

## 曲ったみちの中の粘性流 の数値計算

鉄道技研 川口 光年  
小沢 智

### §1. はしがき

粘性流体の運動を記述する *Navier-Stokes* の方程式は非線型であるので、その解析的取り扱いには極めて困難である。したがって解析解は極めて限られた場合にしか得られていない。しかし電子計算機の出現は、これまで事実上不可能に近かった *Navier-Stokes* の方程式の数値的解法を可能にし、*Navier-Stokes* の方程式の——ひいては粘性流体の運動の——性質を一步一步とき明してゆくことが可能になった。

この研究は粘性流体の運動を数値解により明らかにして行こうとする一連の研究の一つとして、2次元管(みち)が直角に曲った場合に生じる粘性流体の運動を数値的に取り扱ったものである。

### §2. 基礎方程式とその差分化

計算の基礎となる Navier-Stokes の方程式は、次のような形で

$$-\frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{R} \Delta \omega \quad (2.1)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (2.2)$$

$$\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \quad (2.3)$$

で与えられる。ここに  $\psi$ ,  $\omega$  はそれぞれ流れの函数、渦度で、 $R$  はレイノルズ数で

$$R = U_m H / \nu \quad (2.4)$$

で定義される。 $(U_m$  は  $x$  の中の平均流速,  $H$  は  $x$  の幅,  $\nu$  は動粘性係数)。

(2.1), (2.2) を差分化するために Fig. 1 の様な configuration を考えると,  $f$  を  $x$ ,  $y$  の任意の函数として, 微分が

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)} f_A$$

$$- \frac{m_1}{m_2(m_1+m_2)} f_C$$

$$+ \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} f_0 \quad (2.5)$$

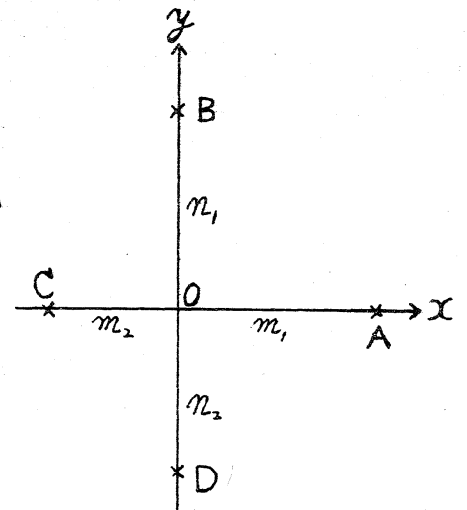


Fig. 1

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{n_2}{n_1(n_1+n_2)} f_B - \frac{n_1}{n_2(n_1+n_2)} f_D + \frac{n_1-n_2}{n_1 n_2} f_0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} (\Delta f)_0 &= \frac{2}{m_1(m_1+m_2)} f_A + \frac{2}{m_2(m_1+m_2)} f_C \\ &\quad + \frac{2}{n_1(n_1+n_2)} f_B + \frac{2}{n_2(n_1+n_2)} f_D \\ &\quad - \left(\frac{2}{m_1 m_2} + \frac{2}{n_1 n_2}\right) f_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

の様に差分化される。

### § 3. 数値計算(Ⅹの I)

Fig. 2 の様な 2 次元の管を考える(角を C E F の様に丸めた管は § 4 で取り扱う)。管の両端は曲り角より十分遠ければ途中では 2 次元のポアゼイユの流れになっていると考えられるので、AB, GH ではポアゼイユの流れであると仮定する。

