

Algebraic independence of the values of power series generated by linear recurrences

慶應大学大学院 田中 孝明 (TAKA-AKI TANAKA)

1 定理

本講演において $\{a_k\}_{k \geq 0}$ は漸化式

$$a_{k+n} = c_1 a_{k+n-1} + \cdots + c_n a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

をみたす線形回帰数列とする. ただし, 初期値 $a_0, \dots, a_{n-1}$ および $c_1, \dots, c_n$ は非負整数であり, $a_0, \dots, a_{n-1}$ のうち少なくともひとつは 0 ではなく, $c_n \neq 0$ と仮定する. 以下,

$$\Phi(X) = X^n - c_1 X^{n-1} - \cdots - c_n \quad (2)$$

とおく. $\mathbb{Q}$ を有理数体とする. Mahler は次の定理を証明した.

Theorem(Mahler [4]). $\{a_k\}_{k \geq 0}$ を (1) をみたす線形回帰数列とする. $\Phi(X)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約で, その根 $\rho_1, \dots, \rho_n$ は, $\rho_1 > \max\{1, |\rho_2|, \dots, |\rho_n|\}$ をみたすとする. このとき, α を $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数とすると, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{a_k}$ は超越数である.

以下, 定理を述べるため記号を準備する. (1) をみたす 2 つの線形回帰数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$, $\{b_k\}_{k \geq 0}$ に対し, ある非負整数 l が存在して,

$$a_k = b_{k+l} \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad \text{または} \quad b_k = a_{k+l} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

となるとき, $\{a_k\}_{k \geq 0} \sim \{b_k\}_{k \geq 0}$ とかく. $\sim$ は同値関係である. この否定を $\{a_k\}_{k \geq 0} \not\sim \{b_k\}_{k \geq 0}$ とかく. 関数 $f(z)$ の l 階導関数を $f^{(l)}(z)$ と表す. $\overline{\mathbb{Q}}$ を代数的数の全体とする. 本講演において我々は次の定理を証明する.

Theorem 1. $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ ($i = 1, \dots, s$) を (1) をみたす s 個の線形回帰数列とし, $\Phi(X)$ は ± 1 を根に持たず, 相異なる根の比はいずれも 1 の巾根でないとする.

$$f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(i)}} \quad (1 \leq i \leq s)$$

とおく. α を $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数とする. このとき, $\{f_i^{(l)}(\alpha)\}_{1 \leq i \leq s, l \geq 0}$ が代数的独立であるための必要十分条件は $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0} \not\sim \{a_k^{(j)}\}_{k \geq 0}$ ($1 \leq i < j \leq s$) である.

Theorem 2. $\{a_k\}_{k \geq 0}$ を (1) をみたす線形回帰数列で等比数列でないものとする. $\Phi(X)$ は Theorem 1 と同じ条件をみたすものとする.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k}$$

とおく. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を $0 < |\alpha_i| < 1$ ($1 \leq i \leq r$) をみたす代数的数とする. このとき, 次の 3 つの条件は同値である.

- (i) $\{f^{(l)}(\alpha_i)\}_{1 \leq i \leq r, l \geq 0}$ は代数的従属である.
- (ii) $1, f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_r)$ は $\overline{Q}$ 上線形従属である.
- (iii) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ のある空でない部分集合 $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}\}$ に対して, 1 の巾根 $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ と 0 でない代数的数 γ が存在して, $\alpha_{i_q} = \zeta_q \gamma$ ($1 \leq q \leq s$) であり, さらに, 少なくともひとつは 0 でない代数的数 $d_1, \dots, d_s$ が存在して,

$$\sum_{q=1}^s d_q \zeta_q^{a_k} = 0$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つ.

Remark 1. $\Phi(X)$ が Q 上既約な 2 次以上の多項式である場合には, その根 $\rho_1, \dots, \rho_n$ が $\rho_1 > \max\{1, |\rho_2|, \dots, |\rho_n|\}$ をみたすための必要十分条件は, ρ_i/ρ_j ($i \neq j$) がいずれも 1 の巾根でないことである (第 2 節参照). 従って, 我々の定理における $\Phi(X)$ に関する条件は, Mahler [4] の定理における条件よりも弱い.

Remark 2. Theorem 2 では $\{a_k\}_{k \geq 0}$ が等比数列である場合を除いたが, その場合は Loxton-van der Poorten [3] により解決されている.

2 補題

$\Omega = (\omega_{ij})$ は非負整数を成分とする n 次正方行列とする. このとき, Ω の固有値の絶対値の最大値 ρ はそれ自身 Ω の固有値となる (cf. Gantmacher [2, p.66, Theorem 3]). C を複素数の全体とし, C^n の点 $z = (z_1, \dots, z_n)$ に対して, 変換 $\Omega: C^n \rightarrow C^n$ を

$$\Omega z = \left(\prod_{j=1}^n z_j^{\omega_{1j}}, \dots, \prod_{j=1}^n z_j^{\omega_{nj}} \right) \quad (3)$$

で定義する. 行列 Ω と代数点 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ は次の性質を持つと仮定する. 但し, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ はいずれも 0 でない代数的数とする.

