

Suhl-Kondo理論に

についての Comment

東大理 川 村 清

(2月15日受理)

§ 1. 問 題 点

Classical spin limit という言葉は今の場合, $SJ \rightarrow \text{finite}$ 且つ $S \rightarrow \infty$ の極限を意味する。その時, Suhl の方程式¹⁾ は次のようになる。

$$t(z) = \int_L \rho(x) (z-x)^{-1} [|t_+(x)|^2 + 4S(s+1) |\tau_+(x)|^2] dx \quad (1a)$$

$$\tau(z) = -\frac{J}{2} + \int_L \rho(x) (z-x)^{-1} [t_+(x)\tau_-(x) + t_-(x)\tau_+(x)] dx \quad (1b)$$

ここで $t_{\pm}(x) = t(x \pm i\delta)$ etc. である。この方程式は簡単に解けてよく知られた次の解を与える。²⁾

$$t(z) = J^2 S(s+1) F(z) [1 - J^2 \{ F(z) \}^2]^{-1} \quad (2a)$$

$$\tau(z) = -(J/2) [1 - J^2 \{ F(z) \}^2]^{-1} \quad (2b)$$

ここで

$$F(z) = \int_L \rho(x) (z-x)^{-1} dx \quad (3)$$

一方, Suhl 及び Kondo は (1b) より次の式を求めた^{1), 3)}

$$\begin{aligned} |\tau_+(x)|^2 &= (J/4)^2 [1+b]^{-1} \\ b &= (2\pi J \rho(x))^2 S(s+1) \end{aligned} \quad (4)$$

(3) で

$$F(x+i\delta) \cong -\pi i \rho(x) \quad (5)$$

としても (2b) は

$$|\tau_+(x)|^2 = (J/4)^2 [1 + (b/4)]^{-2} \quad (6)$$

となり (4) とは一致しない。その原因は、どこにあるのかを考えてみる。

§ 2. Hilbert 問題への移行と問題点

Kondo は (1 b) から

$$\mathcal{J}_m \tau_+(x) = -\pi \rho(x) [t_+(x) \tau_-(x) + t_-(x) \tau_+(x)] \quad (7)$$

を作り、両辺を $|\tau|^2$ で割った。次に、非常に重要な仮定として、 $\rho(z)$ 、という関数が次式の性質をもつと仮定する。

$$\rho(x+i\delta) = -\rho(x-i\delta) = \rho(x) \quad \text{on } L \quad (8)$$

そうすると

$$X(z) = -(J/2) [1 - 2\pi i J \rho(z) t(z)] / \tau(z) \quad (9)$$

で定義される $X(z)$ は、 L の上で

$$X_+(x) - X_-(x) = 0 \quad (10)$$

を満す。一方 L が有限の長さなら、(1 a), (1 b) から

$$\lim_{z \rightarrow \infty} t(z) = o(z^{-1}) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tau(z) = -(J/2)$$

そこで

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 1 \quad (11)$$

(10) と (11) を満し、 z に関して L 以外で “holomorphic” な解を求めよというのが Hilbert problem でその解は

$$X(z) \equiv 1 \quad (12)$$

で与えられる。⁴⁾ 一方、本当の解の (2 a), (2 b) を (9) に代入すると本当の $X(z)$ は次のようになる。

$$X(z) = 1 - J^2 S(s+1) \left\{ \int_L \rho(x) (z-x)^{-1} dx \right\}^2 - 2\pi i \rho(z) J^2 S(s+1) \int_L \rho(x) (z-x)^{-1} dx \quad (13)$$

Hilbert problem が unique であることから (13) の第2, 3項の寄与は恒等的に消えるはずだが, それは $\rho(z) \equiv 0$ を意味する。このことから, Hilbert problem を作り, それが解ける為には, $\rho(z)$ にきびしい条件が必要で, そのような関数は, 実は存在しないことが判る。

§ 3. $\rho(z)$ のいくつかの例についての検討

まず (1a), (1b) の積分が収束するためには, $\rho(x)$ が遠方で減少するか, あるいは積分領域が有限であることが必要である。後者の方が条件がゆるいので, いまは積分が $x = -D$ から $x = D$ までの積分だとする。physical にもこの場合の方が reasonable である。そこで (8) をみたす $\rho(z)$ として, 次の形が頭にうかぶ。

$$\rho_1(z) = \rho_0 \sqrt{(D-z)(D+z)} \quad (14)$$

$$\rho_2(z) = \rho_0 / \sqrt{(D-z)(D+z)} \quad (15)$$

まず $\rho_1(z)$ は, $z \rightarrow \infty$ で $i\rho_0 z$ に近づくが, これでは, (9) から

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 1 + 2\pi J \rho_0 z \lim_{z \rightarrow \infty} t(z) \quad (16)$$

これから $z \rightarrow \infty$ での $X(z)$ の漸近形は $t(z)$ についての形が判らなくてはならないから, Hilbert problem にならない。 $\rho_2(z)$ を使うと (3) の $F(z)$ は $z = D$ で $1/\sqrt{D-x}$ で発散する。 $\rho_2(z)$ も同じように発散するから, 本当の $X(z)$ は (13) で判るように

$$X(z \cong D) \sim (D-x)^{-1}$$

の pole をもつ。このことから求める $X(z)$ は “sectionary holomorphic” ではなく, したがって Hilbert problem の解ではない。いいかえれば求める $X(z)$ は, Hilbert problem のザルの網目からおちてしまうので

