

Automorphism groups of almost complex GKM manifolds

大阪公立大学 佐藤 敬志
Osaka Metropolitan University

1 Introduction

GKM 多様体とは、トーラス T の良い作用を持つコンパクトな多様体 M であって、その同変コホモロジー環が次の情報から完全に決定できるものである。その 1 つは孤立した固定点集合であり、もう 1 つは適切な余次元 1 の部分トーラス T' の作用の固定点集合として得られる 2 次元球面たちである。この 2 次元球面は T の作用で回転しており、北極と南極が T 作用の固定点になっている。固定点を結ぶ 2 次元球面を辺とみなすことで、この幾何的状況をグラフとみなし、さらにその辺がどの部分トーラス T' を用いたものなのかというラベルを辺に与えたものを M の GKM グラフという。特にある頂点（固定点）に注目すると、辺のラベルがその固定点における接空間のウェイト空間分解を表している。GKM グラフは GKM 多様体の幾何学的な様子の要点を分かりやすく表したものと言える。

GKM 多様体 M が概複素構造をもち、 T -作用が誘導する接束の間の写像が概複素構造と可換であるとき、 M を概複素 GKM 多様体と呼ぶことにする。このとき、固定点における接空間のウェイト空間分解は概複素構造によって保たれ、2 次元球面に向きを与えられ、GKM グラフを有向グラフとして扱うことができる。

概複素多様体 M の自己同型写像とは、概複素構造を保つ微分同相写像 $M \rightarrow M$ のことで、コンパクト概複素多様体の自己同型群は次の著しい性質をもつ。

定理 1.1 ([1, Cor. 4.2 in p.19]). コンパクト概複素多様体 M に対し、 $\text{Aut}(M)$ は Lie 群になる。

本稿では概複素 GKM 多様体 M に対し、恒等写像 $\text{id}: M \rightarrow M$ を含む連結成分 $\text{Aut}^0_c(M) \subset \text{Aut}(M)$ を考え、さらにその極大コンパクト部分群を $\text{Aut}^0_c(M)$ と表す。

本稿では次に示す [2] での結果について、特に筆者の興味のある部分について、具体例を交えながら詳しく解説する。これは 2.3 節で述べる GKM グラフの自己同型群が $\text{Aut}^0_c(M)$ の情報を含んでいることを主張しており、GKM グラフの新たな応用の可能性を示唆する。

定理 1.2 ([2, cf. Lem. 2.3]). 連結な概複素 GKM 多様体 M に対し、2.2 節で述べる次の群準同型写像は単射である。

$$W(\text{Aut}^0_c(M)) \rightarrow \text{Aut}^*(\Gamma_M, \alpha_M)$$

2 概複素 GKM 多様体とその GKM グラフ

2.1 概複素 GKM 多様体とそのコホモロジー

Introduction で述べた本稿で扱う幾何学的な対象を厳密にしておこう。

定義 2.1. 奇数次のコホモロジーを持たないようなコンパクトな多様体 M にトーラス T の作用があり、次の条件を満たしているとする。作用の固定点は孤立点であり、各固定点 p の接空間 $T_p M$ をウェイト空間分解した際に、そのウェイトが pairwise linear independent である。このとき、 M を GKM 多様体 という。

定義 2.2. GKM 多様体 M が概複素構造 J をもち、次の条件を満たしているとする。 $\varphi \in T$ の作用が誘導する接束の間の写像 $d\varphi$ について

$$d\varphi \circ J = J \circ d\varphi$$

である。このとき、 M を 概複素 GKM 多様体 と呼ぶ。

つまり、概複素 GKM 多様体 M では、トーラスの各元が概複素多様体としての自己同型を引き起こす。また、各固定点 p の接空間 $T_p M$ のウェイト空間分解は概複素構造によって保たれる。

以下では、分類空間 BT の 2 次コホモロジー $H^2(BT; \mathbb{Z})$ とウェイト $\text{Hom}(T, S^1)$ を同一視する。概複素 GKM 多様体に対し、その GKM グラフを次で定める。