(I) Ω は正則で, 1 の巾根を固有値に持たない. これより $\rho > 1$ が従う.

(II) Ω^k ($k = 1, 2, \dots$) の各成分は $O(\rho^k)$ である.

(III) $\Omega^k \alpha = (\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)})$ とおくとき, 十分大きなすべての k に対して,

$$\log |\alpha_i^{(k)}| \leq -c\rho^k \quad (1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ. ここで, c は正定数である.

(IV) 原点の近傍で収束し恒等的に 0 ではない n 変数の任意の巾級数

$f(z) \in C[[z_1, \dots, z_n]]$ に対して, $f(\Omega^k \alpha) \neq 0$ となる自然数 k が無限に多く存在する.

条件 (II) は Ω の絶対値 ρ の固有値がすべて Ω の最小多項式の単根ならばみたされる.

以下, K は代数体とする. 体 K 上の n 変数多項式環及び形式的巾級数環をそれぞれ $K[z_1, \dots, z_n]$, $K[[z_1, \dots, z_n]]$ で表す.

Lemma 1(Nishioka [7]). $f_1(z), \dots, f_m(z) \in K[[z_1, \dots, z_n]]$ は原点を中心とする多重円板 U で収束し, 関数方程式

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1(\Omega z) \\ \vdots \\ f_m(\Omega z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(z) \\ \vdots \\ b_m(z) \end{pmatrix} \quad (4)$$

をみたすとする. ただし, A は K の元を成分とする m 次正方形行列で, $b_i(z) \in K[z_1, \dots, z_n]$ ($1 \leq i \leq m$) である. さらに, n 次正方形行列 Ω と $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (但し, 各 α_i は 0 でない代数的数) は条件 (I)~(IV) をみたし, $\alpha \in U$ とする. このとき, $f_1(z), \dots, f_r(z)$ ($r \leq m$) が K 上 modulo $K[z_1, \dots, z_n]$ で線形独立なら, $f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)$ は代数的独立である.

以下, $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ とおく.

Lemma 2(Skolem-Mahler-Lech's theorem, cf. Cassels [1] and Nishioka [6]). C を標数 0 の体とする. $\rho_1, \dots, \rho_d$ は C の 0 でない元で, $i \neq j$ なら $\rho_i \neq \rho_j$ であるとする. $P_1(X), \dots, P_d(X)$ は C の元を係数とする 0 でない 1 変数の多項式とする.

$$R = \left\{ k \in N_0 \mid f(k) = \sum_{i=1}^d P_i(k) \rho_i^k = 0 \right\} \quad (5)$$

とおく. このとき, R が無限集合なら, ある $i \neq j$ に対して, ρ_i/ρ_j は 1 の巾根で, R は有限集合と有限個の等差数列の和集合である.

Lemma 3(Masser [5]). 非負整数を成分とする n 次正方形行列 Ω は条件 (I) をみたし, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (但し, 各 α_i は 0 でない代数的数) は $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega^k \alpha = (0, \dots, 0)$ をみたすとする. このとき, 条件 (IV) の否定と次の条件は同値である.

少なくともひとつは 0 でない整数 $i_1, \dots, i_n$ と自然数 a, b があって,

$$(\alpha_1^{(k)})^{i_1} \cdots (\alpha_n^{(k)})^{i_n} = 1$$

がすべての $k = a + lb$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) に対して成り立つ.

$\{a_k\}_{k \geq 0}$ を (1) をみたす線形回帰数列とする.

$$\Omega = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ c_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

とおく.

Lemma 4. $\Phi(X)$ は ± 1 を根に持たず, 相異なる根の比はいずれも 1 の巾根でないとする. α は $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数とする. このとき, (6) の行列 Ω と $\alpha = (1, \dots, 1, \alpha)$ は条件 (I)~(IV) をみたす.

Proof. $\Phi(X)$ が ± 1 以外の 1 の巾根を根に持つとすると, その複素共役も 1 の巾根で $\Phi(X)$ の根となるから仮定に反する. 従って, $\Phi(X)$ は 1 の巾根を根に持たない. (6) の行列 Ω の固有多項式は $\Phi(X)$ であるから条件 (I) はみたされる. Ω の相異なる固有値を $\rho_1, \dots, \rho_t$ ($t \leq n$) とする. Ω の各成分は 0 以上だから, $\rho_1 \geq \max\{|\rho_2|, \dots, |\rho_t|\}$ であるとしてよい. 条件 (I) がみたされるから, $\rho_1 > 1$ である.

