

収束定理

阪大 理

渡辺 毅

(藤原昌彦記)

1. Ergodic theorems

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を probability space とする.

Birkhoff の Ergodic theorem とは

φ を $\Omega \rightarrow \Omega$ の measure preserving transformation とし

$f \in L^1(\Omega)$ に対して $Tf(\omega) = T^\varphi f(\omega) \equiv f(\varphi(\omega))$ なる

$L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ の写像 T を定義する.

この時 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f(\omega)$ が殆んど確定に存在して有限である.

Chacon - Ornstein の Ergodic theorem とは更に一般に.

T を $L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ なる positive contraction operator

とする時 $g, f \in L^1(\Omega)$ $g \geq 0$ に対して

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} T^k f}{\sum_{k=0}^{n-1} T^k g}$ が $\{\omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} T^k g > 0\}$ の上で殆んど確定に存在して有限である.

上記の定理を証明するには maximal lemma を用いる。

Birkhoff の theorem の証明に用いられる maximal lemma は

$$\Omega_f \equiv \bigcup_n \left\{ \sum_{k=0}^n T^k f > 0 \right\} \quad \text{と置く時} \quad \int_{\Omega_f} f dP \geq 0 \quad \text{が成立.}$$

この lemma を仮定して Birkhoff の Ergodic theorem を証明する。

(証明)

$A \in \mathcal{F}$ が $T \cdot I_A = I_A$ (i.e. $\varphi^{-1}A = A$) の時に A を invariant set と呼ぶことにする。

A が invariant set であると明らかに。

$T(I_A \cdot f) = I_A \cdot Tf$ が成立つ。従つて上の maximal lemma は

更に強めて、 A が invariant set の時 $\int_{\Omega_f \cap A} f dP \geq 0$ が成立つ。

という形にすることが出来る。以下この形で lemma を使う。

(これを strong form of maximal lemma と呼ぶことにする。)

$b > a$ なる二つの実数 a, b を与えた時

$$A_b \equiv \left\{ \omega ; \quad b < \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f \right\}$$

$$A^a \equiv \left\{ \omega ; \quad a > \liminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f \right\}$$

$$A_b^a = A^a \cap A_b \quad \text{と定義する。}$$

容易に分る様に A_b^a は invariant set で且つ

$$A_b^a \subset A_b \subset \Omega_{f-b} \text{ が成立つ.}$$

$$\therefore \int_{A_b^a} (f-b) dP \geq 0$$

又同様に $A_b^a \subset A_a \subset \Omega_{a-f}$ より

$$\int_{A_b^a} (a-f) dP \geq 0$$

従つて両不等式を加えて.

$$(a-b) \int_{A_b^a} dP \geq 0$$

$$\text{又 } a-b < 0 \quad \therefore P(A_b^a) = 0$$

a, b を有理数全体を動かすことに依つて $\limsup$ と $\liminf$ が一致することかわかる.

finiteness の証明は.

$$A_\infty \equiv \bigcap_b A_b = \left\{ \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f = +\infty \right\} \text{ と置く.}$$

A_b が Ω_{f-b} に含まれる invariant set だから、上と同様にして

$$\int_{A_b} (f-b) dP \geq 0$$

$$\therefore \int |f| dP \geq \int_{A_b} f dP \geq b P(A_b) \geq b P(A_\infty)$$

b は任意に大きくとれる故 $P(A_\infty) = 0 \quad \therefore \limsup = \liminf < +\infty$

$\limsup = \liminf > -\infty$ も同様. $b < a$.

(Chacon Ornstein については 4 節を見よ.)

