

数値実験—円柱を過ぎる定常流

愛媛大 教育 高石 頼三郎

§1. はしがき

円柱を過ぎる一様流について, Navier-Stokes 方程式を数値的に取扱った論文は多数ある. しかしながらこれ等の論文では, 明記されてゐない点や, まだ十分に鮮明されてゐない点もあるように思われるので将来の研究の資料として数値実験を行つてゐる. 今ここに得られた結果について報告する. これの中には当然と存えられるものや, 又数学的に十分説明のつかないものも含まれてゐるが, いわば台所の裏まじさうけだして記載することにした. この計算には愛媛工学計算機室の「HIPAC 103 Digital Computer」を使用した. 本稿は浮動小数点については 10 進換算 11 桁の計算を行なう.

§2. 基礎方程式とその変換

Ψ : stream function, L : Vorticity, R : Reynolds number.
 $\Psi = y + \psi$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ とおく. normalized N.S. eqn.

71

は

$$\frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2}{R} \Delta \zeta = 0, \quad (2.1)$$

$$\zeta = -\Delta \psi. \quad (2.2)$$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおき KAWAGUTI¹⁾ に従って

$$X = 1/r, \quad Y = (2/\pi) \theta, \quad (2.3)$$

の変換を行なう。流れの対称性から、半像の関係は図1で示される。

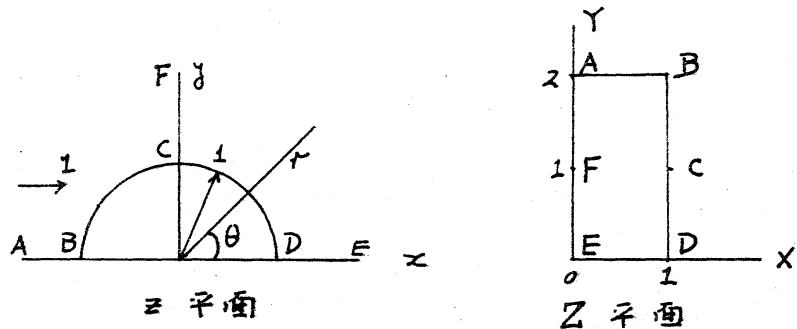


図 1

KAWAGUTI の変換は等角写像では.. 此の変換後の微分方程式が複雑となり, 又物体近傍の流線の明細を知るためには, 細か.. mesh に分割する必要がある等の難点はあるが, 一方 $r \rightarrow \infty$ の境界条件が簡単に表現できる利点がある. APELT²⁾ 等の変換では上記の難点は除かれるが r が十分大きいところの境界条件に extrapolation を用いることが必要となり, 若干のあいまいさが残る. 特にこの点を考慮して KAWAGUTI 変換を選んだ.

mesh const. h も KAWAGUTI と同様 0.1 とした.

従って差分方程式も全く同じになる。計算の手順も KAWAGUTI
と同じである。以下簡単のため、特に必要あるものの外は数
式の記載を省略し $\kappa(\cdot, \cdot)$ によって引用することとする。

§ 3. 境界条件

$$\zeta(1, Y) = -200\psi(0.9, Y) - 222 \sin(\pi Y/2) + O(h), \quad \kappa(3.9):(3.1)_a$$

又は

$$\zeta(1, Y) = 50\psi(0.8, Y) - 400\psi(0.9, Y) + 382\psi(1, Y) + O(h^2), \quad (3.1)_b$$

$$\psi(1, Y) = -\sin(\pi Y/2), \quad \kappa(3.4):(3.2)$$

$$\zeta(0, Y) = 0, \quad \kappa(3.11):(3.3)$$

$$\psi(0, Y) = -Cd/2 \cdot (1 - Y/2), \quad \kappa(3.10):(3.4)_a$$

又は

$$\psi(0, Y) = 0. \quad (3.4)_b$$

ここへ

$$\text{drag coeff.} \quad Cd = Cdp + Cdf, \quad (3.5)$$

$$\text{pres. drag coeff.} \quad Cdp = -\frac{\pi^2}{R} \int_0^2 \left\{ \int_Y^2 \left[\frac{\partial \zeta}{\partial X} \right]_{X=1} dY \right\} \cos(\pi Y/2) dY, \quad (3.6)$$

$$\text{frict. drag coeff.} \quad Cdf = -\frac{2\pi}{R} \int_0^2 \zeta(1, Y) \sin(\pi Y/2) dY. \quad (3.7)$$

§ 4. 実験の主要実

- 1) 境界条件 (3.4)_a は IMAI³⁾ によって導かれたものであるが、半無限流体等のばあいには類似の式が導かれているので (3.4)_b とおこえときと比較する。

- 2) KAWAGUTI は Wake の外で $L > 0$ となつたとき物理的理
 由からこれを $L = 0$ とおいた。しかし $L > 0$ となることは誤
 差の累積によるものでこれ $L = 0$ とおくことは、誤差をある
 量に定よせることになるのではなからとて $L > 0$ のま
 まで計算して比較する。
- 3) 数値計算においては使用する微分公式が結果に著しい影
 響を及ぼす。式 (3.6) $[2\phi/\phi x]_{x=1}$ の計算に BICKLEY の
 の n 次微分公式 ($n=2, 3, 4, \dots, 7$) を用い結果を比較する。
- 4) (3.1)a は $O(h)$ の誤差をもつ。 $O(h^2)$ の誤差の (3.1)b を
 用いたときどうなるか検討する。