$\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ ($i = 0, \dots, n-1$) は初期値を

$$a_0^{(i)} = 0, \dots, a_{i-1}^{(i)} = 0, a_i^{(i)} = 1, a_{i+1}^{(i)} = 0, \dots, a_{n-1}^{(i)} = 0$$

とする漸化式

$$a_{k+n}^{(i)} = c_1 a_{k+n-1}^{(i)} + \cdots + c_n a_k^{(i)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

により定義される線形回帰数列とする. $\Omega^{k+1} = \Omega^k \Omega$ より,

$$\Omega^k = \begin{pmatrix} a_{k+n-1}^{(n-1)} & \cdots & a_k^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+n-1}^{(0)} & \cdots & a_k^{(0)} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

である. 各 i に対し, $a_k^{(i)}$ は (5) の $f(k)$ の形に表されるから, Lemma 2 より, 数列 $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ の中に現れる 0 の個数は有限個である. 故に, ある自然数 λ で, Ω^λ の各成分がすべて正であるものが存在する. 従って, Perron の定理 (cf. Gantmacher [2, p.53, Theorem 1]) より, ρ_1 は $\Phi(X)$ の単根で, $\rho_1 > \max\{|\rho_2|, \dots, |\rho_t|\}$ である. よって,

$$a_k^{(i)} = b^{(i)} \rho_1^k + o(\rho_1^k) \quad (0 \leq i \leq n-1) \quad (7)$$

とかけるから条件 (II) もみたされる.

次に, すべての i に対して, $b^{(i)} > 0$ であることを示す. 少なくともひとつの i については, $b^{(i)} \neq 0$ である. このような i に対して, $a_k^{(i)} \geq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) だから, $b^{(i)} > 0$ であることが分かる. 従って, すべての i に対して, $b^{(i)}$ は 0 または正である. $\Omega^{k+1} = \Omega\Omega^k$ より,

$$\begin{pmatrix} a_{k+n}^{(n-1)} & \cdots & a_{k+1}^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+n}^{(0)} & \cdots & a_{k+1}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ c_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+n-1}^{(n-1)} & \cdots & a_k^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+n-1}^{(0)} & \cdots & a_k^{(0)} \end{pmatrix}$$

だから,

$$a_{k+1}^{(i)} = c_{n-i}a_k^{(n-1)} + a_k^{(i-1)} \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad a_{k+1}^{(0)} = c_n a_k^{(n-1)}$$

である. これに, (7) を代入して ρ_1^k の係数を比較すると,

$$b^{(i)}\rho_1 = c_{n-i}b^{(n-1)} + b^{(i-1)} \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad b^{(0)}\rho_1 = c_n b^{(n-1)}$$

となる. 従って,

$$b^{(i)} \geq b^{(i-1)}/\rho_1 \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad b^{(0)} \geq b^{(n-1)}/\rho_1$$

である. これより, すべての i に対して, $b^{(i)} > 0$ であることが分かる.

$\Omega^k \alpha = (\alpha_{n-1}^{(k)}, \dots, \alpha_0^{(k)})$ とおくと,

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(k)} &= (a_{n-1}^{(i)}, \dots, a_0^{(i)}) \Omega^k \alpha \\ &= (a_{k+n-1}^{(i)}, \dots, a_k^{(i)}) \alpha \\ &= \alpha^{a_k^{(i)}} \quad (0 \leq i \leq n-1) \end{aligned}$$

であるから, Ω と α は条件 (III) をみたす.

次に, Lemma 3 を適用して, 条件 (IV) がみたされることをみる. 少なくともひとつは 0 でない整数 $i_0, \dots, i_{n-1}$ と自然数 a, b があって,

$$(\alpha_{n-1}^{(k)})^{i_{n-1}} \cdots (\alpha_0^{(k)})^{i_0} = 1$$

がすべての $k = a + lb$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) に対して成り立つとする. $\{a_k^*\}_{k \geq 0}$ を初期値 $a_0 = i_0, \dots, a_{n-1} = i_{n-1}$ で漸化式 (1) により定義される線形回帰数列とすると, すべての $k = a + lb$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) に対して,

$$\alpha^{a_k^*} = (i_{n-1}, \dots, i_0) \Omega^k \alpha = 1,$$

すなわち, $a_k^* = 0$ である. $\{a_k^*\}_{k \geq 0}$ は恒等的に 0 ではないから, Lemma 2 より, ある異なる i と j で, ρ_i/ρ_j が 1 の巾根であるものが存在する. これは, 仮定に反するから, 条件 (IV) もみたされねばならない. $\square$

Remark 3. $\{a_k\}_{k \geq 0}$ は (1) をみたす線形回帰数列とする. $a_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_k^{(i)}$ であるから, Lemma 4 の条件の下では

$$a_k = b \rho_1^k + o(\rho_1^k)$$

と表すと, $b = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^{(i)} > 0$ である. 従って, 巾級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k}$ は $|z| < 1$ のとき収束する.