2 martingales with negative index

$\{x_n, \mathcal{F}_n, n \leq 0\}$ が martingale であるとは、 $\mu_n(A) = \int_A |x_n| dP$

なる measure μ を $\mathcal{F}_k$ の上で考えた時 σ -finite であれば

$k \leq n$ に関して x_n の $\mathcal{F}_k$ に対する conditional expectation

が定義できるが、その意味で $E\{x_0 | \mathcal{F}_n\} = x_n$ と書き表れる

ことと定義する。

今ある N を固定した時

$A \in \mathcal{F}_N$ 且つ $\int_A |x_0| dP < +\infty$ が成立てば

$$\int_{A \cap \{\sup_{n \geq N} x_n > 0\}} x_0 dP = \sum_{N \leq n \leq 0} \int_{A \cap \{x_n > 0, x_m \leq 0 \text{ for } N \leq m < n\}} x_n dP \geq 0$$

これを拡張して martingale に於ける次の maximal lemma

が成立する。即ち、

$A \in \mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \leq 0} \mathcal{F}_n$ で且つ $\int_A |x_0| dP < +\infty$ とすると

$$\int_{\Omega_{x_0} \cap A} x_0 dP \geq 0 \quad \text{但し} \quad \Omega_{x_0} = \left\{ \sup_{n \leq 0} E\{x_0 | \mathcal{F}_n\} > 0 \right\}$$

これから Doob に依る次の収束定理を得る。即ち、

$\int_A |x_0| dP$ が $\mathcal{F}_{-\infty}$ の上で σ -finite であれば $\lim_{n \rightarrow -\infty} E\{x_0 | \mathcal{F}_n\}$

が a. e. で存在して有限。 P は probability measure で

なくとも σ -finite であればよい。

3. M. Jerison's formulation ([6])

$(N, \mathcal{P}, \nu)$ を $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{P} = \text{all subsets of } N$, $\nu = (\text{element の個数})$ なる measure space とし, $\mathcal{C}\mathcal{F}_n$ を σ -algebra generated by $\{0, 1, \dots, n-1\}, n, n+1, \dots$ と定義する。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ なる probability space に対して $T; L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ なる写像が与えられているとする。

$(U, \mathcal{U}, \mu) = (\Omega \times N, \mathcal{F} \times \mathcal{P}, P \times \nu)$ とし, $n \geq 0$ に対して $\mathcal{F}_{-n} = \mathcal{F} \times \mathcal{C}\mathcal{F}_n$ と定義する。

又 $f \in L^1(\Omega)$ に対して $x_0(k, \omega) = T^k f(\omega)$ と置く。

$$\therefore \text{この時 } x_{-n} \equiv E\{x_0 | \mathcal{F}_{-n}\}(k, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i f(\omega) & k < n \\ T^k f(\omega) & k \geq n \end{cases}$$

従って $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{-n}$ が a.e. $-(k, \omega)$ に対して存在して有限なることと $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i f(\omega)$ が a.e. $-\omega$ に対して有限なることは同値である。

又 $\mathcal{F}_{-n} = \mathcal{F} \times \mathcal{Z}$ ($\mathcal{Z}$ は trivial field on N) なる故, $A \in \mathcal{F}_{-n}$ は $A = A_0 \times N$ (但し $A_0 \in \mathcal{F}$) の形に表わされる。

$$\therefore \int_A |x_0| d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_0} |T^k f(\omega)| dP$$

従って前の martingale の収束定理を直接にこの formulation に

適用して Ergodic theorem を導くことは, Ergodic theorem に普通に登場する T に対しては失敗する。

Ergodic theorem が成立する例としては,

① (Dunford Schwartz) $T: L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ が positive contraction で且つ $\|T\|_\infty \leq 1$ の場合。

② $\|T\|_1 < 1$ の場合。等がある。

(注意)

有限なところでの maximal lemma から Ergodic theorem での maximal lemma を導くことは, 出来るのではなかろうか。
この結果自体は Ergodic theorem が正しいことが分っているから正しい。すなわちこの場合は $\int_A |x_0| d\mu$ が $\mathcal{F}_\infty$ の上の measure として σ -finite でなくても convergence theorem の成立している例となっている。

最後に Chacon-Ornstein 型の Ergodic theorem と同値な martingale の収束定理の formulation は,

$0 \leq g \in L^1$ に対して, $P_k(d\omega) = T^k g(\omega) \cdot P(d\omega)$ と置く。

$(U, \mathcal{U}, \nu) = (\Omega \times N, \mathcal{F} \times \mathcal{N}, (P_k) \times \nu)$ と置く。

$$x_0(k, \omega) \equiv \frac{T^k f(\omega)}{T^k g(\omega)} \quad \text{に対して}$$

$$E\{x_0 | \mathcal{F}_n\}(k, \omega) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} T^i f}{\sum_{i=0}^{k-1} T^i g} & k < n \\ \frac{T^k f(\omega)}{T^k g(\omega)} & k \geq n \end{cases}$$

とすることを使えばよい。

4. Brunnel's maximal lemma ([2], [9] 参照)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は probability space. とし. $T \in L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ なる positive contraction operator とする.