ある。

(14), (15) の他に $\sqrt{(D-z)/(D+z)}$ も考えられるが, $\rho_2(z)$ と同じ理由で Hilbert problem を構成しない。

§ 4. 結 論

われわれは, Suhl-Kondo の解が classical limit では, 正しくないことを示し, その理由を考えた。われわれのみたところでは, Suhl-Kondo が Hilbert 問題を解くのに使ったような都合のよい $\rho(z)$ は存在しないことを示した。実際, $-D \leq x \leq D$ でのみ cut をもち, (8) をみたすような $\rho(z)$ をいくつか検討してみると, どれも Hilbert 問題を構成しない。実は, Zittarz⁵⁾ の解も classical limit で正しくないが, やはり Hilbert 問題を構成しないからである。

それでは Suhl's equation の厳密解は何かということであるが, それが Suhl, Kondo 及び Zittarz の求めたものに非常に近いのか, あるいはともなく異なるのかは勿論判らない。したがって, (4) の b を classical limit に合わせただけでは信用出来ない。

Quantum limit 及び classical limit でのみ正しい解として,

$$\begin{aligned} t(z) &= J^2 S(s+1) \left[\int dx \rho(x) (z-x)^{-1} |X_+(x)|^{-2} \right] \\ &\quad \times \left[1 - S(s+1) F(z) \int dx \rho(x) (z-x)^{-1} |X_+(x)|^{-2} \right]^{-1} \\ \tau(z) &= -(J/2) X(z) \left[1 - S(s+1) F(z) \right. \\ &\quad \left. \int dx \rho(x) (z-x)^{-1} |X_+(x)|^{-2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

⁶⁾ が考えられる。ここで

$$X(z) = 1 - J \int \rho(x) (z-x)^{-1} \operatorname{th}(x/2T) dx$$

この表は (2a) は満すが (2b) は満たさない。

謝 辞

中嶋・鈴木両先生その他, 何人かの方に議論していただいたことを感謝します。

文 献

- 1) H.Suhl, Phys. Rev. 141 (1966), 483.
- 2) H.Shiba, Prog. Theor. Phys.
- 3) J.Kondo, Prog. Theor. Phys. 40 (1968), 695.
- 4) N.I.Muskhelishvili, Singular Integral Equations
(P.Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands, 1953)
ch. 10.
- 5) J.Zittarz, Zeit. Physik. 217 (1968), 43.
- 6) 川村 清, 物性研究 10 (1968), 282.

〔追 記〕

上で Zittarz⁵⁾ の解が classical limit で正しくないように書いたが¹⁾³⁾ それは、筆者の誤解であった。classical limit での、Suhl¹⁾, Kondo³⁾, Zittarz⁵⁾ の表式は次のようになる。まず Suhl は、

$$|\tau|^2 = |F|^2 / (1 + a|F|^2) \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$F(z)$ の表式の中の $(t_u/V) = 1$ とし、 $\tanh \frac{\beta x}{2}$ の項を無視すると

$$\begin{cases} F(z) = \text{constant} = C^{-1} \\ C = (4/J^2 - a)^{1/2} \end{cases}$$

だから、(A・1) から

$$|\tau|^2_{\text{cl.}} = \left(\frac{J}{4}\right)^2 \quad (\text{A} \cdot 2)$$

Kondo は

$$|\tau|^2_{\text{cl.}} = (J/4)^2 [1 + (2\pi J\rho)^2 S(s+1)]^{-1} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

Zittarz⁵⁾ の場合は

$$|\tau|^{-2} = |Y(\omega)|^2 + (2\pi J\rho)^2 S(s+1) \quad (\text{A} \cdot 4)$$

ここで Y は、任意な関数 $f(z)$ を含んでいて classical limit で

$$Y(z) = 1 + f(z) \quad (\text{A} \cdot 5)$$

彼の notation では、

$$f(z) = -S(s+1) F_r(z) F_a(z)$$

であるが、これは explicit に書けば

$$\begin{aligned} f(z) = & -2\pi i J^2 S(s+1) \rho(z) \int \frac{dx}{z-x} \rho(x) \\ & - J^2 S(s+1) \left\{ \int \frac{\rho(x) dx}{z-x} \right\}^2 \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 6)$$

となり、 $Y(z)$ は (13) の $X(z)$ に一致する。Zittarz は $f(z)$ を Nagaoka 方程式と Suhl 方程式の比較から決めた。 $f(z)$ は $\rho(z)$ を彼流に一般化しても、依然厳密な意味での Hilbert 問題にならず、したがって一意的に解けないことから出て来た。Kondo 流にやって、 $\rho(z)$ として (15) を仮定し、そのかわり Hilbert 問題は一意的に解かず

$$X(z) = 1 + f(z)$$

としておいて、 $f(z)$ が $z = \pm D$ に pole をもち、 $z \rightarrow \infty$ で消えるという条件から求められればそれでもよい。Classical limit で正しいように $f(z)$ を選べば (A・6) となる。このやり方は、しかし、厳密にということ正しくなく、結局 Zittarz のように Nagaoka 方程式にもどることになるろう。