以上を考慮して、次の4つのばあいに分けた。

Case A: $\psi(0, Y)$ として (3.4)a, Wake 外の $L > 0$ と 0 とおく。

Case B: $\psi(0, Y)$ として (3.4)b, Wake 外の $L > 0$ と 0 とおく。

Case C: $\psi(0, Y)$ として (3.4)a, Wake 外の $L > 0$ とそのままと
 する。

Case D: $\psi(0, Y)$ として (3.4)b, Wake 外の $L > 0$ とそのまま
 とする。

なお式 (3.6) の $\int_Y^2 \dots dY$ の計算には BICKLEY の 5 区間積分
 公式と WEDDLE の 6 区間積分公式と組合わせ、又式 (3.6),
 (3.7) の $\int_0^2 \dots dY$ の計算には一貫して BICKLEY の 5 区間積
 分公式を使用した。

§5. 実験の経過および注意した点

- 1) 先づ Case A, $R=10$, $n=7$ について,
内部点の生成値として

$$\begin{aligned} \zeta(X, Y) = & -(11.7608 X^5 - 5.4504 X^7 - 0.2544 X^9) \sin(\pi Y/2) \\ & - (4.9068 X^2 - 24.5220 X^6 + 13.0688 X^8) \sin \pi Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(X, Y) = & -(2.2377 X - 1.4701 X^3 + 0.2271 X^5 + 0.0053 X^7) \sin(\pi Y/2) \\ & - (1.2267 - 2.8618 X^2 + 2.0435 X^4 - 0.4084 X^6) \sin \pi Y, \end{aligned}$$

を用いた。収束後の ζ , ψ を生成値として、逐次 R の小さい方向、大きい方向への計算を行った。ただし $R=60$ より $R=100$ の計算には先づ $R=80$ とおき、収束に達する前に $R=100$ に変更して Reynolds 数の激変によって生ずる発散を防いだ。

- 2) 他のばあいについては 1) で計算した相対応する R の収束値を生成値として使用した。1) で未計算の R については 1) の方法を併用した。

- 3) Relaxation parameter α, β を用い

$$\zeta(\text{新}) = \zeta(\text{旧}) + \alpha \{ \zeta(\text{計算値}) - \zeta(\text{旧}) \},$$

$$\psi(\text{新}) = \psi(\text{旧}) + \beta \{ \psi(\text{計算値}) - \psi(\text{旧}) \},$$

とした。

- 4) 繰返しの回数: Cd は一種の減衰振動曲線となる。 Cd が極値をとったばあいの ζ , ψ , Cd , 繰返しの回数を引継いで3回計算機に記憶させておいて

- (1) 才1回は KAWAGUTI に従って振中が等比級数的に減少するものと仮定し,
- (2) 才2回以後は振中が直線的に減少するものと仮定して, 中の収束するであろう値を計算し, これを新しい極値として計算を行った. この方法は収束の加速には極めて有効であり又引続く極値によって収束の状況と判定することができた.
- 5) Case A, $R=100$, $n=3$; Case C; Case D については $K(6.1)$, $K(6.2)$ を組合わせて $(0.9, 0.2)$, $(0.9, 0.3)$ の座標をもつ円柱に接合した2翼における Reynolds 数 $RM(X, Y)$ を計算し, これが $|RM(X, Y)/R - 1| < \epsilon$, ($\epsilon = 10^{-5}$) に達したときを収束と判定した.

§6. 結果および考察

- 1) Case A, Case B, Case D について (3.1)a を用いたばあいの R , C_d , n の関係と, それぞれ表1(A), 1(B), 1(D) に示す. いずれのばあいにも

(1) R が小さい間は n と C_d とはあまり関係しない.

(2) R が増すに従って n による C_d の変化が大きくなる.

その原因は R の増加と共に物体後方の乱れが大きくなるためと考えられる. 当然 mesh 数にも関係するであろう. 従ってこれ等の結果から n の最適値を早急に決めることは出

来るが差分式の精度も考慮して、以後の計算では $n=3$ とおこなった。

$R \backslash n$	Cd						α	β
	2	3	4	5	6	7		
4	4.744	4.721	—	—	—	4.730	0.5	—
10	2.957	2.919	—	—	—	2.927	0.3	—
20	2.184	2.132	—	—	—	2.152	0.3	—
30	1.863	1.803	—	—	—	1.833	0.3	—
40	1.622	1.562	—	—	—	1.641	0.2	0.7
60	1.369	1.318	—	—	—	1.340	0.1	0.5
100	—	1.126	—	—	—	0.757	0.05	0.4

表 1(A)

$R \backslash n$	Cd						α	β
	2	3	4	5	6	7		
4	5.076	5.049	5.057	5.059	5.055	5.059	0.7	—
10	3.104	3.109	3.109	3.125	3.119	3.112	0.7	—
20	2.273	2.216	2.200	2.232	2.251	2.239	0.4	—
30	1.872	1.810	1.769	1.739	1.843	1.859	0.34	0.85
40	1.622	1.562	1.498	1.513	1.578	1.659	0.3	0.9
60	1.277	1.228	1.133	1.097	1.121	1.196	0.23	0.8
100	1.170	1.155	1.016	0.933	0.790	0.747	0.1	0.52

表 1(B)