$S \in L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ なる T の dual operator とする.

S は $\times$ positive contraction である.

$Sf(\omega) = \int S(\omega, d\omega') f(\omega')$ と書ける場合 $S(\omega, d\omega')$ を S の transition function on Ω . と呼ぶ。Doob [5] に依れば常にこの場合に reduce できる。

Ω を state space とし $S(\omega, d\omega')$ を transition function とする Markov chain $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ を考える。

$$E \subset \Omega \text{ に対して } \psi_E(\omega) = H_E 1(\omega) = P_\omega \left\{ \omega \mid Y_n(\omega) \in E \text{ for some } n \geq 0 \right\}$$

と置くと次の Brunnel の maximal lemma が成立する。即ち。

$$f \in L^1(\Omega) \text{ に対し. } \tilde{\Omega}_f = \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{n \geq k} \left(\sum_{k \leq m \leq n} T^m f > 0 \right)$$

と置く時 $\forall E \subset \tilde{\Omega}_f$ に対して. $\int f \cdot \psi_E dP \geq 0$ が成立つ。

この maximal lemma を仮定して Chacon Ornstein の定理を証明する。

(証明) $f \geq 0$ と仮定しても一般性を失わない。

$$A' = \left\{ \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} T^k g(\omega) > 0 \text{ 且つ } \lim \frac{\sum_{k=0}^n T^k f(\omega)}{\sum_{k=0}^n T^k g(\omega)} \text{ が存在しない} \right\}$$

と置き $P(A') > 0$ とし矛盾を導く。

仮定より $a < b$ なる二実数 a, b があつて.

$$E = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} T^k g(\omega) > 0 \text{ 且 } \liminf \frac{\sum T^k f}{\sum T^k g} < a < b < \limsup \frac{\sum T^k f}{\sum T^k g} \right\}$$

と置く. $P(E) > 0$.

もし $\omega \in E$ とすると明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} T^k g = +\infty$

なる故

$$\limsup \frac{\sum_{i=0}^{n-1} T^i f(\omega)}{\sum_{i=0}^{n-1} T^i g(\omega)} = \limsup \frac{\sum_{i=k}^{n-1} T^i f(\omega)}{\sum_{i=k}^{n-1} T^i g(\omega)}$$

が $\forall k$ に対して成立する。

$\therefore \omega \in E$ より $\omega \in \tilde{\Omega}(f - bg)$ が出る。

従つて maximal lemma より $\int (f - bg) \psi_E dP \geq 0$

同様に $\int (ag - f) \psi_E dP \geq 0$

両式相加して $(a - b) \int g \cdot \psi_E dP \geq 0$

$$\therefore \int g \cdot \psi_E dP \leq 0 \quad \therefore \int g \cdot \psi_E dP = 0$$

$$\text{又 } \tilde{\Omega}(f - bg) \subset \tilde{\Omega}_{T^k}(f - bg) \quad \therefore E \subset \tilde{\Omega}_{T^k}(f - bg)$$

$\therefore$ maximal lemma より $\int T^k(f - bg) \psi_E dP \geq 0$

同様に $\int T^k(ag - f) \psi_E dP \geq 0$

両式相加して $(a - b) \int T^k g \psi_E dP \geq 0 \quad \therefore \int T^k g \cdot \psi_E dP = 0$

$$\therefore \int \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i g \right) \psi_E dP = 0 \quad \text{又 } \psi_E \geq I_E$$

$$\therefore \int \left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i g \right) I_E dP = 0$$

