

二項回帰数列の逆数和の数論的性質

NTT サービスインテグレーション基盤研究所

NTT Service integration Laboratories

黒沢 健 (Takeshi Kurosawa)

二項回帰数列を考える. A_1, A_2 を整数として, 二項回帰数列 $\{R_n\}_{n \geq 0}$ は以下の回帰関係を満たしているとする.

$$R_{n+2} = A_1 R_{n+1} + A_2 R_n \quad (n \geq 0),$$

但し R_0, R_1 は共に零でない整数とする. 特性多項式 $P(X) = X^2 - A_1 X - A_2$ の二根を ρ_1, ρ_2 ($|\rho_1| \geq |\rho_2|$) とおき, 判別式 $\Delta = A_1^2 + 4A_2$ を正と仮定する. この時 ρ_1, ρ_2 は異なる実根である.

$r \geq 2, c \geq 1, d$ を整数とする. この時, 以下の逆数和を考える.

$$(1) \quad \sum_{k \geq 0} ' \frac{a_k}{R_{cr^k+d}},$$

但し $\{a_k\}_{k \geq 0}$ は代数的数からなる数列とし, $\sum_{k \geq 0} ' \frac{a_k}{R_{cr^k+d}}$ は $cr^k+d \geq 0$ で $R_{cr^k+d} \neq 0$ となる $k \geq 0$ の和を意味する. この形の級数和は多くの研究者によって研究されてきた. $\{F_n\}_{n \geq 0}$ を Fibonacci 数列とおく. 即ち $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \geq 0$) を満たし, 初期値 $F_0 = 0, F_1 = 1$ をとるものである. Lucas [Lu, p. 225] は以下の明示的な公式を与えた.

$$(2) \quad \sum_{k \geq 0} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}.$$

更に Hoggatt と Bicknell [HB] はより一般的な公式を与えた.

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{F_{c2^k}} = \frac{1}{F_c} + \frac{\Phi + 2}{\Phi(\Phi^{2c} - 1)},$$

但し $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金数とする. このように以上の二式は級数和 (1) が代数的数 (無理数) になる例である. しかし級数和 (1) はいつでもこのような明示的な表示を持っているわけではない. 例えば,

$$\theta_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{F_{2^k+1}}$$

は (2) に似た形をしているが, Becker と Töpfer [BT] はこの値が超越数である事が示した. この数の値は以下の値

$$\theta_2 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{F_{2^k-1} + F_{2^k+1}} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{L_{2^k}}$$

と同時に Erdős と Graham [EG, p. 64] によって問題提起された数である. ここで L_n は Lucas 数列とする. 即ち $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ ($n \geq 0$) を満たし, 初期値 $L_0 = 2, L_1 = 1$ の数列である. 級数和 (1) には更に多くの研究がある. 特に $\{R_n\}$ が Fibonacci タイプ $U_n = (\rho_1^n - \rho_2^n)/(\rho_1 - \rho_2)$, Lucas タイプ $V_n = \rho_1^n + \rho_2^n$, また特性根が $\rho_2 = \pm 1$ の場合に良く研究されてきた. 級数の分子が $a_k = (\pm 1)^k$ の時, 即ち

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(\pm 1)^k}{U_{2^k}}, \quad \sum_{k \geq 1} \frac{(\pm 1)^k}{V_{2^k}}, \quad \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\rho_1^{2^k} \pm 1}$$

の時は無理数性 ([AJ], [Ba], [Go]), 更に Mignotte [Mi2] により

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{U_{2^k}}$$

の超越性が証明された. また級数の分子が $a_k = \frac{1}{k!}$ の時, 即ち

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k! F_{2^k}}$$

の時, Mignotte [Mi1] と Mahler [Ma] が独立に級数和の超越性を示した. $\{a_k\}$ の形がより一般的な時は Hančl と Kiss [HK] が無理数性を示し, Bundschuh と Pethő [BP] は超越性を示した. より一般的な $\{R_n\}$ の形では Becker と Töpfer [BT] が $\{a_k\}$ が代数的数からなる周期列で判別式 Δ が平方数でない時に超越数である事を示した. Nishioka [Ni] は $\{a_k\}$ が線形回帰数列であり, 判別式 Δ が平方数でない時を含む形の超越性を示した. 実際に彼女は級数和 (1) の d を動かした時の代数的独立性を示した. 更に代数的独立性の結果では d と r を動かした時の代数的独立性は Nishioka, Tanaka, Toshimitsu [NTT], Nishioka [Ni2] によって示された. また Tanaka [Ta] は以下の (1) に類似した級数和

$$\sum_{k \geq 0} \frac{k^l \alpha^k}{(R_{a_k})^m} \quad (m \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^\times),$$

の代数的独立性を示した. 但し $\{a_k\}$ は適当な線形回帰数列とする. また類似的な和について Duverney, Kanoko, Tanaka [DKT] は

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{R_{cr^k} + b},$$

の和の超越性を示した. 但し $a \in \overline{\mathbb{Q}}^\times, b \in \mathbb{Z}$ とする.