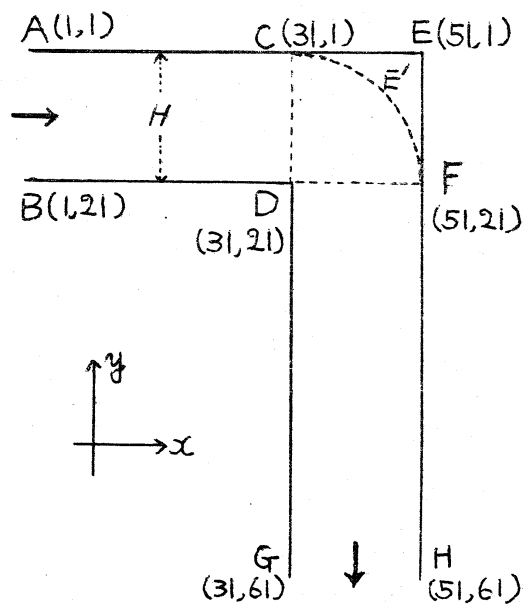


Fig. 2

実際の計算はABの幅 $H$ を単位にとり,  $BD$ ,  $DG$ をそれぞれ2, 3単位とった。格子点間隔として,  $AB$ ,  $GH$ 方向には  $1/20$  単位,  $BD$ ,  $DG$  方向には  $1/10$  単位をとった。したがって  $ABDC$ ,  $DGHF$  内では矩形網目,  $CDFE$  内では正方形網目となった。格子点の位置を示すのに  $(i, j)$  を用いたが,  $i$  は  $x$  の方向に,  $j$  は  $y$  の方向に数える (Fig. 2)。

実際に数値計算を行なった手順は次の通り:

- (i) 初期データとしてポアセユ流の値を使う。ただし微分方程式の解でなく差分方程式の厳密解を用いる。これは  $ABDEC$  内では

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,j} &= \frac{(j-21)(j^2-12j-190)}{4020} \\ \omega_{i,j} &= \frac{40}{67} (11-j) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

で与える。  $DGHFE$  内においても同様な式を与える。

- (ii)  $AB$ ,  $GH$  上の  $\psi$ ,  $\omega$  の値は (i) で与えた値から変わらないと仮定し, 壁上では  $\psi$  が一定 (1 か 0),  $\psi$  の垂直方向の微分を 0 とする。これは例えば  $AC$  上では温度を

$$\omega_{i,1}^{(k)} = \omega_{i,1}^{(k-1)} + K[800(1-\psi_{i,2}) - \omega_{i,1}^{(k-1)}] \quad (3.2)$$

で補正することに対応する。ここに上つきの  $(k)$  は  $k$  番目の補

正值を示し,  $K$  は over(under-) relaxation 係数である.

(iii)  $AB$  から出発して流れの方向に補正を進めて行くが,  $ABDC$  の内部の点では, (2.1), (2.2) から (2.5) ~ (2.7) を使って差分化した式

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{(k)} = & \omega_{i,j}^{(k-1)} + K [0.1 (\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}) + 0.4 (\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1}) \\ & + 0.05 R \{ (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) (\omega_{i,j-1} - \omega_{i,j+1}) \\ & - (\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}) (\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j+1}) \} - \omega_{i,j}^{(k-1)}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{(k)} = & \psi_{i,j}^{(k-1)} + K [0.1 (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + 0.4 (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) \\ & + 0.001 (\omega_{i,j} - \psi_{i,j}^{(k-1)})] \end{aligned} \quad (3.4)$$

を使う.  $CD$  上,  $CDFE$  の内部点,  $DF$  上,  $DGHF$  の内部点についても同様な式を用いる.

(iv) (iii) の操作を適当な収束がみられるまでくり返す. 収束をみるために領域内の 5 点 (15, 15), (27, 15), (27, 25), (27, 35), (27, 45) の  $\psi^{(k)}$ ,  $\omega^{(k)}$  の値を前回の値  $\psi^{(k-1)}$ ,  $\omega^{(k-1)}$  と比較し, 補正の相対値 (例えば  $|\omega^{(k)} - \omega^{(k-1)}| / \omega^{(k-1)}$ ) が  $10^{-5}$  以下になった時に計算を止めた.

計算を遂行したのは第 1 表に示した場合である.

