

乗算確率過程が解析解を持つ場合の性質¹金沢学院大学 藤本 祥二², 石川 温

ベキ分布を導き出すシンプルで強力な確率過程に、ランジュバン方程式

$$x_{n+1} = b_n x_n + f_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

で与えられる乗算確率過程がある。ここで x_n は繰り返し更新される確率変数、 b_n は乗算ノイズと呼ばれる確率変数、 f_n は加算ノイズと呼ばれる確率変数であり、各確率変数は互いに無相関である。この確率過程が定常なベキ分布の裾野を持つ分布に収束する条件が文献 [1] によって調べられていて、その条件の 1 つ $\langle b_n^\alpha \rangle = 1$ からベキ指数 α を見積もることができる。

乗算確率過程によって生成される分布は裾野はベキ分布になるがある閾値以下の領域ではベキ分布から外れてくるように見える。ベキ分布から外れる領域がどのような形になるのか、乗算確率過程の分布が簡単に求まる具体的なモデルを与えて調べることができる。加算ノイズは定数 $f_n = C$ に取り、乗算ノイズ確率分布 $p(b_n)$ には次の 2 つの場合を考える。

$$p(b_n) = \begin{cases} 1-p & (b_n = 0) \\ p & (b_n = \lambda) \\ 0 & (\text{other } b_n) \end{cases}, \quad p(b_n) = \begin{cases} 1-p & (b_n = \lambda^{-1}) \\ p & (b_n = \lambda(>1)) \\ 0 & (\text{other } b_n) \end{cases}. \quad (2)$$

左の式を 0 or λ モデル、右の式を λ^{-1} or λ モデルと呼ぶことにする。

0 or λ モデルの確率分布は簡単に計算することができ、表 1 で与えられる。このモデルの場合

x_{n+1}	$p(x_{n+1})$	$P_{\geq}(x_{n+1})$
C	$1-p$	1
$C(1+\lambda)$	$p(1-p)$	p
$C(1+\lambda+\lambda^2)$	$p^2(1-p)$	p^2
...	...	...
$C(1+\lambda+\lambda^2+\dots+\lambda^{n-1})$	$p^{n-1}(1-p)$	p^{n-1}
$C(1+\lambda+\lambda^2+\dots+\lambda^{n-1}+\lambda^n)$	p^n	p^n

表 1: 0 or λ モデルに於ける x_{n+1} の確率 $p(x_{n+1})$ と累積確率 $P_{\geq}(x_{n+1})$

は $\langle b_n^\alpha \rangle = 1$ の条件から $p = 1/\lambda^\alpha$, $\alpha = \log_\lambda p^{-1}$ が得られ、 $0 < p < 1$, $\alpha > 0$ より $\lambda > 1$ が

¹この原稿は、京都大学基礎物理学研究所 2009 年度研究会『経済物理学 2009』での発表を元に書かれている。

²E-mail: fujimoto@kanazawa-gu.ac.jp

定常なベキ分布になるための条件になる。図1は $\lambda > 1$ の場合の累積分布である。大きな黒丸は $\lambda = 4, p = 1/8, C = 1$ の場合、小さな黒丸は $\lambda = 1.1, p = 1/1.1^{1.5}, C = 1$ の場合の累積分布

$$x = C \frac{\lambda^{k+1} - 1}{\lambda - 1}, \quad y = p^k, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3)$$

をプロットしたものである。式(3)の連続的な表現が $y = D(x + E)^{-\alpha}$, $D = (C\lambda/(\lambda - 1))^\alpha$, $E = C/(\lambda - 1)$ である。図1の灰色の直線はベキ分布の裾の漸近形 $y = Dx^{-\alpha}$ を表示したものである。ベキ分布からずれてるように見える部分は平行移動 E による効果によるものである。また、 $\lambda = 1$ の場合は連続的な表記が $y = p^{x/C-1}$ である幾何分布に、 $\lambda < 1$ の時は $x = C/(1 - \lambda)$ に漸近する有限な分布になる。

