

二階楕円型偏微分作用素の函数中の定義域について

東大 理. 藤原大輔

§1. 序

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の有界領域で, その境界 $\partial\Omega$ は $m-1$ 次元 C^∞ 多様体であらうとする. $\partial\Omega$ 上で境界条件

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + (1-\alpha) u = 0$$

を考える. 但し, n は $\partial\Omega$ の単位法線 (外), α は $\partial\Omega$ 上で与えられた 滑らかな函数で, $0 \leq \alpha \leq 1$ をみたすものとする. A_α として, $-\Delta$ をこの条件下で考えた, $L^2(\Omega)$ での自己共役作用素とすると, A_α の函数中 A_α^θ $0 \leq \theta \leq 1$ は,

$$A_\alpha \text{ のスペクトル表示を } A_\alpha = \int_0^\infty \lambda dE_\alpha(\lambda) \text{ とすると,}$$

$$A_\alpha^\theta = \int_0^\infty \lambda^\theta dE_\alpha(\lambda)$$

で与えられる.

ここで考える問題は, 函数 $u \in L^2(\Omega)$ が, A_α^θ の定義に入るための必要十分条件をおめることである.

注意

1° ここで A_α としては,

$$D_{A_\alpha} = \{ u \in H^2(\Omega); \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + (1-\alpha) u|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

E を定義とする maximal accretive operator (c.f. T. Kato [1])
 ならば、何でも良い。 $-\Delta$ と限ったのは 簡単のためである。

(J. L. Lions [2])

2° ρ や χ の滑らかさは 終わられる。

3.2. 結果

x から ρ 迄の Euclid 距離を $\zeta(x)$ とおく。 次のような
 関数空間を考える。

$$E^{0,s}(\Omega) = \{ u \in H^s(\Omega) \mid \int_{\Omega} \zeta(x)^{-2s} |u(x)|^2 dx < \infty \}, \quad 0 < s < 1$$

$$E^{1,s}(\Omega) = \{ u \in H_{\sigma_0}^{1+s}(\Omega) \mid \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\Omega} \zeta(x)^{-2s} |D_j u(x)|^2 dx < \infty \}, \quad s < 1$$

$$H_{\sigma_0}^s(\Omega) = \{ u \in H^s(\Omega) \mid u|_{\Sigma} = 0 \}, \quad s > \frac{1}{2}.$$

但し、 $H^s(\Omega)$ は s 次 Sobolev 空間であり、 $D_j, j=1, 2, \dots, m-1$
 は ρ に平行な $m-1$ 個の一次独立な一階偏微分作用素
 である。

定理 1

χ が ρ 上恒等的に 0 であれば、作用素 A_0 の分枝中
 の定義域 $D(A_0^\theta)$, $0 < \theta < 1$ は

$$(a) \quad D(A_0^\theta) = E^{0,2\theta}(\Omega) = H^{2\theta}(\Omega), \quad 0 < \theta < \frac{1}{4},$$

$$(b) \quad D(A_0^{\frac{1}{4}}) = E^{0,\frac{1}{2}}(\Omega) \subsetneq H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$$

$$(c) \quad D(A_0^\theta) = E^{0,2\theta}(\Omega) = H_{\sigma_0}^{2\theta}(\Omega), \quad \frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{2}$$

$$(d) \quad D(A_0^{\frac{1}{2}}) = \quad \quad \quad = H_{\sigma_0}^1(\Omega)$$

- (e) $D(A_0^\theta) = E^{1, 2\theta-1}(\Omega) = H_{\partial\Omega}^{2,0}(\Omega)$, $\frac{1}{2} < \theta < \frac{3}{4}$;
 (f) $D(A_0^{\frac{3}{4}}) = E^{1, \frac{1}{2}}(\Omega) \subset H_{\partial\Omega}^{\frac{3}{2}}(\Omega)$;
 (g) $D(A_0^\theta) = E^{1, 2\theta-1}(\Omega) = H_{\partial\Omega}^{2,0}(\Omega)$, $\frac{3}{4} < \theta < 1$.
 で与えられる。

次に、関数空間.

$$M_\alpha^{1+s}(\Omega) = \{u \in H^{1+s}(\Omega) \mid \int_\Omega \zeta(x)^{-2s} |\alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + (1-\alpha)u|^2 dx < \infty\}$$

$$H_{(\alpha)}^s(\Omega) = \{u \in H^s(\Omega) \mid \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + (1-\alpha)u|_\Omega = 0\}, \quad s > \frac{3}{2},$$