定義 2.3. 概複素 GKM 多様体 M の GKM グラフ (Γ_M, α_M) とはグラフ Γ_M と辺のラベル付け $\alpha_M: E(\Gamma_M) \rightarrow H^2(BT; \mathbb{Z})$ の組である。グラフ Γ_M の頂点集合は固定点集合 $V(\Gamma_M) = M^T$ とする。辺はトーラス作用で不変な $\mathbb{C}P^1$ であり、ちょうど 2 つの固定点を含んでいて、後述する向きがある。この $\mathbb{C}P^1$ は「固定点の接空間においてウェイト空間分解された各 1 次元複素空間」の exponential map の像とその無限遠点として得られるものでもある。この $\mathbb{C}P^1$ に対応するウェイトは 2 つの固定点のどちらから見るかによって符号が変わる。そこで 1 つの辺は双方向に引き付けられているとし、その向き付けられた辺に始点でのウェイトを対応させる写像が $\alpha_M: E(\Gamma_M) \rightarrow H^2(BT)$ である。

向き付けられた辺 $e \in E(\Gamma)$ に対し、 $s(e)$ で e の始点、 $t(e)$ で e の終点を表す。

注意 2.4. 概複素構造をもたない GKM 多様体でも GKM グラフが定義される。このときは向きを持たない辺を考える方が自然で、ラベルには符号の不定性を許す。

GKM 多様体 M の $\mathbb{Q}$ -係数同変コホモロジー環 $H_T^*(M) := H^*(ET \times_T M)$ を考える (ET は分類空間 BT 上の普遍束の全空間、つまり T が自由に作用する可縮空間)。このとき、固定点集合の包含写像 $\iota: M^T \hookrightarrow M$ は単射準同型

$$\iota^*: H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M^T) \cong \bigoplus_{M^T} H_T^*(pt) \cong \text{Map}(V(\Gamma_M), H^*(BT; \mathbb{Q}))$$

を導くことが知られている。このとき、その像の元は多項式の組であり、非常に具体的に表示・計算することが可能である。特に次の定理がある。

定理 2.5 (cf. [3], [4]). GKM 多様体の $\mathbb{Q}$ -係数同変コホモロジー環は次で与えられる。

$$\text{Im } \iota^* = \{f \mid f(s(e)) - f(t(e)) \equiv 0 \pmod{\alpha(e)} \text{ for } e \in E(\Gamma_M)\}$$

整係数の場合でも、少しの仮定があれば、同様に計算できる [5, Thm. 3.1]。

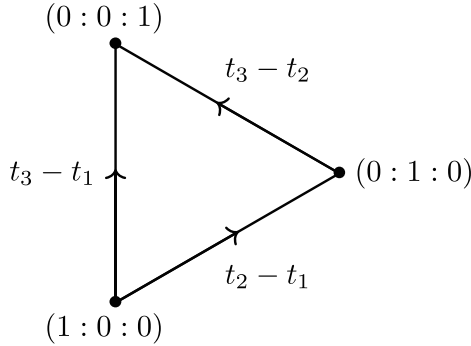
また、 $ET \times_T M \rightarrow BT$ により誘導される $H^*(BT) \rightarrow H_T^*(M)$ の像は $H^*(BT)$ に値を取る定数関数となっている。ゆえに