$R \backslash n$	Cd					
	2	3	4	5	6	7
0.5	20.391	20.383	20.385	20.384	20.385	20.384
4	5.072	5.044	5.053	5.054	5.051	5.054
10	3.118	3.074	3.079	3.095	3.090	3.083
20	2.280	2.222	2.206	2.239	2.257	2.245
30	1.953	1.889	1.845	1.875	1.922	1.944
40	1.768	1.703	1.629	1.641	1.702	1.765
60	1.569	1.514	1.391	1.342	1.374	1.467
100	1.389	1.382	1.215	1.050	0.930	0.866

表 1(D) ; 本表は表 3(D)より抽出, α, β は同表に全じ。

2) Case A, $n=3$

について $R: Cd$
曲線が $R=100$

において他の
ばあゝと若干
相異している
よう見受けら
れたので収束
不十分と存じ
 α, β を変更
して計算を続
行したところ、
 Cd の値に急激
な変化を来じ
た。§5.5) の
判定条件のも

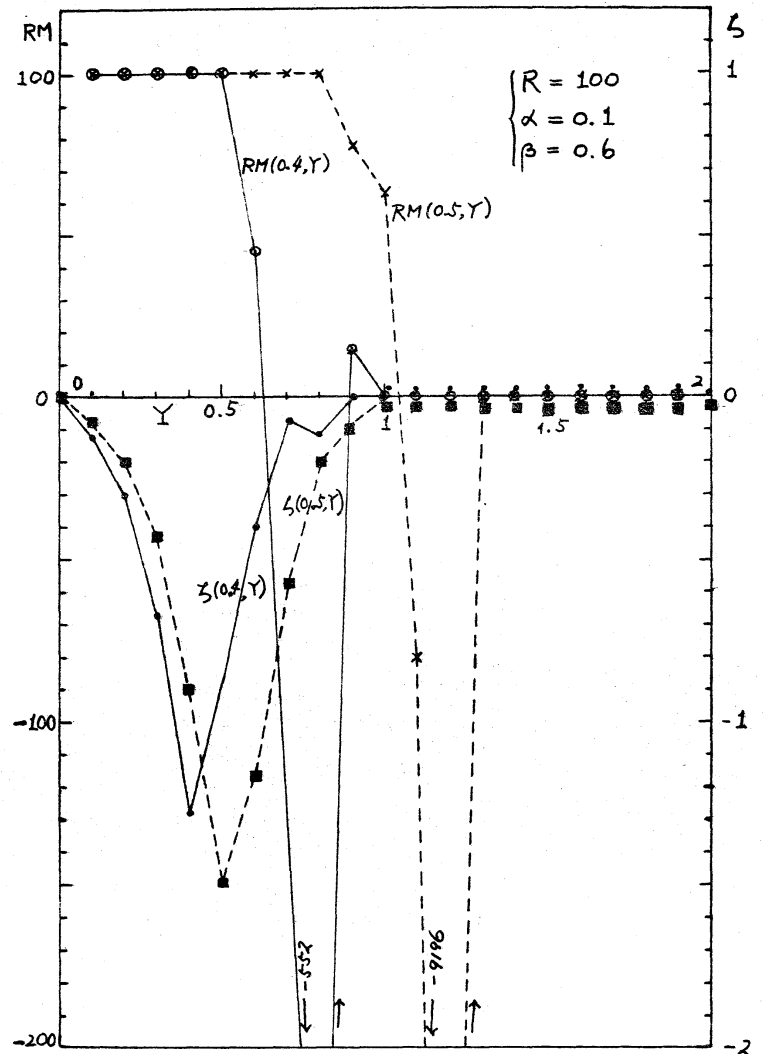


図 2-1

α	β	Cd 収束値	収束前の Cd の極値			$RM(X, Y)$ の 平均値
0.1	0.6	1.16871	1.1687442	1.1686949	1.1687163	-8.84567
0.04	0.4	1.24565	1.2456361	1.2456560	1.2456468	57.46952

表 2

とに相異なる α ,
 β を用い、収束し
 た Cd の値、収束
 前の引續く3回
 の Cd の極値、
 収束したときの
 内部格子差にお
 ける $RM(X, Y)$ の
 平均値を表すに、
 又 $X=0.4$ およ
 び 0.5 の断面に
 おける RM 対
 Y の関係と図2-1,
 2-2 に折線が
 ラフで示す。