Proof of the statement in Remark 1. 十分性は Lemma 4 の証明の中で示されているから, 必要性を示す. ある異なる i と j に対し ρ_i/ρ_j が 1 の巾根であると仮定すると, $\bar{Q}$ の自己同型 σ で $\rho_i^\sigma = \rho_1$ となるものに対して, ρ_1/ρ_j^σ は 1 の巾根である. 従って, $\rho_1 = |\rho_j^\sigma|$ である. これは $\rho_1 > \max\{1, |\rho_2|, \dots, |\rho_n|\}$ であることに反する. $\square$

Lemma 5. $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ ($i = 1, 2$) を (1) をみたす線形回帰数列とする. $\Phi(X)$ は ± 1 を根に持たず, 相異なる根の比はいずれも 1 の巾根でないとする. 数列 $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ の中に現れる数全体を $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}^*$ とかくと, Remark 3 より, $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}^*$ ($i = 1, 2$) は無限集合である. このとき, $\{a_k^{(1)}\}_{k \geq 0}^* \cap \{a_k^{(2)}\}_{k \geq 0}^*$ が無限集合であるための必要十分条件は, $\{a_k^{(1)}\}_{k \geq 0} \sim \{a_k^{(2)}\}_{k \geq 0}$ である.

Proof. 十分性は明かである. 必要性を示す. $\{a_k^{(1)}\}_{k \geq 0}^* \cap \{a_k^{(2)}\}_{k \geq 0}^*$ が無限集合であるとする. 無限に多くの非負整数 k_1, k_2 に対して, $a_{k_1}^{(1)} = a_{k_2}^{(2)}$ となる. 一方, Remark 3 より,

$$a_k^{(i)} = b^{(i)} \rho_1^k + o(\rho_1^k) \quad (i = 1, 2)$$

である. ただし, $\rho_1 > 1$ で, $b^{(1)}, b^{(2)} > 0$ である. 従って, 任意の正の数 ε に対して, ある非負整数 $k_0 = k_0(\varepsilon)$ が存在して, $k \geq k_0$ のとき,

$$(b^{(i)} - \varepsilon) \rho_1^k \leq a_k^{(i)} \leq (b^{(i)} + \varepsilon) \rho_1^k \quad (i = 1, 2)$$

となる. 故に, $a_{k_1}^{(1)} = a_{k_2}^{(2)}$ なる無限に多くの k_1, k_2 に対して, $k_1, k_2 \geq k_0$ のとき,

$$(b^{(1)} - \varepsilon) \rho_1^{k_1} \leq (b^{(2)} + \varepsilon) \rho_1^{k_2}, \quad (b^{(2)} - \varepsilon) \rho_1^{k_2} \leq (b^{(1)} + \varepsilon) \rho_1^{k_1}$$

となる. $\varepsilon < \min\{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ にとれば,

$$0 < \frac{b^{(1)} - \varepsilon}{b^{(2)} + \varepsilon} \leq \rho_1^{k_2 - k_1} \leq \frac{b^{(1)} + \varepsilon}{b^{(2)} - \varepsilon}$$

である. 従って, ε を十分小さくとれば, $a_{k_1}^{(1)} = a_{k_2}^{(2)}$ なる k_1, k_2 が k_0 より大きいとき, $k_2 - k_1$ は一定の整数 l に等しくなる.

$$b_k = a_k^{(1)} - a_{k+l}^{(2)} \quad (k \geq \max\{0, -l\})$$

とおくと, $\{b_k\}$ は (1) と同じ形の漸化式をみたす線形回帰数列で, 無限に多くの 0 を含む. $\{b_k\}$ が恒等的に 0 でないとすると, Lemma 2 により仮定に反する. よって, $k \geq \max\{0, -l\}$ のとき $b_k = 0$ であるから補題が証明された. $\square$

3 定理の証明

Proof of Theorem 1. 必要性は明かである. 十分性を示す. n 変数の単項式

$$P_i(z) = z_1^{a_{n-1}^{(i)}} \cdots z_n^{a_0^{(i)}} \quad (1 \leq i \leq s)$$

に (6) の行列 Ω による変数変換 (3) を行くと,

$$P_i(\Omega^k z) = z_1^{a_{k+n-1}^{(i)}} \cdots z_n^{a_k^{(i)}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となる.

$$g_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_i(\Omega^k z) \quad (1 \leq i \leq s)$$

とおくと, $f_i(z) = g_i(1, \dots, 1, z)$ で, $g_i(z)$ は関数方程式

$$g_i(z) = g_i(\Omega z) + P_i(z) \quad (1 \leq i \leq s)$$

をみたす. これに,

$$D_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, D_n = z_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