第 1 表

| R    | 0   | 4   | 8    | 16  | 32   | 40  | 48   |
|------|-----|-----|------|-----|------|-----|------|
| 補正回数 | 239 | 243 | 184* | 271 | 349* | 617 | 490* |
| K    | 1.3 | 1.3 | 1.3  | 1.3 | 1.2  | 1.0 | 0.9  |

\* R=8, 32, 48については, それぞれ R=4, 16, 32の結果を初期データとした。

#### §4. 数値計算(Xの2)

外側の角を第2図のC E Fの様に円弧で丸くしたものについても同様な計算を行なった。

格子点は§3の場合と同じにとったので, 円弧上の点は必ずしも格子点とはならない。例えばFig. 3のP点では§3でやった様な補正はきかない。そこで $\psi(X, Y)$ をO点のまわりで展開し,

$$\begin{cases} \psi_0 = 1 \\ (\psi_x)_0 = (\psi_y)_0 = 0 \end{cases}$$

なる境界条件を用いると

$$\psi(X, Y) = 1 + \frac{1}{2} \{ X^2 (\psi_{xx})_0 + 2XY (\psi_{xy})_0 + Y^2 (\psi_{yy})_0 \} + \dots \quad (4.1)$$

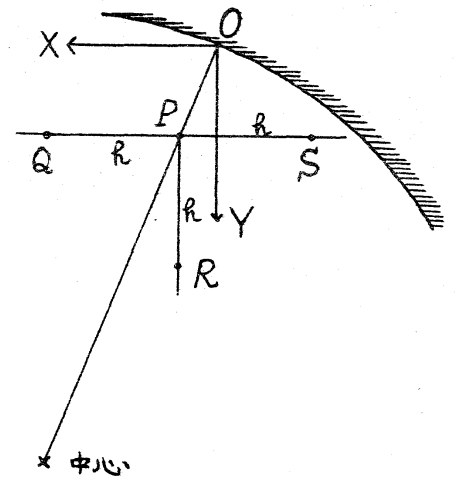


Fig. 3

となる。 $(\psi_{xx})_0$ 等を定数と考へ、(4.1)がQ, R, Sの点で満足する様に定めれば、P点における<sup>此の</sup>補正値が得られ、これからWに対する補正値もうる。Fig. 3と異なる configuration についても同様な関係を用いた。その他はS3と全く同様に行なつた。

実際に計算を行なつたのは第2表に示す場合である。

第2表

| R    | 0   | 8   | 16  | 32  | 40  | 48  |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 補正回数 | 206 | 237 | 251 | 381 | 585 | 730 |
| K    | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.2 | 1.0 | 0.9 |