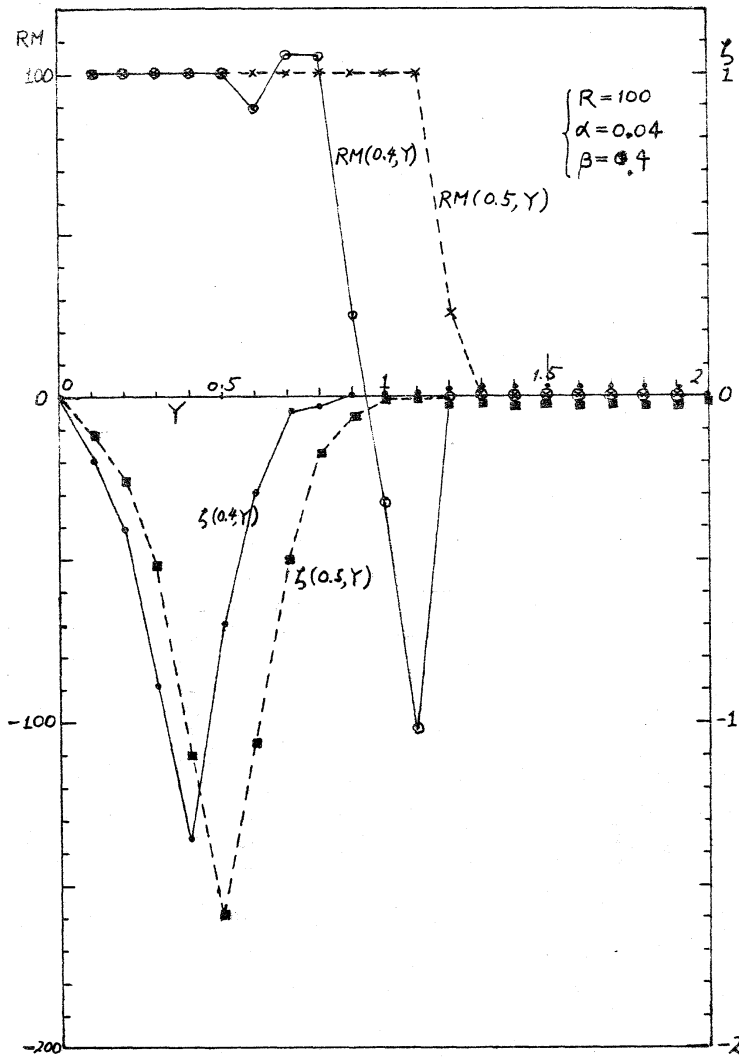


図 2-2

これらの資料

が wake の外の $L > 0$ と 0 とおいたときの誤差がこれらの差
 に集積し、その集積の仕方が α, β によって変化し、 Cd の値に
 関係する。従ってこの方法によるときは解の一意性は失われ
 るのではなからと推定せられる。以後 $L > 0$ とそのまま計
 算する Case C, Case D に限ることとする。

3) Case C, Case D について $n=3, R=0.5, 1, 2, \dots, 100$ の計算結果を表 3(C), 3(D) に示す。

(1) 収束の判定には §5.5) を用いた。

(2) R 欄の (40) は (3.1) _b と、その他は (3.1) _a を使用した。両者の差は僅かである。

(3) Cd の α, β に対する依存性を調べるために、収束後 $\alpha \rightarrow \alpha - 4d\alpha$,

$$\beta \rightarrow \beta - 4d\beta$$

とおい 50 回の計算を行ったが Cd の変化は生じなかった。

(4) 図 3(C), 3(D) に

$R=100$ のばあいの $X=0.4, 0.5$ 断面における RM

対 Y の折線グラフで示した。(図 2-1, 2-2 と比較参照)

R	RM(X, Y)				
	平均値	最大値	最小値	標準偏差	最小値(座標)
0.5	0.50000	0.50004	(.8, 1.1)	0.49996	(.5, 1.1)
1	1.00000	1.00084	(.9, 1.2)	0.99989	(.6, 1.1)
2	1.99999	2.00016	(.7, 1.2)	1.99978	(.8, 1.2)
4	4.00000	4.00000	(.8, 1.2)	3.99991	(.9, .1)
6	6.00000	6.00001	(.9, 1.2)	5.99999	(.9, .3)
8	8.00005	8.00764	(.8, .2)	7.99941	(.9, .3)
9	9.00000	9.00009	(.9, .3)	8.99997	(.9, .3)
10	10.00000	10.00049	(.7, .1)	9.99997	(.8, .1)
15	15.00016	15.02414	(.6, .1)	14.99773	(.7, .3)
20	19.99997	20.00058	(.9, .1)	19.99657	(.8, .1)
25	25.00004	25.00220	(.5, .2)	24.99801	(.8, .1)
30	30.00000	30.00022	(.8, .5)	29.99970	(.9, .2)
40	39.99994	40.00373	(.7, .1)	39.99192	(.6, .4)
(40)	40.00018	40.03482	(.6, .4)	39.99492	(.8, .5)
45	45.00016	45.04071	(.4, .2)	44.98496	(.8, .2)
60	59.99994	60.00200	(.8, .2)	59.98881	(.7, .5)
100	100.00018	100.02587	(.8, .6)	99.99819	(.8, .2)

表 3(C)

(5) 図4に表3(c),3(D)
のR対Cd曲線とTRITON⁸⁾
の実験, TOMOTIKA-AOI⁵⁾
によるOSEEN⁵⁾の近似
と差を示した。又同図
には Cd/Cdf ,
 $\left\{ \frac{Cd(case D)}{Cd(case C)} - 1 \right\} \times 100$
とRとの関係を示して
ある。

CdはCase Dの方が
Case Cより大で、その
割合はRと共に減サレ
R=0.5で19.4%, R=100
で3.8%である。又
OSEEN⁵⁾の近似が妥当と考
えられるRの範囲では
Case DはOSEEN⁵⁾の近似よ
り大きく、Case Cは小さ
くなっている。これに
対して