を作用させると,

$D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} g_i(z)$ ($k_1 + \cdots + k_n = L$) は $\{D_1^{l_1} \cdots D_n^{l_n} g_i(\Omega z)\}_{l_1 + \cdots + l_n = L}$ の $\mathcal{Q}$ 上の線形結合に $\mathcal{Q}[z_1, \dots, z_n]$ の元を加えたものになることが分かる. 従って, 任意の非負整数 L に対して $\{D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n} g_i(z)\}_{1 \leq i \leq s, k_1 + \cdots + k_n \leq L}$ は (4) の形の関数方程式をみたし, Lemma 4 より, Ω と $\alpha = (1, \dots, 1, \alpha)$ は条件 (I)~(IV) をみたす. $\{f_i^{(l)}(\alpha)\}_{1 \leq i \leq s, 0 \leq l \leq L}$ が代数的従属であるとする, $\{D_n^l g_i(\alpha)\}_{1 \leq i \leq s, 0 \leq l \leq L}$ も代数的従属であり, Lemma 1 より, $\{D_n^l g_i(z)\}_{1 \leq i \leq s, 0 \leq l \leq L}$ は $\mathcal{Q}$ 上 modulo $\mathcal{Q}[z_1, \dots, z_n]$ で線形従属となる. すなわち, 少なくともひとつは 0 でない有理数 c_{il} ($1 \leq i \leq s, 0 \leq l \leq L$) が存在して,

$$h(z) = \sum_{i=1}^s \sum_{l=0}^L c_{il} D_n^l g_i(z) \in \mathcal{Q}[z_1, \dots, z_n]$$

となる.

$$R_i(X) = \sum_{l=0}^L c_{il} X^l \quad (1 \leq i \leq s)$$

とおくと,

$$h(z) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{\infty} R_i(a_k^{(i)}) z_1^{a_{k+n-1}^{(i)}} \cdots z_n^{a_k^{(i)}}$$

である.

$$S = \{i \in \{1, \dots, s\} \mid R_i(X) \neq 0\}$$

とおくと, $S \neq \emptyset$ である. 非負整数 k_0 が存在して, $k \geq k_0$ のとき $a_{k+1}^{(i)} > a_k^{(i)}$ ($1 \leq i \leq s$) であるから, 任意の $i \in S$ について, 十分大きなすべての k に対して $R_i(a_k^{(i)}) \neq 0$

である. 故に, S の元の個数が 1 のときは $h(z) \notin Q[z_1, \dots, z_n]$ となり矛盾である. S の元の個数が 2 以上のとき, Lemma 5 と同じ記法で, $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}^* \cap \{a_k^{(j)}\}_{k \geq 0}^*$ がすべての異なる $i, j \in S$ に対して有限集合であるならば, $h(z) \notin Q[z_1, \dots, z_n]$ となり矛盾である. 従って, ある異なる $i, j \in S$ に対して, $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}^* \cap \{a_k^{(j)}\}_{k \geq 0}^*$ は無限集合である. よって, Lemma 5 より, $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}^* \sim \{a_k^{(j)}\}_{k \geq 0}^*$ である. $\square$

Proof of Theorem 2. (iii) $\Rightarrow$ (ii) 及び (ii) $\Rightarrow$ (i) は明かである. (i) $\Rightarrow$ (iii) を示す.

乗法的独立な代数的数 $\beta_1, \dots, \beta_m$ で $0 < |\beta_j| < 1$ ($1 \leq j \leq m$) をみだし,

$$\alpha_i = \zeta_i \prod_{j=1}^m \beta_j^{l_{ij}} \quad (1 \leq i \leq r) \quad (8)$$

となるものが存在する. ただし, $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ は 1 の巾根で, l_{ij} ($1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq m$) は非負整数である (cf. Loxton and van der Poorten [3], Nishioka [6, p.75, 補題 19]). y_{jp} ($1 \leq j \leq m, 1 \leq p \leq n$) を変数とし, $\mathbf{y} = (y_{11}, \dots, y_{1n}, \dots, y_{m1}, \dots, y_{mn})$ とする.

$$g_i(\mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_i^{a_k} \prod_{j=1}^m (y_{j1}^{a_{k+n-1}} \dots y_{jn}^{a_k})^{l_{ij}} \quad (1 \leq i \leq r)$$

とおくと,

$$f(\alpha_i) = g_i(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_m, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, \beta_m)$$

である. $1 \leq i \leq r$ に対して $\zeta_i^N = 1$ となる自然数 N をとる. ある自然数 t と非負整数 u が存在して, $k \geq u$ のとき $a_{k+t} \equiv a_k \pmod{N}$ となる.