を導入する。但し、 α は $\partial\Omega$ に隣接しているものと
 する。

定理 2

α が、 $\partial\Omega$ 上で決して 0 にならないとき、次の命題中の定義域、 $D(A_\alpha^\theta)$ は、

$$(a) \quad D(A_\alpha^\theta) = H^{2,0}(\Omega), \quad 0 < \theta < \frac{3}{4},$$

$$(b) \quad D(A_\alpha^{\frac{3}{4}}) = M_{(\alpha)}^{\frac{3}{2}}(\Omega) \subseteq H^{\frac{3}{2}}(\Omega),$$

$$(c) \quad D(A_\alpha^\theta) = M_{(\alpha)}^{2,0}(\Omega) = H_{(\alpha)}^{2,0}(\Omega), \quad \frac{3}{4} < \theta < 1.$$

で与えられる。

次の局所化に関する定理を使うと、 Ω の境界が幾つかの連結成分に分かれていて、 α が 0 になる点と、0 でない点とが、分離してゐれば、 A_α^θ の定義域を定めることは出来る。

定理 3

関数 u が, A_α の分母中の定義域 $D(A_\alpha)$ に入るための
必要十分条件は, 任意の $C^\infty(\overline{\Omega})$ の関数 φ で, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_\partial = 0$ を
みたすものに対し, $\varphi \cdot u$ が再び $D(A_\alpha)$ に入ることである.

§ 3. 証明の概略.

はじめに補内空間の理論を 2-3 の事実によりて復習しておく.

(J. L. Lions. [3])

定義

X_0, X_1 を二つの Banach 空間で, $X_0 \subset X_1$ とする.
埋蔵作用素は連続とする. $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \alpha = \theta$.
 $\theta \in [0, 1)$ なる α をとておく. X_1 に値をもつ $(0, \infty)$
での強可測関数 $u(t)$ で, $\|u\|_{W(X_0, X_1; p, \theta)}^p = \max \left(\int_0^\infty t^\alpha \|u\|^p dt, \int_0^\infty t^{q\theta} \|u'\|^p dt \right)$
が有限なもの全体を $W(X_0, X_1; p, \theta)$ とおく. ここで $u'(t)$ とは,
 t に関する超関数微分. $W(X_0, X_1; p, \theta)$ は $\|\cdot\|_{W(X_0, X_1; p, \theta)}$
でノルムとし, Banach 空間である.

$T(X_0, X_1; p, \theta) = \{u(0); u \in W(X_0, X_1; p, \theta)\}$
を Trace 空間という. $W(X_0, X_1; p, \theta)$ の商空間として, 自然
に Banach 空間である.

次の使う性質は.

定理 A (補内定理)

Y_0, Y_1 を二つの Banach 空間, $Y_0 \subset Y_1$ とする. (埋蔵

作用素は連続である). $\pi \in X_p \rightarrow Y_p$ の線形連続写像
 であり、これと X_0 に制限すると $X_0 \rightarrow Y_0$ の連続写像
 になるものがある。このとき、 π は

$$\pi : T(X_0, X_1; p, \theta) \longrightarrow T(Y_0, Y_1; p, \theta)$$

の写像として線型連続。

定理 B. (c.f. J.L. Lions. [2])

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間, A を $\mathcal{H}$ の稠密な線型集合 $D(A)$
 で定義された, maximum accretive operator とすると,

$$D(A^\theta) = T(D(A), \mathcal{H}; 2, 1-\theta),$$

定理 C

Ω を滑らかな境界をもつ, $\mathbb{R}^m$ の領域とすると,

$$T(H^{s_0}(\Omega), H^{s_1}(\Omega); 2, 1-\theta) = H^{s_0\theta + (1-\theta)s_1}(\Omega), \quad s_0 > s_1$$

定理 1 の証明も同様だから、簡単な定理 2 を証明
 しよう。更に、簡単のために $\Omega = \mathbb{R}_+^m = \{x = (x', x_m) \mid x' \in \mathbb{R}^{m-1}, x_m \geq 0\}$
 の場合に示すことにする。

$L^2(\mathbb{R}^m)$ は x_m に関して、偶関数の全体 F^0 と、奇関数の
 全体 G^0 とに直和分解される。射影作用素 E ,

$$P : L^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow F^0, \quad Q : L^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow G^0$$

埋蔵作用素 $R : F^0$ (又は G^0) $\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$ とおく。

これらすべては線型連続で、 $P \circ R = \text{id}$, $Q \circ R = \text{id}$ で

ある. $s \geq 0$ に対し

$$F^s = H^s(\mathbb{R}^m) \cap F^0, \quad G^s = H^s(\mathbb{R}^m) \cap G^0.$$

とかく. $P \in H^2(\mathbb{R}^m)$ に制限すれば,

$$P: H^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow F^2 \text{ lin. cont.}$$