H	α	β	$d\alpha$	$d\beta$	Cd	Cd/Cdf	RM(X,Y)	
							平均値	最大値(座標)
0.1	0.6	1	0.05	0.05	20.383	1.009	0.50000	0.49859(.7, 1.1)
1	0.6	1	0.05	0.05	12.614	1.026	1.00000	1.00013(.8, 1.2)
2	0.6	1	0.05	0.05	7.956	1.060	2.00001	2.00001(.8, 1.2)
4	0.6	1	0.05	0.05	5.044	1.124	4.00000	4.00013(.8, 1.2)
6	0.5	1	0.05	0.05	4.007	1.185	6.00000	6.00010(.9, 1.3)
8	0.4	1	0.05	0.05	3.446	1.242	7.99997	8.00117(.8, 1.1)
9	0.4	0.8	0.05	0.05	3.243	1.269	8.99999	9.00178(.8, 1.2)
10	0.4	0.8	0.05	0.05	3.074	1.295	10.00001	10.00063(.8, 1.3)
15	0.3	0.8	0.03	0.05	2.524	1.418	14.99993	15.00363(.7, 1.3)
20	0.2	0.8	0.02	0.05	2.222	1.531	20.00000	20.00201(.9, 1.5)
25	0.14	0.8	0.02	0.05	2.208	1.639	24.99997	25.00303(.9, 1.5)
30	0.14	0.8	0.01	0.05	1.889	1.741	30.00000	30.00124(.8, 1.5)
40	0.1	0.8	0.01	0.05	1.703	1.937	39.99997	40.00591(.8, 1.5)
(40)	0.1	0.8	0.01	0.05	1.700	1.930	40.00009	40.00907(.8, 1.5)
45	0.06	0.8	0.005	0.05	1.638	2.033	45.00001	45.00170(.8, 1.5)
60	0.06	0.8	0.005	0.05	1.514	2.320	59.99990	60.00303(.9, 1.5)
100	0.04	0.6	0.005	0.05	1.382	3.105	100.00000	100.00183(.8, 1.6)

表 3(D)

(A) Case CとCase Dは全く別の問題と取扱っている。

(B) Case C

と Case D は mesh
数を増加すれば
同一の C_d を與え
る。

この 2 説があ
る。 $R=0.5$, mesh
count $h=0.05$ につ
いて計算した
結果

Case C: $C_d = 17.406$ Case D: $C_d = 19.193$

となり (B) 説を
支持しているよ
うに見受けられ
る。

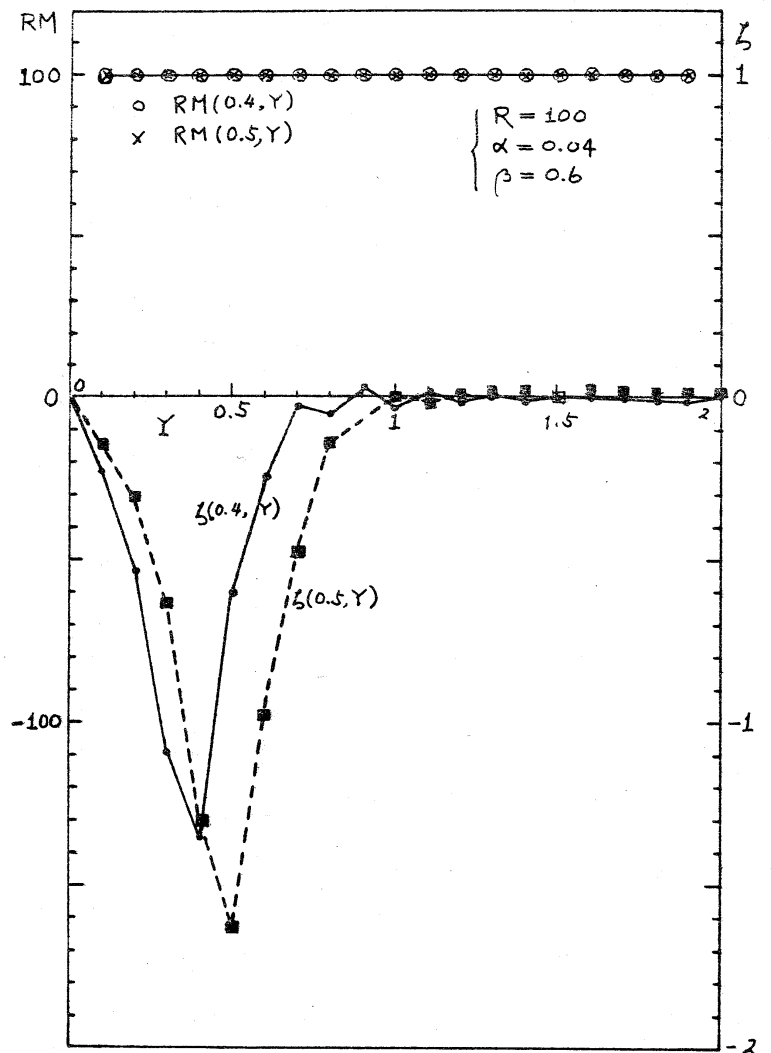


図 3 (C)

(6) C_{dp}/C_{df} については Case C, Case D について大差がない。

(7) 表 3(C), 3(D) には内部格子点 171 点についての $RM(X, Y)$ の平均値, $RM(X, Y)$ の最大値, 最小値およびそれらが現われる座標 (X, Y) を示してある。これらの値より判断して収束は十分であると見られる。

4) 図5に
 R 対 $\Psi(0.9, 0.1)$
 の関係を示す。
 曲線が R 軸を切
 る点が定常渦を
 生じる限界
 Reynolds 数と興
 えるものと考え
 られるが case C,
 case D とは $R \approx 9.4$
 となり TANEDA⁶⁾
 の実験と一致し
 ない。 $\Psi(0.9, Y)$
 を正弦フーリエ
 級数と表わし
 $\Psi(0.9, 0.01)$ を求

