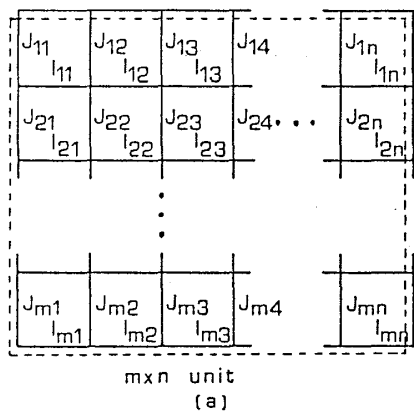


Anisotropy effects in a frustrated Ising model on the square lattice

東北大学 堀口 剛

正方格子 $\mathbb{Z}^2$ 上の Ising model で強磁性的相互作用と反強磁性的相互作用が規則的に存在する体系について、Villain¹⁾の odd model 以来、多くの興味ある研究がなされてきた。この小論では、相互作用が最近接格子点間のみ存在する体系について、今までなされてきた研究を概観し、次に正確に解ける1つの新しい model を提案する。

強磁性的相互作用 $J > 0$ と反強磁性的相互作用 $-J$ のみ存在する体系を等方的な体系と呼ぶ。Anisotropy により、大きさの異なる相互作用の存在を意味する。frustrated plaquette はその plaquette 上の4つの相互作用の積が負となる plaquette のことである。すべての plaquette が frustrated である model を fully frustrated model (FFS model) という。Villain の odd model は等方的な FFS model である。この系では、有限温度に相転移はなく²⁾、絶対零度で spin の相関関数は代数関数的に減衰し $\gamma = \frac{1}{2}$ である³⁾。Longa-Oles³⁾ は frustrated plaquettes の列と non-frustrated plaquettes の列が周期的に並んでいる等方的な系を調べ、有限温度に相転移があることを示した。frustrated plaquettes と non-frustrated plaquettes がチェス板上の模様のように並んでいる等方的な chess-board model では、André et al.⁴⁾ により相転移がないことが示され、Wolff-Zittartz⁵⁾ により $T \geq 0$ で相関関数が指数関数的に減衰することが示された。Anisotropy のある FFS model の例



として domino  (両端の二重 bond が J' , 残りの一重 bond が $J > 0$ とする) を単に重ねた model (PUD model) とずらして重ねた model (ZZD model) についての André et al.⁴⁾ の研究があり、PUD model では $J' = -J$ を除いて有限温度に相転移があり、ZZD model では $J' > -J$ で有限温度に相転移があり $J' \leq -J$ では有限温度に相転移がないことが示された。

興味は更に複雑な体系へと移っていった。それらの体系を統一的に記述するために図1(a)で示した部分格子を導入する。 $m \times n$ unit で、縦方向の bonds $\{J_{ij}\}$ と横方向の bonds $\{I_{ij}\}$ の合計 $2mn$ 個の相互作用をもつ部分格子を意味する。 $[(m \times n, l), \{J_{ij}, I_{ij}\}]$ により最小の $m \times n$ unit を図1(a)のように2格子点だけずらして重ね $\mathbb{Z}^2$ を覆うことによりできる model を表わす。たとえば chess-board model は $[(1 \times 4, 3), \{J_{11} = J_{12} = -J, \text{他は } J\}]$ と表わせる。上述の他の model もこの記号で表わせる。Forgacs-Fradkin⁶⁾ は Villain の odd model の拡張として $[(1 \times 2, 0), \{J_{11} = -J_{12} = K_y, I_{11} = I_{12} = K_x\}]$

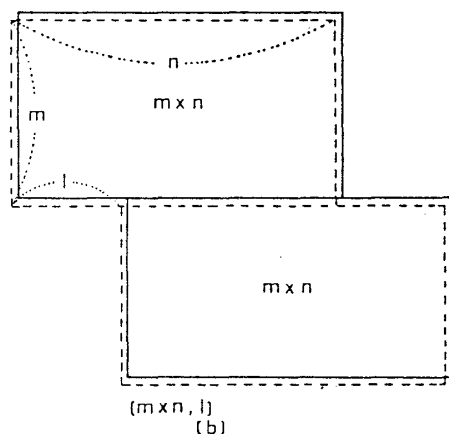


図1

を解いた。Garel-Maillard⁷⁾により $[(2 \times 2, 0), \{J_{11} = -J_{12} = K_4, J_{21} = -J_{22} = K_2, I_{11} = I_{21} = K_3, I_{12} = I_{22} = K_1\}]$ が研究された。 $[(1 \times n, 0), \{J_{ij}, I_{ij}\}]$ は Zittartz et al.⁸⁾, Williams⁹⁾ そして Kardar-Berker¹⁰⁾ 等により研究され, $[(1 \times n, 1), \{J_{ij}, I_{ij}\}]$ は Zittartz et al.⁵⁾ により研究された。また $[(3 \times 3, 0), \{J_{32} = I_{13} = J_3, I_{23} = J_{31} = J_{33} = I_{33} = J_2, \text{他は } J_1\}]$ は Kitatani et al.¹¹⁾ により研究され, J_2 と J_3 の値により reentrant 相転移が起こることが示された。