よって定理 A によつて,

$$P: T(H^2(\mathbb{R}^m), L^2(\mathbb{R}^m); 2, 1-\delta) \xrightarrow{\text{cont.}} T(F^2, F^0; 2, 1-\delta)$$

定理 C によつて

$$\phi: H^{2,0}(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\text{cont.}} T(F^2, F^0; 2, 1-\delta)$$

同様にして,

$$R: T(F^2, F^0; 2, 1-\delta) \longrightarrow H^{2,0}(\mathbb{R}^m) \text{ cont. lin.}$$

$$\phi \circ R = \text{id.}$$

従つて

$$(1) \quad T(F^2, F^0; 2, 1-\delta) = F^{2,0}$$

さて, $L^2(\mathbb{R}^m_+)$ の関数 f , λ_m につき偶関数となるよう $\mathbb{R}^m$ 全体に延長すると $L^2(\mathbb{R}^m)$ に入る. この対応を λ とかく. また, $L^2(\mathbb{R}^m)$ を $\mathbb{R}^m_+$ に制限する作用素を π とかくと,

$$\pi: F^0 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m_+) \text{ cont. lin. } \pi^*,$$

π を F^2 に制限すると,

$$\pi: F^2 \longrightarrow D(A_1) \text{ cont. lin.}$$

$$\text{しかも, } \pi \circ \lambda = \text{id.}, \quad \lambda \circ \pi = \text{id.}$$

すなわち, λ と π は F^0 と $L^2(\mathbb{R}^m_+)$, F^2 と $D(A_1)$ の間の isomorphisms である. よつて定理 A, B と (1) を使つて.

$$(2) \quad D(A_0) \xrightleftharpoons[\pi]{\lambda} F^{2\theta} \quad \text{isomorphism.}$$

を要する。

$F^{2\theta}$ norm は具体的に積分を使って書けるから, $D(A_0)$ が (2) によって具体的に定まるのである。

実際に $\|\lambda u\|_{F^{2\theta}}^2$ を計算しよう。

$$(2') \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}, \quad \text{i.e.} \quad 0 < 2\theta < 1 \quad \text{の時.}$$

$$\|\lambda u\|_{F^{2\theta}}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\lambda u(x) - \lambda u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}} dx dy + \|\lambda u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2$$

$$= 2\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2$$

$$+ 2 \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}} dx dy$$

$$+ 2 \int_{\mathbb{R}_+^m} \int_{\mathbb{R}_-^m} \frac{|\lambda u(x) - \lambda u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}} dx dy.$$

第三項において, $y_m \rightarrow -y_m$ と変数変換すると, λu が $\mathbb{R}_m$ において偶関数のことから,

$$\text{第三項} = 2 \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{(|x'-y'|^2 + |x_m+y_m|^2)^{\frac{m+4\theta}{2}}} dx dy$$

(3)

$$\leq 2 \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}} dx dy$$

従って, u の quadratic forms が, 同値 $\epsilon \leq \epsilon \sim \epsilon < \epsilon$,

$$\|u\|_{D(A_0)}^2 \sim \|\lambda u\|_{H^{2\theta}}^2 \sim \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^m)}^2 + \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{m+4\theta}} dx dy = \|u\|_{H^{2\theta}(\mathbb{R}_+^m)}^2$$

$$(b') \quad s = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{F^1}^2 &= \|\lambda u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \sum_{j=1}^m \|D_j \lambda u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= 2\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \sum_{j=1}^m \|D_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= 2\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^m)}^2 \end{aligned}$$

$$(c') \quad \frac{1}{2} < \theta < 1, \quad 1 < 2\theta < 2.$$

$$\|\lambda u\|_{F^{2\theta}}^2 = \|\lambda u\|_{H^1(\mathbb{R}^m)}^2 + \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|D_j \lambda u(x) - D_j \lambda u(y)|^2}{|x-y|^{m+2\theta_1}} dx dy$$

但し $\theta_1 = 2\theta - 1$ である。

よって

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{F^{2\theta}}^2 &= 2\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^m)}^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|D_j u(x) - D_j u(y)|^2}{|x-y|^{m+2\theta_1}} dx dy \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_-^m} \frac{|D_j u(x) - D_j u(y)|^2}{|x-y|^{m+2\theta_1}} dx dy \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, m-1$ の場合, $D_j \lambda u$ は x_m に偶関数
故, (3) と同様評価が出来る。 $j=m$ については,

$$(9) \quad \begin{cases} I_s^2(v) = \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|u(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{m+2s}} dx dy, \\ J_s^2(v) = \iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|v(x) + v(y)|^2}{(|x-y|^2 + |x_m + y_m|^2)^{(m+2s)/2}} dx dy \\ K_s^2(v) = \int_{\mathbb{R}_+^m} |x_m|^{-2s} |v(x)|^2 dx. \end{cases}$$