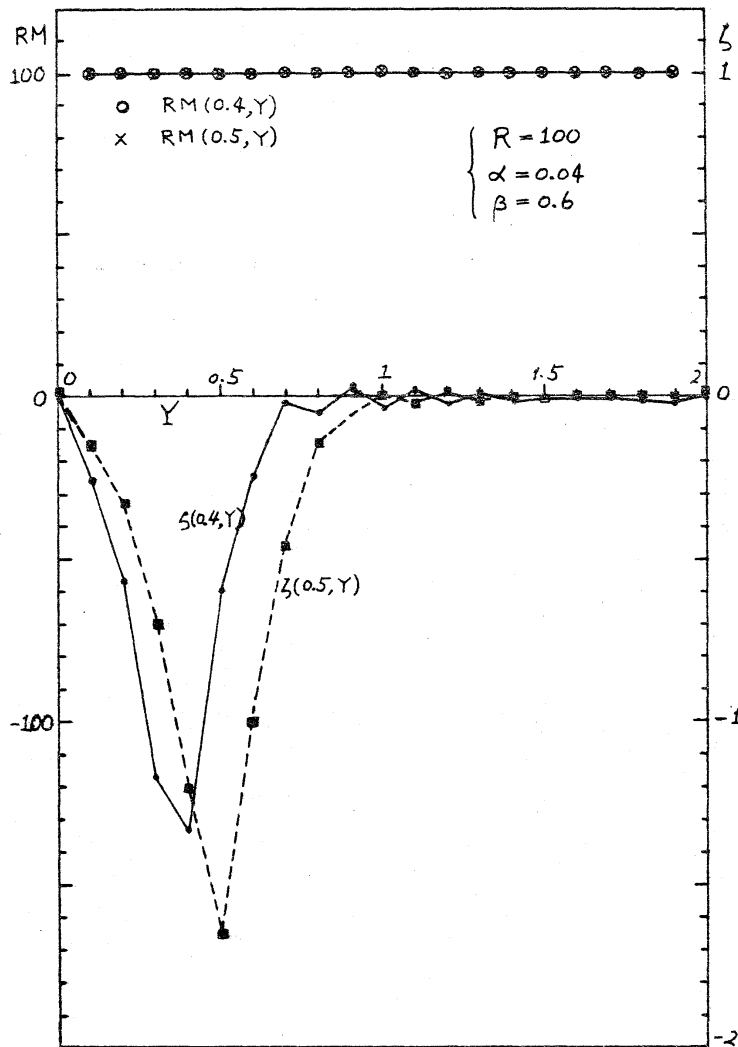


図 3(D)