$$H^*(M) \cong H_T^*(M)/(H^{>0}(BT))$$

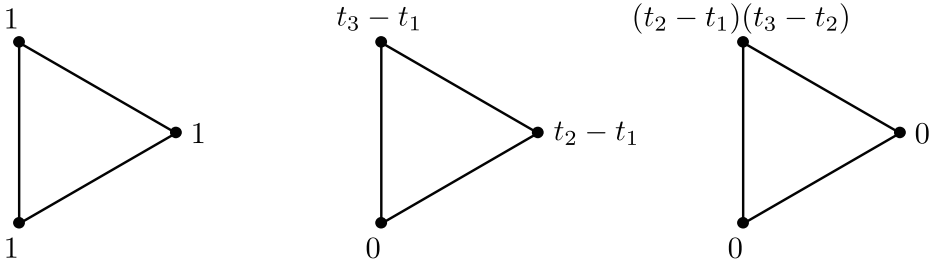
から通常のコホモロジー環が復元できる。

例 2.6 (最も簡単な例). $\mathbb{C}P^1 = \{(x:y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ に $T^1 \subset \mathbb{C}^\times$ が $t \cdot (x:y) = (tx:y)$ で作用していると固定点が $(1:0), (0:1)$ であり、それを結ぶ辺があり、 $(0:1)$ から $(1:0)$ へ向かう辺のラベルは t と書くことにする。(もし T^1 -作用が 2 倍の回転 $t \cdot (x:y) = (t^2x:y)$ なら $2t$ である。) また、 $t \cdot (x:y) = (tx:y) = (x:t^{-1}y)$ であり、 $(1:0)$ から $(0:1)$ へ向かう辺のラベルは $-t$ である。

他にも $\mathbb{C}P^2$ は $(t_1, t_2, t_3) \in T^3$ が $(t_1, t_2, t_3) \cdot (x:y:z) = (t_1x:t_2y:t_3z)$ で作用し、その GKM グラフは $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$ を頂点に持つ 3 角形になる。 $(1:0:0)$ と $(0:1:0)$ を結ぶ $\mathbb{C}P^1$ は $\{(x:y:0) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ である。この $\mathbb{C}P^1$ は $t_1 = t_2$ が定める部分トーラスの固定点集合である。他も同様で、ゆえにラベルには $\pm(t_1 - t_2), \pm(t_1 - t_3), \pm(t_2 - t_3)$ が現れる。下にこの GKM グラフを描いた。視認性のために辺の向きとラベルは片方のみを書いた。ここでの T^3 -作用は効果的ではないが、効果的な作用に限定するより、この方が分かりやすい作用であると思う。



さて、その同変コホモロジー環を計算しよう。 $T = T^3$ とする。まずは $H^*(BT)$ -加群としての基底を示そう。各頂点に次のように t_1, t_2, t_3 の多項式を割り振れば良い。



明らかに $H_T^*(M) \subset \text{Map}(V(\Gamma_M), H^*(BT)) = \text{Map}(V(\Gamma_M), \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3])$ はこの 3 つで張られている。真ん中の関数を x とすると、 $x(x - (t_2 - t_1))$ で右の関数が得られ

る（和や積は頂点ごとに計算される）。さらに $x(x - (t_2 - t_1))(x - (t_3 - t_1))$ は定数関数 0 である。ゆえに次数付き $H^*(BT)$ -代数として

$$H_T^*(\mathbb{C}P^2) \cong H^*(BT)[x]/(x(x - (t_2 - t_1))(x - (t_3 - t_1)))$$

であり、通常のコホモロジー環に落とすと次を得る。

$$H^*(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3)$$

例 2.7 (複素多様体でない例). S^6 には、次のようにして概複素構造が入る。八元数の純虚数部分を考え、自然に実 7 次元空間（正規直交基底 $e_1, \dots, e_7$, $e_i^2 = -1$, $e_i e_j = -e_j e_i$ ）とみなし、その単位球面 S^6 を考える。ある数 $x \in S^6$ における接空間 $T_x S^6$ は、 x に直交する純虚数全体と同一視でき、この接空間に左から x を掛けると接空間の変換を引き起こす。八元数は非結合的（ $i \neq j \neq l \neq i$ で $e_i e_j = \pm e_l$ とならない e_i, e_j, e_l に対し、 $e_l(e_i e_j) = -(e_l e_i) e_j (= (e_i e_l) e_j = -e_i(e_l e_j))$ ）であるが、 $e_i(e_i e_j) = -e_j$ であり、分配法則は成り立つので x を掛けることを 2 回行くと接空間を -1 倍することが分かる。これで S^6 に概複素構造が入った。これは複素構造でないことが知られている。