43 二次形式の間に.

$$(5) \quad 4\kappa_s^2 K_s^2(v) = I_s^2(v) + J_s^2(v) \leq I_s^2(v) + 2\kappa_s^2 K_s^2(v)$$

$$\text{但し, } \kappa_s^2 = \int_0^\infty t^{-2s-1} \int \frac{dx'}{(x'^2+1)^{(m+2s)}} dx'$$

与えられた関係が成立するから. $D_m u$ が $\mathbb{R}_+^m$ 上の奇関数のように
使えば,

$$\iint_{\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m} \frac{|D_m u(x) - D_m u(y)|^2}{|x-y|^{m+2\theta_1}} dx dy = J_{\theta_1}^2(D_m u).$$

よって (5) から

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{2\theta}}^2 &\sim \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^m)}^2 + \sum_{j=1}^m I_{\theta_1}^2(D_j u) + K_{\theta_1}^2(D_m u) \\ &\sim \|u\|_{H^{2\theta}(\mathbb{R}_+^m)}^2 + K_{2\theta-1}^2(D_m u) \end{aligned}$$

すなわち (2) から

$$(9) \quad \|u\|_{D(A_1^\theta)}^2 \sim \|u\|_{H^{2\theta}(\mathbb{R}_+^m)}^2 + K_{2\theta-1}^2(D_m u)$$

次の定理は J. L. Lions, and E. Magenes [4] による.

定理 D

(i) $u \in H^\theta(\mathbb{R}_+^m)$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, ならば: ある定数 $C > 0$ があり,

$$K_\theta^2(u) \leq C (I_\theta^2(u) + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^m)}^2) = C \|u\|_{H^\theta(\mathbb{R}_+^m)}^2$$

(ii) $u \in H_{\theta_0}^\theta(\mathbb{R}_+^m)$, $\frac{1}{2} < \theta < 1$ ならば: ある定数 $C > 0$ があり,

$$K_\theta^2(u) \leq C (I_\theta^2(u) + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^m)}^2) = C \|u\|_{H^\theta(\mathbb{R}_+^m)}^2.$$

(9) とこの定理 D を使えば: 定理 2 は, $\alpha \equiv 1$ のとき, 証明された.

× 非 D のとき、定理 2 を証明するには、次の技巧による。

$f(t)$ を $\mathbb{R}^1$ 上の関数で、 $\frac{1}{3} \leq f(t) \leq 3$ で、 $t=1$ の近傍に、 t に等しいものとする。早速。

$$\begin{array}{ccc} \gamma: L^2(\mathbb{R}_+^m) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}_+^m) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ u & \longrightarrow & \gamma u(x) = f\left(e^{\frac{1-\alpha(x)}{\alpha(x)} x_m}\right) u(x). \end{array}$$

は連続線型で、isomorphism だ。同時に、

$$\gamma: D(A_\alpha) \longrightarrow D(A_1).$$

も isomorphism である。だから再び、定理 A, B を使って、

$$\gamma: D(A_\alpha^\theta) \xrightarrow{\text{isom.}} D(A_1^\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

を得る。従って、定理 2 は完全に証明される。

定理 3 の証明。

証明がないのは、 $u \in D(A_\alpha^\theta)$ のとき $\gamma u \in D(A_\alpha^\theta)$ のことである。

$$\gamma: u \longrightarrow \gamma u.$$

とみると、 $\frac{\partial \gamma}{\partial x_m} \Big|_S = 0$ 故に、 γ は $L^2(\partial\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ cont.

であると同時に、 $D(A_\alpha) \longrightarrow D(A_\alpha)$, cont. 従って、また

や定理 A, B により、 $\gamma: D(A_\alpha^\theta) \longrightarrow D(A_\alpha^\theta)$ cont lin.

以上で、定理 3 も証明される。

Ω が一般の領域のときは、その証明は直ぐに、以上の証明と、本質的には同じことをやれば良い。λ の定義には、一寸した工夫が必要であるが、その説明は、長くなるから省く。

詳細はいずれ、発表する予定である。

之 著.

- [1] T. Kato, Fractional powers of dissipative operators.
J. Math. Soc. Japan 13 (1961) 241-274.
- [2] J. L. Lions, Espaces d'interpolation et domaines de
puissances fractionnaires d'opérateurs.
J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 233-241.
- [3] J. L. Lions Sur les espaces d'interpolation - dualité
Math. Scand IX (1961) p 147-177.
- [4] J. L. Lions et E. Magenes. Problèmes aux
limites non homogènes (IV).
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. 15 (1961) 311-326