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial b)$. 上式より, (t, x, b) 空間において $(1, f, -f'b/(1 + f't))$ は ∇G と直交するので, $G = \text{const.}$ 面は (dt, dx, db) 方向にある. これより, $(1, f, -f'b/(1 + f't))$ と (dt, dx, db) は平行となり次式のように表される:

$$dt = \frac{dx}{f} = \frac{db}{-\frac{f'b}{1 + f't}}. \quad (36)$$

上式より微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f, \quad (37)$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{f'}{1 + f't} b, \quad (38)$$

が得られる. (37) 式は (32) 式を満たし, (38) 式は積分できて,

$$b = b_0(x) \frac{1}{1 + t f'(\xi)}, \quad (39)$$

で与えられる. 但し, $b_0(x)$ を x の任意関数. 上式は $t = 0$ で $b = b_0(x)$ となることから, (39) 式は初期条件 $b_0(x)$ の下での b の時間発展を示す. t の増加とともに, $f' > 0$ の領域では b は減少し, $f' < 0$ の領域では増加する. さらに, f を正弦関数と仮定すれば, 時間の増大とともに $v_s = f(\xi)$ が突っ立つことから, 一周期における $f' < 0$ の領域は小さくなる. したがって b は時間とともに突っ立ちながらその振幅を増大させることがわかる. そして, v_s と同様 $t_b \sim -1/f'$ で解は発散し有界でなくなる.

4 数値解析

4.1 無次元化

波長 λ を代表長さとし，攪乱の無い場合のシートの速度 v_0 を代表速度として，代表時間を λ/v_0 とする．これらの量を用いて無次元化された変数を再び x, t 及び b, η, v_n, v_s と置く．また，ウェーバー数を $W_e = (\rho v_0^2 \lambda)/\sigma$ と定義する．

以下に計算に用いた初期条件を示す；

(i) 反対称モード：

$$\eta = \epsilon \cos(2\pi x), \quad b = b_0, \quad v_s = 1, \quad v_n = 1 + 2\pi\epsilon \sqrt{\frac{2}{W_e b_0}} \sin(2\pi x).$$

(ii) 対称モード：

$$b = b_0 + \epsilon \cos(2\pi x), \quad v_s = 1 - 2\pi\epsilon \sqrt{\frac{2}{W_e b_0}} \sin(2\pi x).$$

4.2 数値解法

(14),(22),(29) 及び (30) 式を数値的に解くために，時間微分に関しては Runge-Kutta 法（時間ステップ $\Delta t = 0.001$ ），空間微分に関しては 3 次精度中心差分（空間ステップ $\Delta x = 0.02$ ）を用い，非線形性による不安定化を押さえるために 5 点平滑化式を用いている．一方，薄膜近似の有効性を見るために離散渦法を用いて数値解析を行なっている．離散渦法では，時間微分は Runge-Kutta 法（時間ステップ $\Delta t = 0.005$ ），空間微分は 2 次精度の中心差分（初期空間ステップ $\Delta x = 0.025$ ），初期渦数は 40 個とし，方法は Rangel と Sirignano [3] に従った．

4.3 数値計算結果

4.3.1 対称モード

$W_e = 500, \epsilon = 0.015, b_0 = 0.04$ の場合の解の時間発展の様子を図に示す．図 2 は平滑化法を用いた数値計算結果であり，図 3 は厳密解を示す．両者は $t = 1$ 付近まではよく一致するが，以後，波形の急峻な部分で平滑化による数値粘性の効果が現れていることが分かる．一方，図 4 は離散渦法による結果である．薄膜理論での結果と同様，非線形性のため波形が歪んでくる様子が分かる．また，時間が経っても厳密解で示されているように厚みが発散することはない．図 2-図 4 より，初期の強い正弦的な攪乱は非線形性のため突っ立ちを起こし変形し，最終的には一波長間隔でシートが途切れることを予想させる．