最近 Duverney と Nishioka [DN] は分子 $\{a_k\}$ について画期的な改良を行った。それを紹介する。 α を代数的数とする時、 α のハウスを $|\alpha| = \max\{|\alpha^\sigma| \mid \sigma \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\}$ と置き、 $\text{den}(\alpha)$ を $\text{den}(\alpha)$ α が代数的整数になるような最小の正整数とする。また α のサイズを $\|\alpha\| = \max\{|\alpha|, \text{den}(\alpha)\}$ と定める。このサイズは以下の不等式を持つ。

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\| \leq n \prod_{i=1}^n \|\alpha_i\|.$$

もし、 $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ならば $\|\alpha\| = |\alpha|$ である。 K を代数体として、 O_K を K の整数環とする。この時

$$\Phi_0(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{E_k(x^{r^k})}{F_k(x^{r^k})},$$

と置く。但し

$$E_k(x) = a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \cdots + a_{kL}x^L \in K[x],$$

$$F_k(x) = 1 + b_{k1}x + b_{k2}x^2 + \cdots + b_{kL}x^L \in O_K[x],$$

$$\log \|a_{kl}\|, \log \|b_{kl}\| = o(r^k), \quad 1 \leq l \leq L$$

とする。この時彼らは以下の判定定理を示した：

超越性判定定理 (Duverney and Nishioka [DN]). α を $0 < |\alpha| < 1$ で $k \geq 0$ に対して $F_k(\alpha^{r^k}) \neq 0$ を満たす代数的数とする。この時 $\Phi_0(\alpha)$ が代数的数となる必要十分条件は $\Phi_0(x)$ が有理関数となる事である。

彼らはこの強力な定理の応用として、以下の逆数和の超越性の必要十分条件を与えた。

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{F_{r^k} + b_k}, \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{L_{r^k} + b_k},$$

但し F_n は Fibonacci 数、 L_n は Lucas 数とする。また $\{a_k\}_{k \geq 0}$ と $\{b_k\}_{k \geq 0}$ はそれぞれ K の数列、 O_K の数列で $\log \|a_k\|, \log \|b_k\| = o(r^k)$ を満たすとする。

今回の私の研究では級数和 (1) の超越性の必要十分条件を与える。二項回帰数列 R_n ($n \geq 0$) は以下のように表現される。

$$R_n = g_1 \rho_1^n + g_2 \rho_2^n, \quad |\rho_1| \geq |\rho_2|.$$

Theorem 1. $\{R_n\}$ を周期列でなく、無限に多くの k に対して $R_{cr^k+d} \neq 0$ であるとする。 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ を K の数列とし、 $\log \|a_k\| = o(r^k)$ を満たすとする。もし無限に多くの k に対して $a_k \neq 0$ ならば

$$\theta = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{R_{cr^k+d}}$$

は以下の二つの場合を除き超越数である：

- (i) $a \in K$ と $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $r = 2$, $a_n = a (n \geq N)$, $|A_2| = 1$, かつ $g_1 \rho_1^d + g_2 \rho_2^d = 0$ となる場合, この時 $\theta \in K(\sqrt{\Delta})$.
- (ii) $a \in K$ と $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $r = 2$, $a_n = a 2^n (n \geq N)$, $\rho_2 = \pm 1$, $g_1 \rho_1^d = g_2 \rho_2^d$ となる場合, この時 $\theta \in K$.

二項回帰数列は以下の 3 つの場合に分類される.

I: $|A_2| = 1$.

II: 特性根 ρ_1, ρ_2 が乗法的従属で $|A_2| \geq 2$.

III: 特性根 ρ_1, ρ_2 が乗法的独立.