め同様の考察を行つたが変化は生じなかった。実験との相異
 は mesh の粗さによるものと考えられる。

5) 図6に R 対 $C_p(1.2) - 1$ を図示。TAKAMI⁷⁾ の結果と等
 一致している。

6) 図7に R 対 $C_p(1.0)$ を図示。 $R \approx 35$ 付近に極小値を

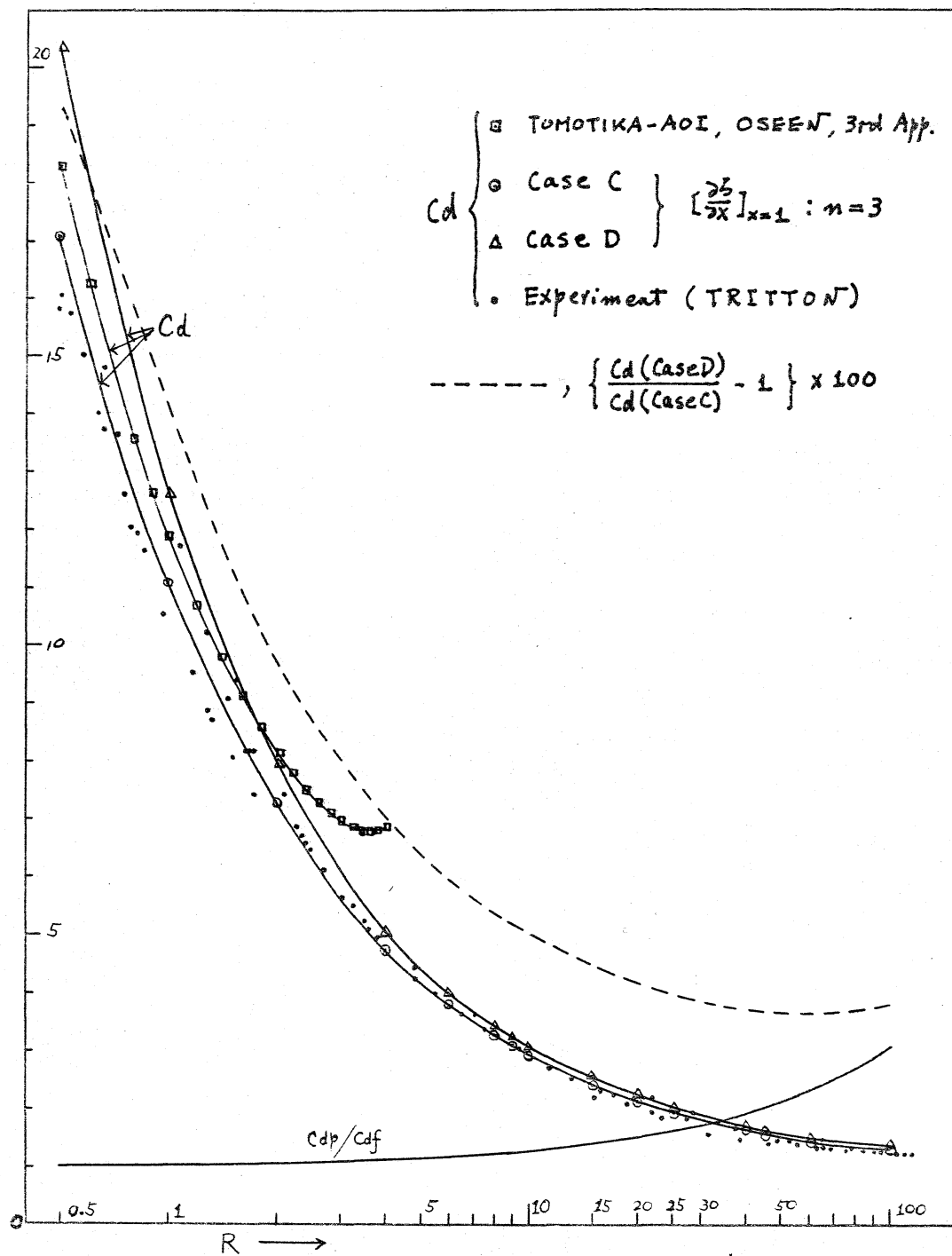


圖 4

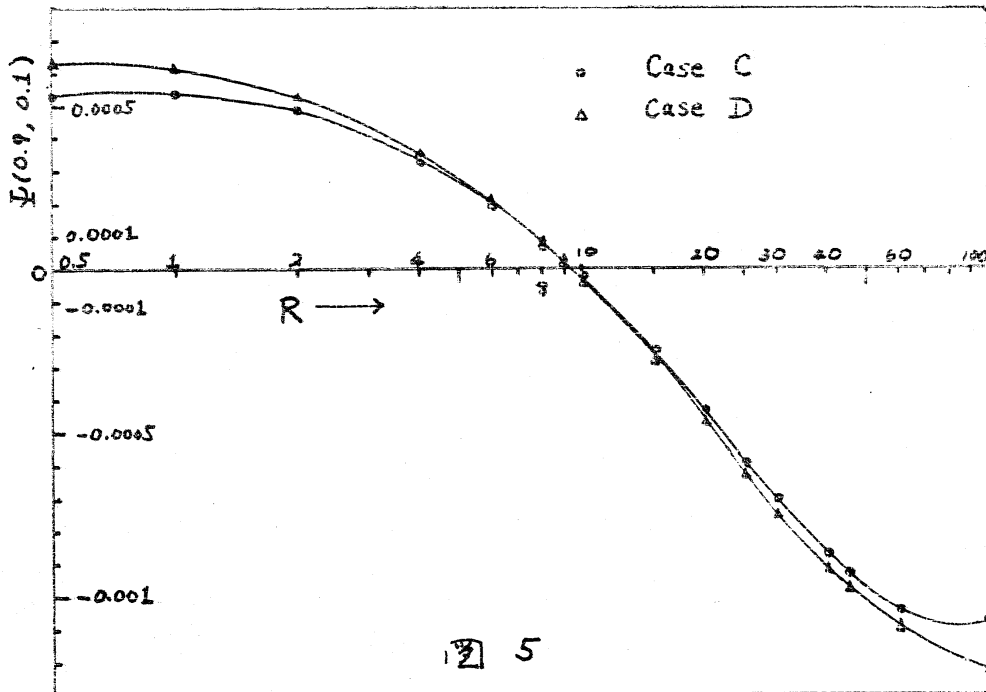


图 5

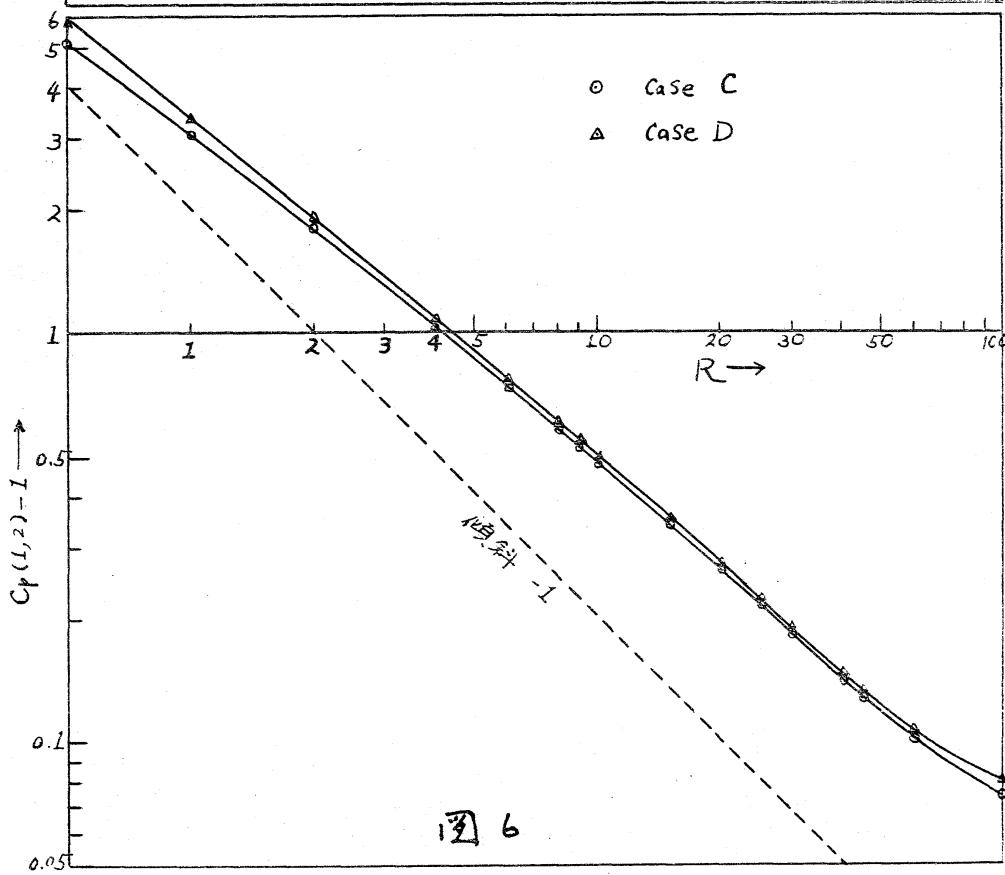


图 6

ち R の増加と共に再び増加し TAKAMI の結果と相異している。
 $mesh$ の粗さに原因するのじあろう。

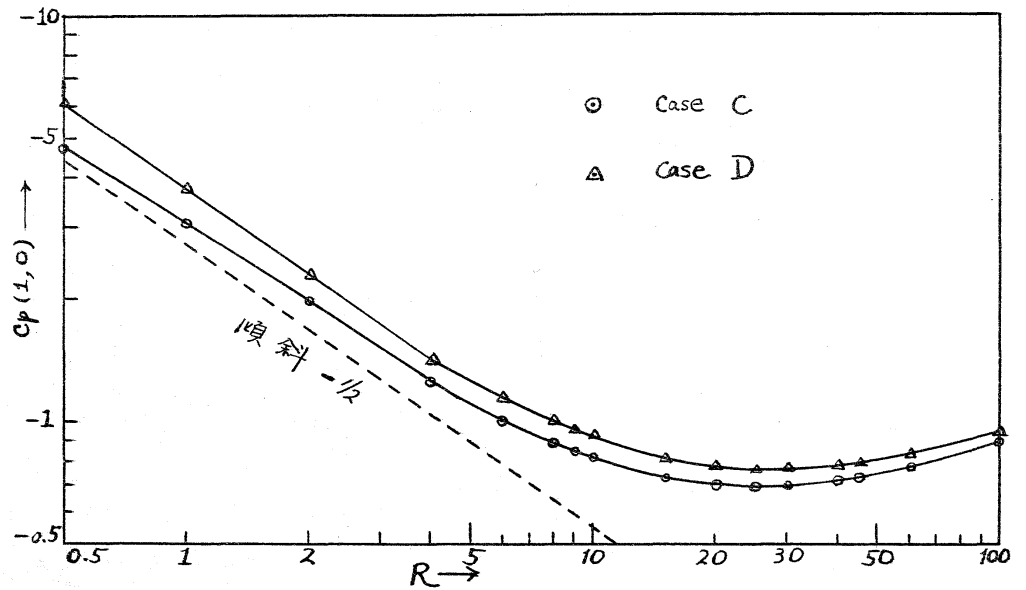


図 7

以上の実験がう早急に確定した結論を得ることは出来ないが

(1) Wakeの外では >0 となったとき 0 とおく Case A, Case B の方法には 1, 2 の問題がある。

(2) 数値計算においては高精度の微分公式を使用するよりも差分近似式と同精度の式を使用すべきじあろう。

(3) N.S. equ. は $R=100$ においても定常解をもつじあろう。

(4) $\psi(0, Y)$ として (3.4) a, (3.4) b の何れを用いても同一の結果を得るのじあろう。