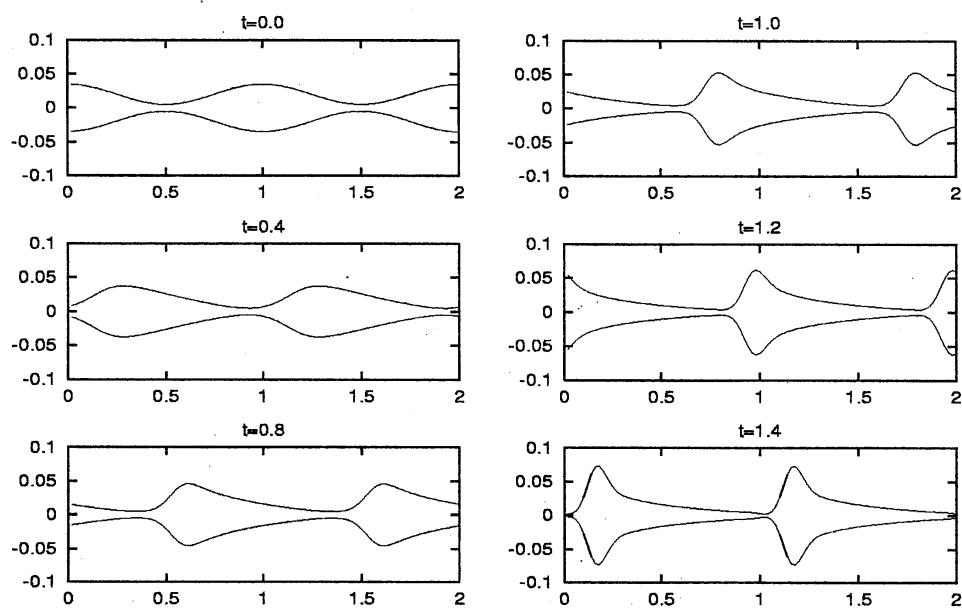


図 2: 対称モード攪乱 (数値計算)

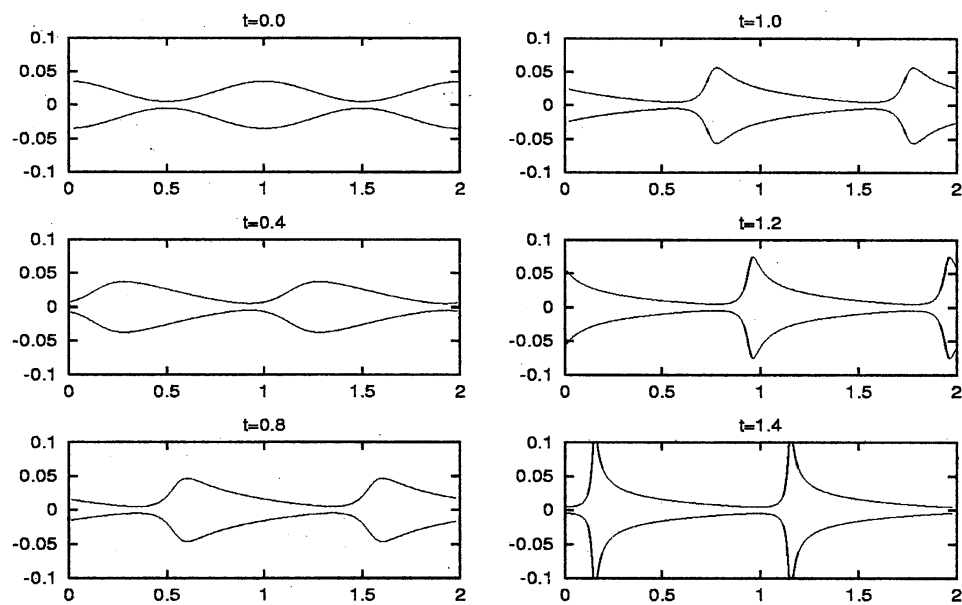


図 3: 対称モード攪乱 (厳密解)