λ^{-1} or λ モデルの場合は表1の時と違い n が1つ増える毎に x_n の取りうる値が倍々と増えていく。それでも $n = 20$ 程度なら数値計算で簡単に計算できる。このモデルの場合は $\langle b_n^\alpha \rangle = 1$ の条件から $p = 1/(\lambda^\alpha + 1)$, $\alpha = \log_\lambda(p^{-1} - 1)$ が得られ、 $\lambda > 1, \alpha > 0$ より $p < 1/2$ が定常なベキ分布になるために必要である。図2は $\lambda = 4, p = 1/9, C = 1$ の場合の累積分布である。大きな黒丸は x_5 、小さな黒丸は x_{10} 、黒点は x_{20} を表している。 n を大きくしていくと離散的な分布の間が稠密になって行き定常な分布に収束していく様子が分かる。灰色丸印は累積分布の尖りの強い部分の値を累積分布の表から予想した式

$$x = C \frac{\lambda^{k+1} - 1}{\lambda - 1} \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad y = \left(\frac{p}{1 - p} \right)^k, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (4)$$

をプロットしたものである。図3は $\lambda = 1.5, p = 1/(1.5^{1.5} + 1), C = 1$ の場合の累積分布である。大きな黒丸は x_5 、小さな黒丸は x_{10} 、左の系列の黒点は x_{20} を、一番右の系列の黒点はモンテカルロシミュレーションの結果を表している。 $n = 20$ 程度では収束していないがモンテカルロシミュレーションの値に収束していきそうである。灰色丸印は式(4)をプロットしたものでカーブしている部分でもある程度よい近似になっていると思われる。

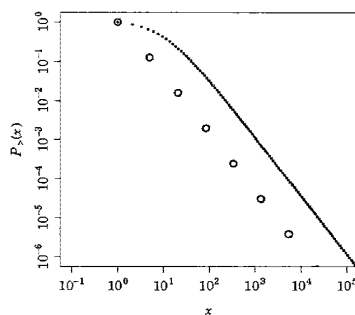


図1: 0 or λ モデルの $\lambda > 1$ の場合の累積分布。

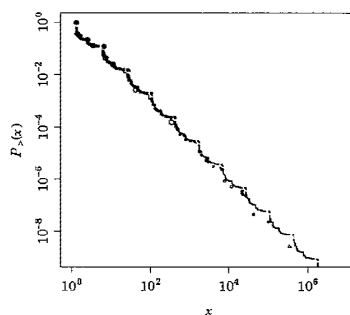


図2: 0 or λ モデルの $\lambda = 4$ の場合の累積分布。

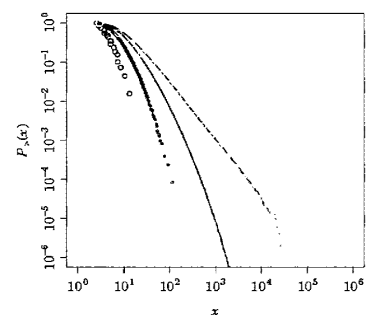


図3: 0 or λ モデルの $\lambda = 1.5$ の場合の累積分布。

2つのモデルを考えたがどちらの場合でもベキ分布からのズレは平行移動の効果であると考えられる。応用上は裾野はベキ分布で中間領域では対数正規分布になる定常なモデルが有用であるが、

平行移動では対数正規分布になるような効果は導き出せない。対数正規分布になるような効果を組み込むには文献 [2] にあるように乗算ノイズに上手く x_n 依存性を科すことが必要であると思われる。

謝辞

本研究は科研費（20510147）の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] H. Takayasu, A. Sato and M. Takayasu, Phys. Rev. Lett **79** (1997) 966.
- [2] M. Tomoyose, S. Fujimoto and A. Ishikawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. **179** (2009) 114.