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ c_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

とし,

$$\Omega = \text{diag}(\underbrace{\Omega_1^t, \dots, \Omega_1^t}_m) \quad (10)$$

とおく.

$$g_i(\Omega \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_i^{a_k} \prod_{j=1}^m (y_{j1}^{a_{k+t+n-1}} \dots y_{jn}^{a_{k+t}})^{l_{ij}}$$

であるから, $1 \leq i \leq r$ に対し

$$h_i(\mathbf{y}) = \sum_{k=u}^{\infty} \zeta_i^{a_k} \prod_{j=1}^m (y_{j1}^{a_{k+t+n-1}} \dots y_{jn}^{a_{k+t}})^{l_{ij}} = \sum_{k=t+u}^{\infty} \zeta_i^{a_k} \prod_{j=1}^m (y_{j1}^{a_{k+n-1}} \dots y_{jn}^{a_k})^{l_{ij}}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{y}) - h_i(\mathbf{y}) &= \sum_{k=0}^{t+u-1} \zeta_i^{a_k} \prod_{j=1}^m (y_{j1}^{a_{k+n-1}} \cdots y_{jn}^{a_k})^{l_{ij}}, \\ g_i(\Omega \mathbf{y}) - h_i(\mathbf{y}) &= \sum_{k=0}^{u-1} \zeta_i^{a_k} \prod_{j=1}^m (y_{j1}^{a_{k+t+n-1}} \cdots y_{jn}^{a_{k+t}})^{l_{ij}}. \end{aligned}$$

従って,

$$g_i(\mathbf{y}) - g_i(\Omega \mathbf{y}) \in \overline{Q}[\mathbf{y}] \quad (1 \leq i \leq r) \quad (11)$$

である. $|\alpha_i| < 1$ ($1 \leq i \leq r$) であるから, (8) より $l_{ij} > 0$ となる j が各 i に対して少なくともひとつ存在する. 各 i に対してそのような j をひとつ選んで固定し,

$$D_{i1} = l_{ij}^{-1} y_{j1} \frac{\partial}{\partial y_{j1}}, \dots, D_{in} = l_{ij}^{-1} y_{jn} \frac{\partial}{\partial y_{jn}}$$

とおく. これらを (11) に作用させると, $D_{i1}^{k_1} \cdots D_{in}^{k_n} g_i(\mathbf{y})$ ($k_1 + \cdots + k_n = L$) は $\{D_{i1}^{l_1} \cdots D_{in}^{l_n} g_i(\Omega \mathbf{y})\}_{l_1 + \cdots + l_n = L}$ の Q 上の線形結合に $\overline{Q}[\mathbf{y}]$ の元を加えたものになることが分かる.

次に, (10) の行列 Ω と $\beta = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, \beta_1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, \beta_m)$ が条件 (I)~(IV) をみたすことを示す. Lemma 4 の証明より, (9) の行列 Ω_1 は条件 (I) をみたし, その相異なる固有値 $\rho_1, \dots, \rho_d$ ($d \leq n$) は $\rho_1 > \max\{|\rho_2|, \dots, |\rho_d|\}$ で ρ_1 は Ω_1 の固有多項式の単根であるから, 行列 Ω も条件 (I), (II) をみたす.

$$\Omega^k \beta = (\beta_{11}^{(k)}, \dots, \beta_{1n}^{(k)}, \dots, \beta_{m1}^{(k)}, \dots, \beta_{mn}^{(k)}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

とおく. 線形回帰数列 $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ ($i = 0, \dots, n-1$) を Lemma 4 の証明と同様に定義すると,

$$\beta_{jp}^{(k)} = \beta_j a_{kt}^{(n-p)} \quad (1 \leq j \leq m, 1 \leq p \leq n)$$

である.

$$a_{kt}^{(n-p)} = b^{(n-p)} (\rho_1^t)^k + o((\rho_1^t)^k), \quad b^{(n-p)} > 0 \quad (1 \leq p \leq n)$$

であるから, Ω と β は条件 (III) をみたす.

最後に, Lemma 3 を適用して条件 (IV) がみたされることをみる. 少なくともひとつは 0 でない mn 個の整数 $i_{11}, \dots, i_{1n}, \dots, i_{m1}, \dots, i_{mn}$ と自然数 a, b があって,

$$\prod_{j=1}^m \prod_{p=1}^n \beta_{jp}^{(k) i_{jp}} = 1$$

がすべての $k = a + lb$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) に対して成り立つとする. $\{a_k^{(j)}\}_{k \geq 0}$ ($j = 1, \dots, m$) を初期値 $a_0^{(j)} = i_{jn}, \dots, a_{n-1}^{(j)} = i_{j1}$ で漸化式

$$a_{k+n}^{(j)} = c_1 a_{k+n-1}^{(j)} + \cdots + c_n a_k^{(j)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

により定義される線形回帰数列とすると, すべての $k = a + lb$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) に対して,

$$\prod_{j=1}^m \beta_j^{a_{kt}^{(j)}} = 1$$

である. 少なくともひとつの j に対して, $\{a_k^{(j)}\}_{k \geq 0}$ は恒等的に 0 ではない. このような j に対して, Lemma 2 より, ある $k_0 = a + l_0 b$ ($l_0 \in \mathbb{N}_0$) で $a_{k_0 t}^{(j)} \neq 0$ となるものが存在する. これは, $\beta_1, \dots, \beta_m$ が乗法的独立であることに反するから, 条件 (IV) もみたされねばならない.