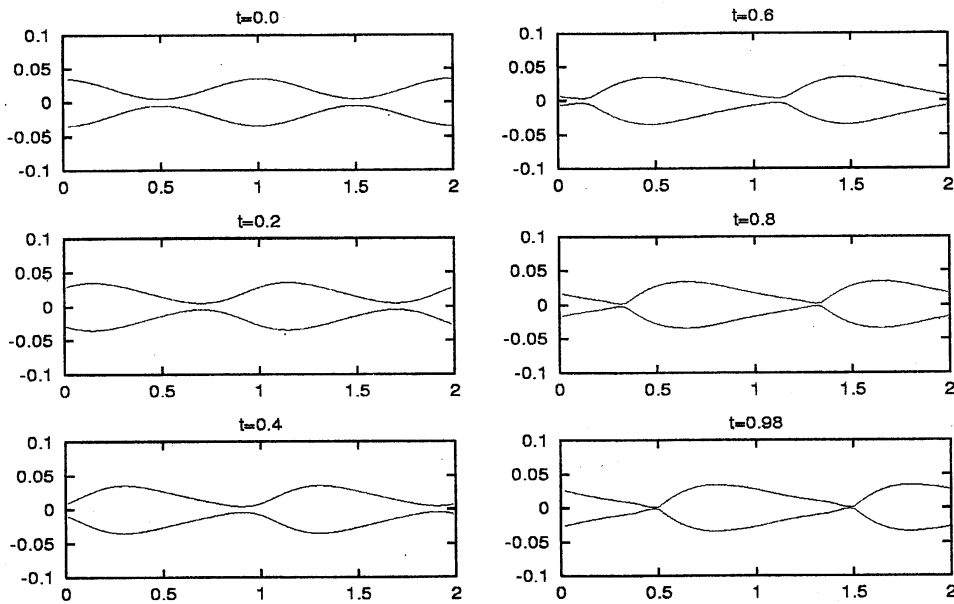


図 4: 対称モード攪乱 (離散渦法)

4.3.2 反対称モード

$W_e = 500, \epsilon = 0.1, b_0 = 0.04$ の場合の解の時間発展の様子を図に示す. 図 5 より t が増加するに従い局所的に厚味が増した部分と薄くなった部分が現れ最終的には半波長間隔でシートは途切れることが予想される. 一方, 図 6 で示すように離散渦法での結果は薄膜理論ほどではないにしろ, 半波長間隔にシートの大きな変形個所が現れ最終的には途切れる可能性があることを示している.

5 考察及び結論

前節の数値解析結果より, シート厚みに対して十分大きな振幅の攪乱が与えられた場合, たとえ線形安定であっても, 非線形性によりシートが大きく変形し最終的には崩壊する可能性があることを示している. 事実, 薄膜理論では十分小さな(線形)攪乱に対しては, 厚みの変化は時間に関して周期的に変わるだけで, 大きな変化には結びつかない. また, 薄膜理論では周囲の流体の影響が考慮されていないが, 周囲の流体の密度がシートの密度に比べて十分小さければ(例えば水と空気), 強い攪乱に対しては非線形性による効果が早く現れるため, 薄膜理論で比較的巧く現象が捉えられることが予想される. また, 薄膜理論では厚さが十分薄いと仮定しているために, 導出した方程式に分散の効果が取り込めていない. そのため, 対称モード攪乱の場合のように, 非線形性により発散する解が現れてくる. 以下で本研究で得られた結果をまとめると,