以上のように, 競合する最近接相互作用をもつ規則正正方格子上の Ising model は次のような種々の振舞を示す。(1) 有限温度に相転移があり reentrance を示す。(2) 有限温度に相転移があり $T=0$ は特異点である。(3) Onsager class に属する。(4) 1次元 Ising model の class に属する。(5) 有限温度に相転移がなく $T=0$ で $\eta = \frac{1}{2}$ 。(6) $T \geq 0$ で相関関数が指数関数的に減衰する。更に多くの正確に解ける例があれば, これらのことの理解の助けになると考え, 次の model を解析した。

ここで考える model は $[(2 \times 4, 2), \{J_{11} = J_{23} = -J_1, J_{12} = J_{22} = I_{11} = I_{12} = J_2, J_{13} = J_{21} = -J_3, J_{14} = J_{24} = I_{13} = I_{14} = J_4, I_{22} = I_{23} = J_1, I_{21} = I_{24} = J_3\}]$ である。この model の別の見方が図 2 に示してある。正方格子が 8 個の部分格子に分類されている。 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ として

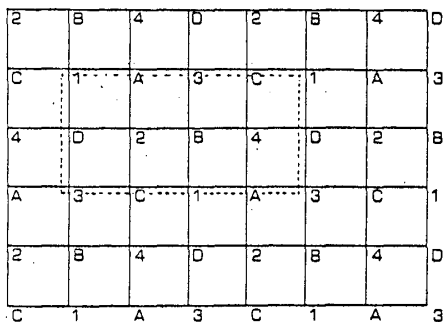


図 2

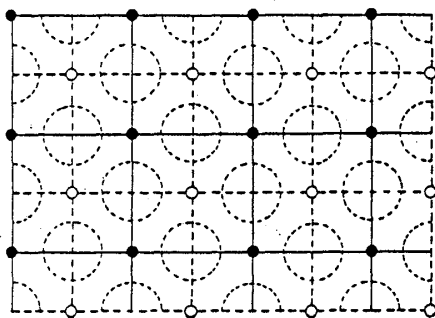


図 3

$$\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \Lambda_3 \oplus \Lambda_4 \oplus \Lambda_A \oplus \Lambda_B \oplus \Lambda_C \oplus \Lambda_D$$

と表わす。Hamiltonian は次のようになる。

$$H = -J_1 \sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ i \in \Lambda_1 \\ j \in \Lambda_A \oplus \Lambda_C}} s_i s_j + J_1 \sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ i \in \Lambda_1 \\ j \in \Lambda_B \oplus \Lambda_D}} s_i s_j - J_2 \sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ i \in \Lambda_2}} t_i s_j \\ - J_3 \sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ i \in \Lambda_3 \\ j \in \Lambda_A \oplus \Lambda_C}} s_i s_j + J_3 \sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ i \in \Lambda_3 \\ j \in \Lambda_B \oplus \Lambda_D}} s_i s_j - J_4 \sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ i \in \Lambda_4}} t_i s_j$$

$\langle ij \rangle$ は最近接格子点対を表わす。 $\{s_i\}, \{t_i\}$ そして $\{t_i\}$ は ± 1 の Ising spin である。分配関数

$$Z(J_1, J_2, J_3, J_4) = \sum_{\{s_i, t_i\}} e^{-\beta H}, \quad \beta = 1/kT$$

において, $\{s_i\}$ についてだけ和をとると

$$Z(J_1, J_2, J_3, J_4) = \sum_{\{s_i, t_i\}} e^{-\beta H_B}, \quad -\beta H_B = \sum_{(ij, k, \ell)} \{K' s_i s_j + K'' t_k t_\ell + \tilde{K} s_i s_j t_k t_\ell + K_0\}$$

となる。ここで (i, j, k, ℓ) は図 3 の破線円のまわりの 4 つの sites の組についての和を意味する。図 3 で $\circ$ は $\Lambda_1 \oplus \Lambda_3$, $\bullet$ は $\Lambda_2 \oplus \Lambda_4$ にそれぞれ属する格子点を表わす。また

$$K' = \frac{1}{8} \log \frac{C_0 C_2 C_4 C_{13}}{C_1 C_3 C_{12} C_{14}}, \quad K'' = \frac{1}{8} \log \frac{C_0 C_1 C_3 C_{13}}{C_2 C_4 C_{12} C_{14}}, \quad \tilde{K} = \frac{1}{8} \log \frac{C_0 C_{12} C_{13} C_{14}}{C_1 C_2 C_3 C_4}, \\ K_0 = \frac{1}{8} \log \{C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_{12} C_{13} C_{14}\}.$$