$\{f^{(l)}(\alpha_i)\}_{1 \leq i \leq r, 0 \leq l \leq L}$ が代数的従属であるとして, $\{D_{in}^l g_i(\beta)\}_{1 \leq i \leq r, 0 \leq l \leq L}$ も代数的従属であり, Lemma 1 より, $\{D_{in}^l g_i(\mathbf{y})\}_{1 \leq i \leq r, 0 \leq l \leq L}$ は $\overline{Q}$ 上 modulo $\overline{Q}[\mathbf{y}]$ で線形従属となる. すなわち, 少なくともひとつは 0 でない代数的数 c_{il} ($1 \leq i \leq r, 0 \leq l \leq L$) が存在して,

$$G(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^L c_{il} D_{in}^l g_i(\mathbf{y}) \in \overline{Q}[\mathbf{y}]$$

となる.

$$R_i(X) = \sum_{l=0}^L c_{il} X^l \quad (1 \leq i \leq r)$$

とおくと,

$$G(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} R_i(a_k) \zeta_i^{a_k} \prod_{j=1}^m (y_{j1}^{a_{k+n-1}} \dots y_{jn}^{a_k})^{l_{ij}}$$

である. 従って,

$$\begin{aligned} G(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, y_1, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, y_m) &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} R_i(a_k) \zeta_i^{a_k} \left(\prod_{j=1}^m y_j^{l_{ij}} \right)^{a_k} \\ &\in \overline{Q}[y_1, \dots, y_m] \end{aligned} \quad (12)$$

となる.

$$S = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid R_i(X) \neq 0\}$$

とおくと, $S \neq \emptyset$ である. $\lambda \in S$ とする.

$$\{i_1, \dots, i_s\} = \{i \in S \mid l_{ij} = l_{\lambda j} \quad (1 \leq j \leq m)\}$$

とおく.

$$\sum_{q=1}^s R_{i_q}(a_k) \zeta_{i_q}^{a_k} = 0 \quad (13)$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つことを示す. そうでないとすると, (12) が成り立つことから, ある $\mu \in S \setminus \{i_1, \dots, i_s\}$ に対して

$$\left(\prod_{j=1}^m y_j^{l_{\lambda j}} \right)^{a_{k_1}} = \left(\prod_{j=1}^m y_j^{l_{\mu j}} \right)^{a_{k_2}}$$

をみたす無限に多くの非負整数 k_1, k_2 が存在しなければならない。このとき、 $1 \leq j \leq m$ に対し、 $l_{\lambda_j} a_{k_1} = l_{\mu_j} a_{k_2}$ となるから、各 j について、 $l_{\lambda_j} = l_{\mu_j} = 0$ となるか、または、 $l_{\lambda_j} l_{\mu_j} > 0$ となるかのどちらかである。

$$T = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid l_{\lambda_j} l_{\mu_j} > 0\}$$

とおくと、 $T \neq \emptyset$ で、任意の $j \in T$ に対して l_{λ_j}/l_{μ_j} はある正の有理数 c に等しい。また、Lemma 5 より、任意の $j \in T$ に対して、 $\{l_{\lambda_j} a_k\}_{k \geq 0} \sim \{l_{\mu_j} a_k\}_{k \geq 0}$ である。従って、ある非負整数 l が存在して、

$$a_{k+l} = c a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。(ただし、必要なら c^{-1} をあらためて c とおく。) $l = 1$ とすると、 $a_k = a_0 c^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) である。これは、定理の仮定に反する。次に、 $l \geq 2$ とすると、 $\Psi(X) = X^l - c$ の少なくとも 2 個の根が $\Phi(X)$ の根になる。 $\Psi(X)$ の根の比は 1 の l 乗根で、 $\Psi(X)$ は重根をもたないから、これは仮定に反する。従って、 $l = 0$ であり、 $c = 1$ となる。故に、

$$l_{\lambda_j} = l_{\mu_j} \quad (1 \leq j \leq m)$$

である。これは、 μ のとり方に反する。よって、(13) が成り立たなければならない。

$$\gamma = \prod_{j=1}^m \beta_j^{l_{i_j}}$$

とおくと、 γ は 0 でない代数的数で、 $\alpha_{i_q} = \zeta_{i_q} \gamma$ ($1 \leq q \leq s$) である。また、

$$L = \max_{1 \leq q \leq s} \deg R_{i_q}(X)$$

とおくと、(13) より、

$$\sum_{l=0}^L \left(\sum_{q=1}^s c_{i_q l} \zeta_{i_q}^{a_k} \right) a_k^l = 0$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つ。上式を

$$\sum_{q=1}^s c_{i_q L} \zeta_{i_q}^{a_k} = - \sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{q=1}^s c_{i_q l} \zeta_{i_q}^{a_k} \right) a_k^{l-L}$$

とかくと、 $k \rightarrow \infty$ のとき右辺は 0 に近づくが、左辺は有限個の値しかとらないから、十分大きなすべての k に対して、左辺は 0 となる。以上で、(i) $\Rightarrow$ (iii) が証明された。

□

4 例

本節では Theorem 1 および Theorem 2 の例をひとつずつあげる.