と予想される。(3), (4)については更に $mesh$ 数を増して確認

する必要がある。

この論文は 1966 年 12 月のシンポジウムで Dr. KAWAGUTI に、
又 1967 年 7 月のシンポジウムで Dr. TAKAMI に代読していただいた講演を補足訂正したものである。

計算に対しては堺米中であった Dr. KAWAGUTI より要。有
益な助言をいただいた。又 Dr. TAKAMI よりもシンポジウムの
前後にわたって要。有益な助言や情報の伝達をいただいた。
両博士に深甚の謝意を表する次第である。

文 献

- 1) M. KAWAGUTI ; J. Phys. Soc. Japan , 8 (1953)
- 2) C. J. APELT ; A.R.C. Tech. Rep. R. & M. No. 3175 (1961)
- 3) I. IMAI ; Proc. Roy. Soc. London, A208 (1951)
- 4) W. G. BICKLEY ; Math. Gazette , 23 (1939)
- 5) S. TOMOTIKA and T. AOI ; Quart. J. Mech. App. Math. 3 (1950)
- 6) S. TAVEDA ; J. Phys. Soc. Japan , 11 (1956)
- 7) H. TAKAMI ; 数理解析研究所講究録 NO. 24 (1967)
- 8) D. J. TRITTON ; J. Fluid Mech. 6 (1959)