研究会報告

ここで $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_{12}, C_{13}, C_{14}$ は次のように定義されている:

$$\begin{aligned} C_0 &= 2 \cosh \beta (J_1 + J_2 + J_3 + J_4), & C_1 &= 2 \cosh \beta (-J_1 + J_2 + J_3 + J_4), & C_2 &= 2 \cosh \beta (J_1 - J_2 + J_3 + J_4), \\ C_3 &= 2 \cosh \beta (J_1 + J_2 - J_3 + J_4), & C_4 &= 2 \cosh \beta (J_1 + J_2 + J_3 - J_4), & C_{12} &= 2 \cosh \beta (J_1 + J_2 - J_3 - J_4), \\ C_{13} &= 2 \cosh \beta (J_1 - J_2 + J_3 - J_4), & C_{14} &= 2 \cosh \beta (J_1 - J_2 - J_3 + J_4). \end{aligned}$$

次に $\Lambda_2 \oplus \Lambda_3$ について dual 変換を行う。その結果は次のようになる。

$$Z(J_1, J_2, J_3, J_4) = \sum_{\{s_i, \mu_i\}} \exp \left[\sum_{\langle ij \rangle} (I' \mu_i \mu_j + I_4 \mu_i \mu_j s_i s_j + I_0) \right].$$

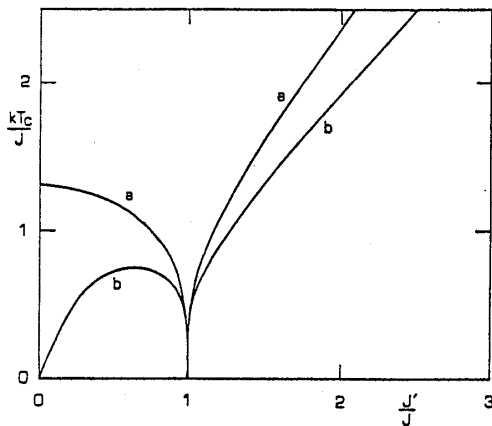


図 4

ここで $\{ \mu_i \}$ は dual spin であり, また

$$I' = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{C_0 C_{13}} + \sqrt{C_2 C_4}}{\sqrt{C_1 C_3} - \sqrt{C_{12} C_4}}, \quad I_4 = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{C_0 C_{13}} + \sqrt{C_2 C_4}}{\sqrt{C_1 C_3} + \sqrt{C_{12} C_4}},$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \log (C_0 C_{13} - C_2 C_4) - \frac{1}{2} \log 2.$$

$\mu_i s_i$ を ν_i とおくと分配関数は正方格子上の通常の Ising model の分配関数の積で表わされる。

$$Z(J_1, J_2, J_3, J_4) = e^{\frac{I_0}{2} |\Lambda|} Z_S(I') Z_S(I_4)$$

ここで $|\Lambda|$ は Λ の濃度であり, Z_S で通常の Ising model の分配関数を表わした。

次に具体的な計算結果の例として, (a) $J_1 = J_3 = J, J_2 = J_4 = J'$, (b) $J_1 = J, J_2 = J_3 = J_4 = J'$, (c) $J_1 = J_2 = J, J_3 = J_4 = J'$ の場合を調べる。(a) と (b) の場合の相図は図 4 に示した。(c) の場合は $T_c = 0$ であり, ここで $\phi = \frac{1}{2}$ である。

文献

- 1). J. Villain, J. Phys. C 10 (1977) 1717.
- 2). G. Forgacs, Phys. Rev. B 22 (1980) 4473.
- 3). L. Longa and A. M. Oleś, J. Phys. A 13 (1980) 1031.
- 4). G. André, R. Bidaux, J.-P. Carton, R. Conte and L. de Seze, J. Physique 40 (1979) 479.
- 5). W. F. Wolff and J. Zittartz, Z. Phys. B 44 (1981) 109, 47 (1982) 341, 49 (1982) 229, 50 (1983) 131.
- 6). G. Forgacs and E. Fradkin, Phys. Rev. B 23 (1981) 3442.
- 7). T. Garel and J. M. Maillard, J. Phys. A 16 (1983) 2257.
- 8). W. F. Wolff, P. Hoever and J. Zittartz, Z. Phys. B 42 (1981) 259.
P. Hoever and J. Zittartz, Z. Phys. B 44 (1981) 129.
- 9). J. K. Williams, J. Phys. C 15 (1982) 263, 15 (1982) 275.
- 10). M. Kardar and A. N. Berker, Phys. Rev. B 26 (1982) 219.
- 11). H. Kitatani, S. Miyashita and M. Suzuki, Phys. Lett. 108A (1985) 45.