Example 1. $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) は初期値がそれぞれ

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} = 1, a_1^{(1)} = 3, a_2^{(1)} = 33, & \quad a_0^{(2)} = 0, a_1^{(2)} = 5, a_2^{(2)} = 29, \\ a_0^{(3)} = 2, a_1^{(3)} = 3, a_2^{(3)} = 29, & \quad a_0^{(4)} = 1, a_1^{(4)} = 5, a_2^{(4)} = 25 \end{aligned}$$

である漸化式

$$a_{k+3}^{(i)} = a_{k+2}^{(i)} + 16a_{k+1}^{(i)} + 20a_k^{(i)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

により定義される線形回帰数列とする. このとき, 多項式

$$\Phi(X) = X^3 - X^2 - 16X - 20 = (X - 5)(X + 2)^2$$

は Theorem 1 の条件をみたす. また, (14) より, 各 i について, $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0}$ は単調増加であることが分かるから, $\{a_k^{(i)}\}_{k \geq 0} \not\sim \{a_k^{(j)}\}_{k \geq 0}$ ($1 \leq i < j \leq 4$) である.

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{5^k + k(-2)^k}, \\ f_2(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(2)}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{5^k + (k-1)(-2)^k}, \\ f_3(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(3)}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{5^k + (-2)^k}, \\ f_4(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k^{(4)}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{5^k}. \end{aligned}$$

とおくと, $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数 α に対して, $\{f_i^{(l)}(\alpha)\}_{1 \leq i \leq 4, l \geq 0}$ は代数的独立である.

Example 2. m を 3 以上の自然数とする. $\{a_k\}_{k \geq 0}$ は初期値が

$$a_0 = 1, a_1 = m + 1, a_2 = 6m^2 - 4m + 2$$

である漸化式

$$a_{k+3} = 2a_{k+2} + (m-1)(3m+1)a_{k+1} + 2m(m-1)^2a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

により定義される線形回帰数列とする.

$$a_k = (2m)^k + k(1-m)^k \quad (15)$$

であるから, Theorem 2 の条件はみたされる.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k}$$

とおく. このとき, α を $0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数, $\zeta = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}}$ とすると, $\{f^{(l)}(\zeta^j \alpha)\}_{j=0, \dots, m-1, l \geq 0}$ は代数的独立である.

実際, $\{f^{(l)}(\zeta^j \alpha)\}_{j=0, \dots, m-1, l \geq 0}$ が代数的従属であるとする, Theorem 2 より, 少なくともひとつは 0 でない代数的数 $c_0, \dots, c_{m-1}$ が存在して,

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_j (\zeta^j)^{a_k} = 0 \quad (16)$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つ. ところが, 任意の $k \geq 1$ に対して, (15) より $a_k \equiv k \pmod{m}$ であるから, (16) が成り立つためには $c_0 = \dots = c_{m-1} = 0$ でなければならず, これは矛盾である.

上記の結果から, 任意に与えられた相異なる代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ($0 < |\alpha_i| < 1$, $i = 1, \dots, r$) に対して, 3 以上の自然数 m を選んで, この例における線形回帰数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ が Theorem 2 の条件 (iii) をみたさないようにできる. このとき $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_k}$ とおけば $\{f^{(l)}(\alpha_i)\}_{i=1, \dots, r, l \geq 0}$ は代数的独立となる.

参考文献

- [1] J.W.S. Cassels: Local Field, Cambridge UP, 1986.
- [2] F.R. Gantmacher: Applications of the theory of matrices, vol. II, New York, Intersciences, 1959.
- [3] J.H. Loxton and A.J. van der Poorten: Algebraic independence properties of the Fredholm series, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **26** (1978), 31-45.
- [4] K. Mahler: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Math. Ann.* **101** (1929), 342-366.
- [5] D.W. Masser: A vanishing theorem for power series, *Invent. math.* **67** (1982), 275-296.
- [6] K. Nishioka: Mahler Functions and Transcendental Numbers **II** (in Japanese), Seminar on Math. Sci., No.21, Keio Univ., 1994.
- [7] K. Nishioka: Algebraic independence of Mahler functions and their values, to appear in Tôhoku Math. J.
- [8] T. Tanaka: Algebraic independence of certain numbers defined by linear recurrences, Keio Sci. Tech. Reports, vol.47, No.2 (1994), 11-20.
- [9] T. Tanaka: Algebraic independence of the values of power series generated by linear recurrences, to appear in Acta Arith.