Duverney と Nishioka は二項回帰数列として重要な例である $\{F_n\}$ と $\{L_n\}$ の場合についての判定を行った. これは Case I の場合にあたる. 彼らが行ったのはこの二つの二項回帰数列の場合だけであるが, 彼らがこの二つの級数の証明のために用いた超越性判定定理は Case I と II の場合に適用できる. 正確には彼らの超越判定定理を使用するための条件が $F_k(x) \in O_K[x]$ であるため, 完全には I と II の場合に適用する事は出来ない. しかし, 実際には簡単な補助定理を適用すれば彼らの超越性判定定理の $F_k(x) \in O_K[x]$ という条件を, ある整数 D が存在して $DF_k(x) \in O_K[x]$ を満たせば良いという条件に置き換える事が出来る. この事実を使う事により, 彼らの超越性判定定理を Case I と II の場合に適用出来る. 超越性判定定理を適用すると, 定理 1 の θ の超越性は $\Phi_0(x)$ が有理関数かどうかを判定すれば良い事になる. 彼らは $L \leq r$ の時, $\Phi_0(x)$ が有理関数かどうか判定をした. これは Case I の場合を調べるのには十分な条件であった. よって Case I が解決した事になる. では次に Case II の場合を考察していく. 先ほども述べたとおり, この場合も彼らの超越性判定定理を使う事が出来る. 即ち $\Phi_0(x)$ が有理関数かどうかを判定する事が必要となってくる. この場合には $\Phi_0(x)$ が $L > r$ の場合に対しても有理関数かどうか調べる必要があった. この場合の判定はそう簡単なものではなく, このために私は K 上の全ての絶対値 (即ち付置) を使う事によって有理関数の判定を行った. 残る Case III では彼らの超越判定定理を使う事が出来ない. そのために彼らの超越判定定理に代わる定理を導く必要があり, 以下に示す多変数関数を用いる事で解決を行った. ここで記号の定義をする. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ に対して

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^m \lambda_i, \quad \alpha^\lambda = \prod_{i=1}^m \alpha_i^{\lambda_i}$$

とする. また $r \geq 2$, $z = (z_1, \dots, z_m)$ として $\Omega_n z := (z_1^{r^n}, \dots, z_m^{r^n})$ とする. この時,

$$(3) \quad S := \Phi_0(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{E_k(\Omega_k z)}{F_k(\Omega_k z)} \in K[[z]] = K[[z_1, \dots, z_m]],$$

と置く. 但し

$$E_k(z) = \sum_{1 \leq |\lambda| \leq L_1} a_{k\lambda} z^\lambda, \quad F_k(z) = 1 + \sum_{1 \leq |\lambda| \leq L_2} b_{k\lambda} z^\lambda \in K[z],$$

$$\log \|a_{k\lambda}\|, \log \|b_{k\lambda}\| = o(r^k).$$

とする.

ここで $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (K^\times)^m$ で $0 < |\alpha_1|, \dots, |\alpha_m| < 1$, $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_m|$ が乗法的独立であり, $k \geq 0$ に対して $F_k(\Omega_k \alpha) \neq 0$ であるような代数的数からなる点 α に対して S の値を調べる. これを調べる事により Case III の場合を解決する. そこで私は以下の定理を得た.

Theorem 2. $S = \Phi_0(z)$ を (3) で定義されたものとする. 但し

$$E_k(z) \in K[z_1, \dots, z_l], F_k(z) \in K[z_{l+1}, \dots, z_m] \quad (1 \leq l \leq m).$$

であると仮定する. $L_1 < r$ で無限に多くの n に対して $E_n(z) \neq 0$ ならば $\Phi_0(\alpha)$ は超越数である.

この定理 2 は Duverney と Nishioka の超越判定定理のように必要十分条件を与えている定理ではない. しかし Case III を解決するには十分な定理となっている. この定理 2 を証明するために私は以下の定理を示した. この定理は Duverney と Nishioka[DN] の Theorem 2 の一般化 (多変数化) になっており, 重要な役割を占める定理となっている.

Theorem 3. $\deg A_0, \deg A_1 \leq M$ を満たす任意の $M \geq 1$ と任意の共に零でない $A_0, A_1 \in K[z]$ に対して

$$\text{ord}(A_0 + A_1 S) \leq c_1 M$$

を満たすような正の定数 c_1 存在すると仮定する. この時, 任意の正の数 d に対して $\deg A_0, \dots, \deg A_d \leq M$ を満たす任意の $M \geq 1$ と全て零でない $A_0, \dots, A_d \in K[z]$ に対して

$$\text{ord}(A_0 + A_1 S + \dots + A_d S^d) \leq c_d M$$

を満たす c_d が存在する.

更に定理 2 のもう一つの応用として二項回帰数列だけでなく, 以下の級数 and の超越性に対しても応用する事が出来る.