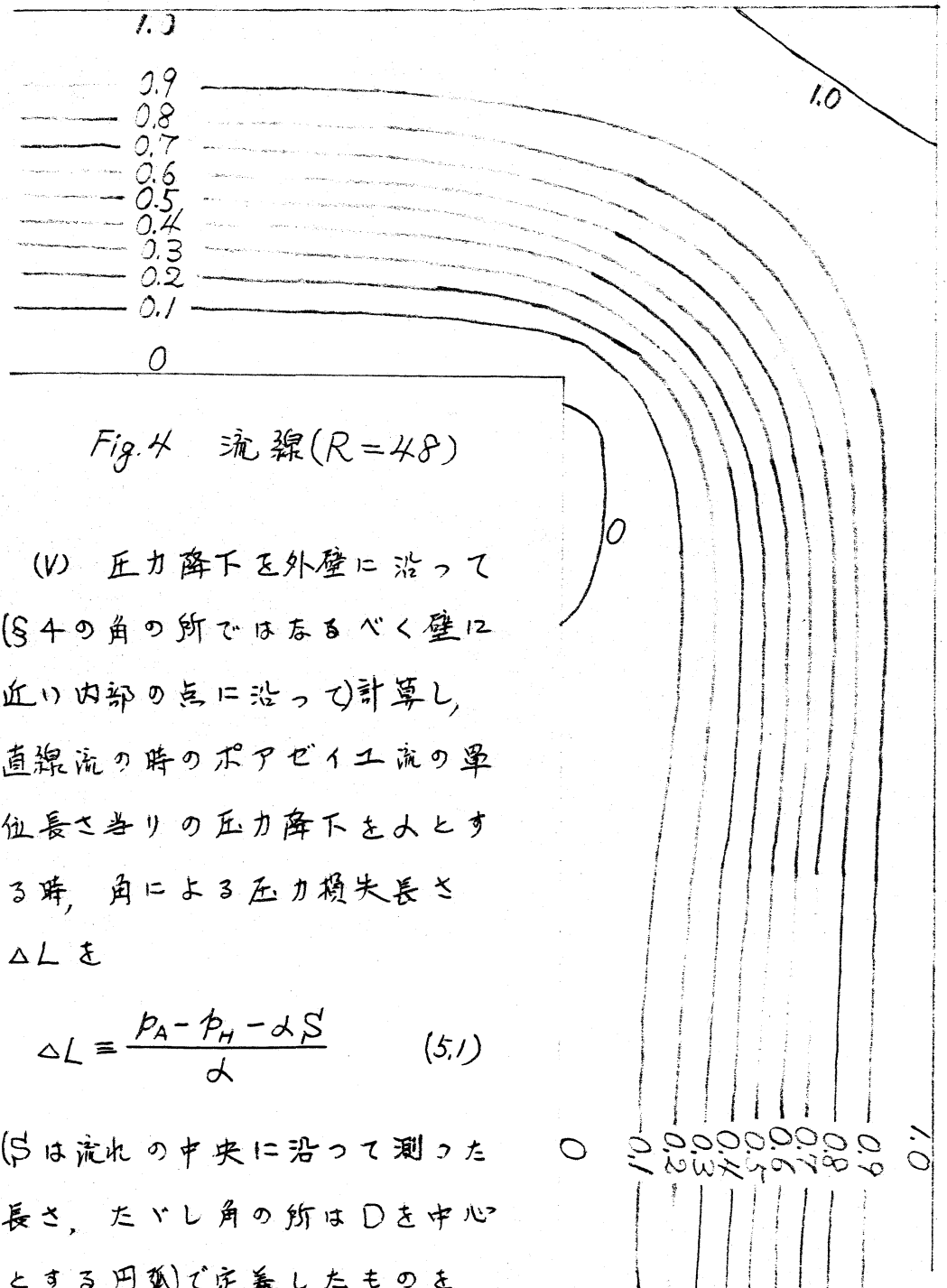
## S5. 結果

(i) S3~4の各場合について、流線、等温度曲線を描いた。Fig. 4~5.にその一例を示す。

(ii) 逆流はどちらの場合も $R=16$ ではあらわれてゐないが $R=32$ では出現し、レイノルズ数と共に成長するか比較的小さい。

(iii)  $R=0$ の場合でもS3の場合には外側壁の角の内側に Moffatt の渦が一っだけ存在してゐる。もっと小さいものは網目の粗さにおゝりかくされてゐる様である。