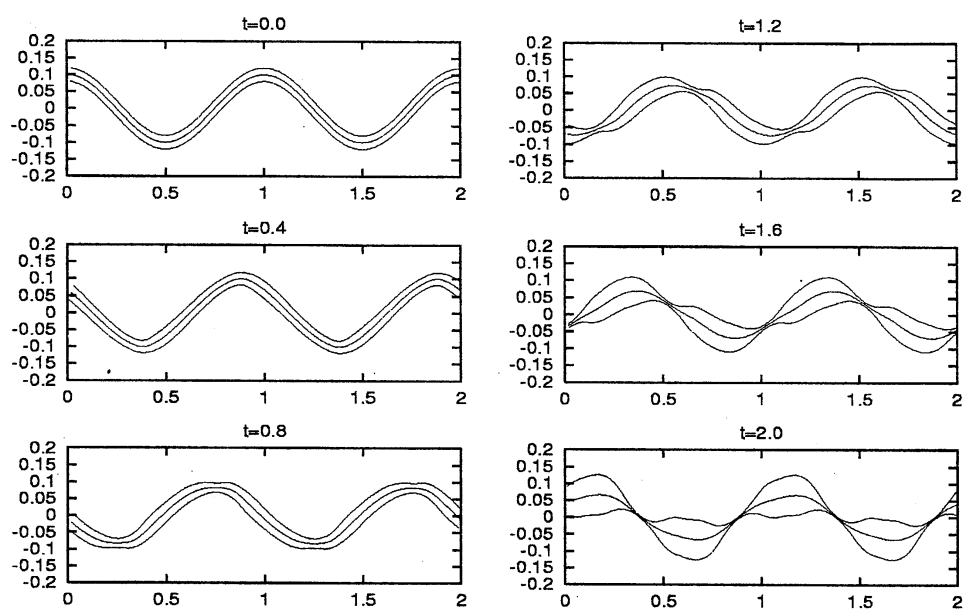


図 5: 反対称モード攪乱 (薄膜理論)

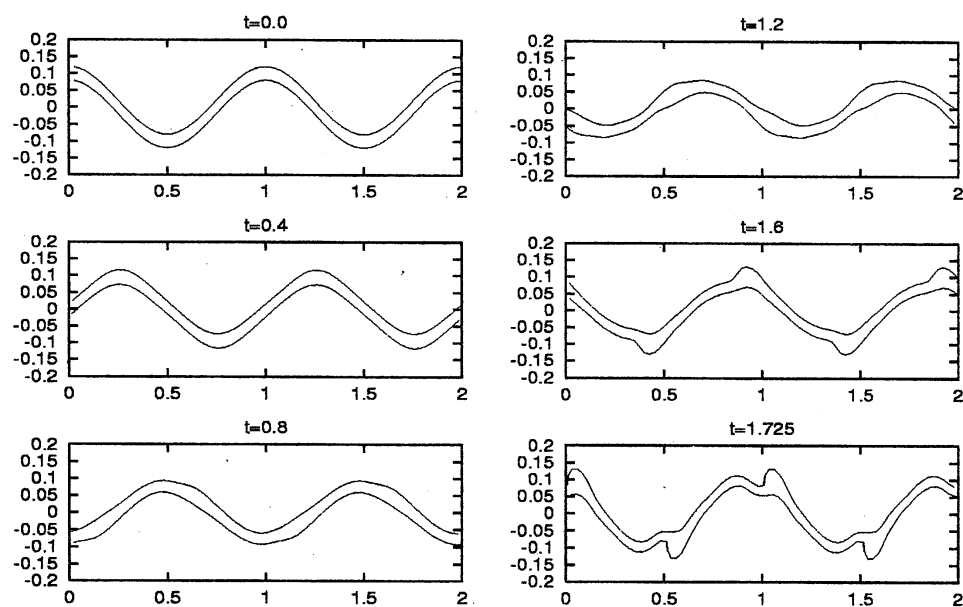


図 6: 反対称モード攪乱 (離散渦法)

1. 薄膜近似を二次元平面シートに用いることにより比較的簡単な発展方程式を得ることができた.
2. 対称攪乱を仮定した場合, これらの方程式が厳密解を持つことが示せた.
3. 離散渦法による数値解析結果は, 特に対称攪乱に対しては薄膜理論とよく一致する.
4. 周囲の流体の影響が無い場合でも, 十分大きな攪乱に対しては非線形性により変形し崩壊に至る可能性がある. 特に, 対称モードでは1波長間隔で, 反対称モードでは半波長間隔で崩壊する可能性が高い.

謝辞

本研究を行うにあたり, 大阪大学基礎工学部機械科学科 小谷晃士君にお世話になりました. この場を借りてお礼申し上げます.

参考文献

- [1] G.K.Batchelor: *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge U.P.,Cambridge 1970).
- [2] H.B.Squire:Brit.J.Appl.Phys. 4(1953)167.
- [3] R.H.Rangel and W.A.Sirignano: Phys.Fluids **A3**(1991)2392.
- [4] C.P.Lee and T.G.Wang: Phys.Fluids 29 (1986)2076.