Theorem 4. $\rho_1, \dots, \rho_m$ を代数的数として $|\rho_1|, \dots, |\rho_m|$ が乗法的に独立で $|\rho_1| > \max\{1, |\rho_2|, \dots, |\rho_m|\}$ であるとする. $\{a_k\}_{k \geq 0}, \{b_{ik}\}_{k \geq 0}$ ($1 \leq i \leq m$)

を K の級数で, 十分大きな k に対して $\log \|a_k\|, \log \|b_{ik}\| = o(r^k)$ かつ $b_{1k} \neq 0$ を満たすとする. もし無限に多くの k に対して $a_k \neq 0$ ならば

$$\sum_{k \geq 0} ' \frac{a_k}{b_{1k}\rho_1^{r^k} + \cdots + b_{mk}\rho_m^{r^k}} \notin \overline{\mathbb{Q}}.$$

但し $\sum_{k \geq 0} '$ は $b_{1k}\rho_1^{r^k} + \cdots + b_{mk}\rho_m^{r^k} \neq 0$ である k をわたる和とする.

Becker と Töpfer [BT] はこの定理と似た定理を証明している. 彼らは $\rho_1, \dots, \rho_m$ が乗法的に独立と言う条件ではあるが, $\{a_k\}$ が周期列であり $\{b_{1k}\}, \dots, \{b_{mk}\}$ に対しては定数と言う仮定をしている.

参考文献

- [AJ] R. André-Jeannin, *A note on the irrationality of certain Lucas infinite series*, Fibonacci Quart. **29** (1991), 132–136.
- [Ba] C. Badea, *The irrationality of certain infinite series*, Glasgow Math. J. **29** (1987), 221–228.
- [BT] P.-G. Becker and T. Töpfer, *Transcendence results for sums of reciprocals of linear recurrences*, Math. Nachr. **168** (1994), 5–17.
- [BP] P. Bundschuh and A. Pethö, *Zur transzendenz gewisser reihen*, Monatsh. Math. **104** (1987), 199–223.
- [DN] D. Duverney and Ku. Nishioka, *An inductive method for proving the transcendence of certain series*, to appear in Acta. Arith..
- [DKT] D. Duverney, T. Kanoko and T. Tanaka, *Transcendence of certain reciprocal sums of linear recurrences*, Monatsh. Math. **137** (2002), 115–128.
- [EG] P. Erdős and R. L. Graham, *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*, Imprimerie Kundig, Genève 1980.
- [Go] S.W. Golomb, *On the sum of the reciprocals of the Fermat numbers and related irrationalities*, Can. J. Math. **15** (1963), 475–478.
- [HK] J. Hančl and P. Kiss, *On reciprocal sums of terms of linear recurrences*, Math. Slovaca **43** (1993), 31–37.
- [HB] V.E. Hoggatt Jr. and M. Bicknell, *A reciprocal series of Fibonacci numbers with subscript 2^nk* , Fibonacci Quart. **14** (1976), 453–455.
- [LP] J.H. Loxton and A.J. van der Poorten, *Arithmetic properties of certain functions in several variables III*, Bull. Austral. Math. Soc. **16** (1977), 15–47.

- [Lu] E. Lucas, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, Amer. J. Math. **1** (1878), 184–240.
- [Ma] K. Mahler, *On the transcendency of the solutions of a special class of functional equations*, Bull. Austral. Math. Soc. **13** (1975), 389–410.
- [Mi1] M. Mignotte, *Quelques problèmes d'effectivité en théorie des nombres*, DSc Thèses, L'Université de Paris XIII, 1974.
- [Mi2] M. Mignotte, *An application of W. Schmidt's theorem transcendental numbers and Golden number*, Fibonacci Quart. **15** (1977), 15–16.
- [Ni] K. Nishioka, *Algebraic independence of reciprocal sums of binary recurrences*, Monatsh. Math. **123** (1997), 135–148.
- [Ni2] K. Nishioka, *Algebraic independence of reciprocal sums of binary recurrences II*, Monatsh. Math. **136** (2002), 123–141.
- [NTT] K. Nishioka, T. Tanaka, and T. Toshimitsu, *Algebraic independence of sums of reciprocals of the Fibonacci numbers*, Math. Nachr. **202** (1999), 97–108.
- [Ta] T. Tanaka, *Algebraic independence results related to linear recurrences*, Osaka J. Math. **36** (1999), 203–227.

Takeshi Kurosawa
 NIPPON TELEGRAPH AND TELEPHONE CORPORATION
 NTT Service Integration Laboratories
 Midori-Cho 3-9-11,
 Musashino-Shi,
 Tokyo 180-8585
 Japan
 e-mail: k_takeshi@2001.jukuin.keio.ac.jp