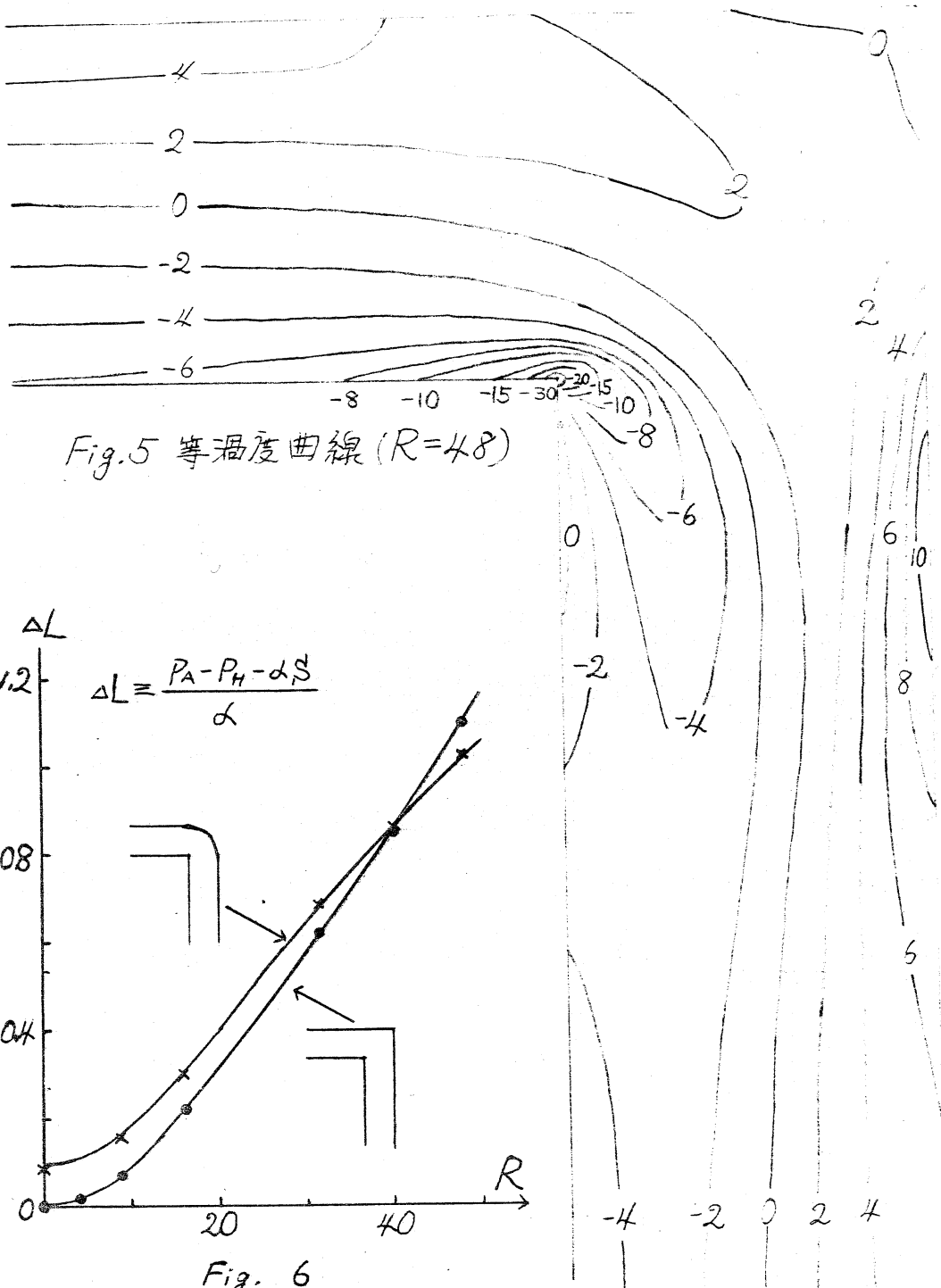
(iv) S3とS4とは流れの様子が非常によく類似してゐる。

Fig. 4 流線 ( $R=48$ )

(V) 圧力降下を外壁に沿って  
(§4の角の所ではなるべく壁に  
近い内部の点に沿って)計算し、  
直線流の時のポアゼユ流の単  
位長さ当りの圧力降下を  $\phi$  とす  
る時、角による圧力損失長さ  
 $\Delta L$  を

$$\Delta L = \frac{p_A - p_H - \phi S}{\phi} \quad (5.1)$$

( $S$  は流れの中央に沿って測った  
長さ、ただし角の所は  $D$  を中心  
とする円弧) で定義したものを  
Fig. 6 に示した。  $\Delta L$  はレイノ



ルズ数と共に増加するが、角の外壁を丸めた場合は丸め有り場合に比べて、低レイノルズ領域では損失が大きいが、高レイノルズ数領域では損失が小さい。これは  $R$  が小さいうちは角を丸め有るか領域が広く抵抗が小さいか、 $R$  が大きくなると角を丸め有るか角を滑かに流れる為抵抗が小さくなる為であろうと思われる。

(VI)  $R=64$  の場合は  $K$  を 0.5 まで下げたが収束は得られなかった。(under-relaxation 係数  $K$  は 1.8 から出発し、解が発散すれば 0.1 ずつ小さくした)。また  $R$  が大きくなった場合には下流側の管の長さをもっと長く取る必要があることが分かったので、 $R=64$  の場合の計算は断念した。

(19670818 M.K.)