又 $E \subset A'$ 又 A' の上では $\sum_{k=0}^{\infty} T^k g > 0$

$\therefore P(E) = 0$ これは矛盾である。

極限が finite であることの証明も同様にして出来る。 *q.e.d.*

5. Ergodic theorem への他の approach に関する論文を紹介する。

Nevai [7] の方法は

$G \in$ Ergodic theorem が成立する f の class と置く。この時

1) G は $L^1(\Omega)$ の中で dense である。

2) G は $L^1(\Omega)$ の中で closed である。

の二段階で証明する。1) の証明は容易であるが、2) には maximal lemma を用いる。

この方法は Chacon-Ornstein 型、martingale の収束、vector valued martingale, vector valued ergodic theorem に対しても適用できる。

Tulcea [11] では

$\{T_p\}_{n \leq p \leq 0} \in L^1$ 上の contraction の family とする。(p は整数)

T_p が条件 $T_p \cdot T_{p+1} = T_p$ を満たす時

$\Omega_f = \bigcup_p \bigcup_n \left\{ \sum_{m \leq n} T_p^m f > 0 \right\}$ と置くと $\int_{\Omega_f} f \geq 0$ である。

$n = -1$ で $T_{-1} = T$, $T_0 = I$ と置けばこれは ergodic maximal lemma に従い、 $T_p = E(\cdot | \mathcal{F}_p)$ とすれば martingale maximal lemma である。

Rota [10] の方法では.

φ_t を semi-group of measure preserving transformation on Ω とする.

$T_t f(\omega) \equiv f(\varphi_t(\omega))$ on $L^\infty(\Omega)$ と定義する.

T_t の generator $\in D$ とすると. D は derivation である. 即ち.

$$D(u \cdot v) = u Dv + v Du$$

1 が D の spectre でないとする.

$$R = (I - D)^{-1} \text{ と置く.}$$

$$(*) \quad R(u \cdot v) = Ru \cdot Rv + R((u - Ru)(v - Rv))$$

を満足する. 一般に(*)を満足する operator を Reynolds operator と呼ぶ. (Kampé de Fériet)

R_t を contraction (即ち $u \geq 0$ なら $0 \leq \int R_t u \leq \int u$)

且 Reynolds operator とする.

$\{R_t\}_{0 \leq t < +\infty}$ が更に $(sR_t - tR_s) = (s-t)R_t R_s$ を満たす

時 generalized martingale と呼ぶ. この時次の定理が成り立つ.

(定理) Generalized martingale $\{R_t\}_{t \geq 0}$ が与えられた時

$u \in L^p$ ($p > 1$) に対して $\lim_{t \downarrow 0} R_t u$ が a.e. で存在する.

これは

$R_t = E\{\cdot \mid \mathcal{F}_t\}$ とおくと decreasing field の martingale

の収束定理に依っている.

Ergodic theorem の翻訳は

$$G_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\lambda d\lambda = (t - D)^{-1}$$

$$R_t = t G_t \quad \text{とすると} \quad G_t - G_s = (s - t) G_t G_s$$

で R_t は generalized martingale になることがわかる。

$$\text{これと} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\lambda d\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\lambda T_\mu d\mu}{\lambda} \quad \varepsilon \text{ 見ればよい。}$$

問題とは、このまゝの形で Chacon - Ornstein 型でなる。

又 $p > 1$ の場合しか言えていないが $p = 1$ の時にはどんなふうか
しにかあるか。

文献

1. P. Billingsley, Ergodic theory and information, Wiley, 1965
2. A. Brunel, C.R. Acad. Sci., Paris. 256 (1963) 5481 - 84
3. R.V. Chacon, & D. Ornstein, Ill. J. Math. 4. (1960) 153-160
4. J.L. Doob, Proc. 4-th Berkeley Symp. vol.2. 95-102
5. —, Z. Wahr. 1 (1963) 288-94
6. M. Jerison, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 531-39
7. J. Neveu, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 15 (1965) 31-42
8. —, Mathematical foundations of the calculus of prob.
Holt Rinehart & Winston, 1965
9. P.A. Meyer, Ann. Inst. Fourier Grenoble 15 (1965) 89-96
97-102
10. G.C. Rota, C.R. Acad. Sci. Paris 252 (1961) 2064-66
11. A & C. Ionescu Tulcea, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963)
107-24