四元数の基底 $e_0 = 1, e_1, e_2, e_3$ ($e_1 e_2 = e_3$) に右から e_4 を掛けて（添字を 4 増やし）八元数の基底を得るとすれば、 $\pm e_4$ を固定点とする 2 次元トーラスの作用が S^6 に入る。これを説明しよう。 $x \in S^6$ を

$$\begin{aligned} x = & r_1 \cos \theta_1 e_1 + r_2 \cos \theta_2 e_2 + r_3 \cos \theta_3 e_3 + r_4 e_4 \\ & r_1 \sin \theta_1 e_5 + r_2 \sin \theta_2 e_6 + r_3 \sin \theta_3 e_7 \end{aligned}$$

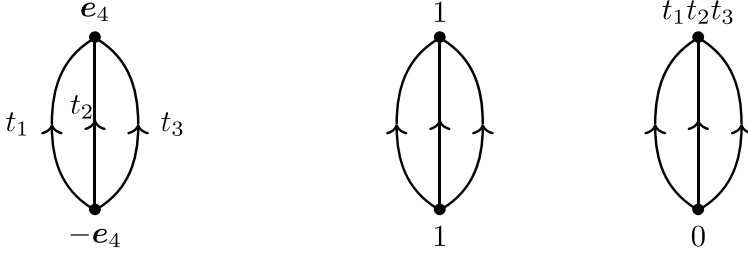
とパラメータ表示する ($r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 1$)。ひとまず概複素構造 J を忘れて $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in T^3$ の作用（今は $\varphi_i \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とみなしている）を

$$\begin{aligned} \varphi \cdot x = & r_1 \cos(\theta_1 + \varphi_1) e_1 + r_2 \cos(\theta_2 + \varphi_2) e_2 + r_3 \cos(\theta_3 + \varphi_3) e_3 + r_4 e_4 \\ & r_1 \sin(\theta_1 + \varphi_1) e_5 + r_2 \sin(\theta_2 + \varphi_2) e_6 + r_3 \sin(\theta_3 + \varphi_3) e_7 \end{aligned}$$

で定める。このとき、 $d\varphi \circ J = J \circ d\varphi$ を満たす $\Leftrightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \pmod{2\pi}$ である。この 2 次元部分トーラス T が S^6 に作用し、 S^6 は概複素 GKM 多様体になる。非常に簡潔な結論が得られ、計算の過程に八元数の神秘性が垣間見えるところが面白いと思う。

結局、この S^6 の GKM グラフは 2 つの頂点 $\pm e_4$ を持ち、それを結ぶ辺が 3 本ある。その 3 つの $\mathbb{C}P^1$ は r_1, r_2, r_3 のうち 2 つを選んで 0 に固定することで得られ

る。ラベルには $\pm t_1, \pm t_2, \pm t_3$ が現れる ($t_i \in \text{Hom}(T, S^1)$) に取り直して上を書き換えた。 $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ に注意)。点 $-e_4$ における概複素構造は $-e_4$ を左から掛けて、 $-e_4 e_1 = e_5, -e_4 e_2 = e_6, -e_4 e_3 = e_7$ であり、上のパラメータ表示による回転の方向と一致することに注意。 S^6 の GKM グラフ (やはり向きとラベルは片側のみ表示) を下図左側に、同変コホモロジーの $H^*(BT)$ -加群としての基底を下図右側に示そう。



右の関数を x とすると $x(x - t_1 t_2 t_3)$ は恒等的に 0 である。

ゆえに次数付き $H^*(BT)$ -代数として

$$H_T^*(S^6) \cong H^*(BT)[x]/(x(x - t_1 t_2 t_3))$$

である。通常のコホモロジー環に落とすと

$$H^*(S^6) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2)$$

である。もちろん、この x は 6 次である。これは t_i が 2 次で x が t_i の斉次 3 次式で表されているからである。

注意 2.8. 概複素 GKM 多様体の GKM グラフのラベルには満たすべき条件があるが、本稿では省略する。詳しくは [4, Thm. 1.1.2] などを参照。

2.2 概複素 GKM 多様体の自己同型群の Weyl 群

トーラス T が効果的に作用する概複素 GKM 多様体 M を考える。さて、概複素 GKM 多様体の定義から、

$$T \subset \text{Aut}_c^0(M)$$

である。ここで、作用するトーラスを包含関係で極大なものに取り替えておく。このとき、固定点での接空間のウェイト空間分解を考えると、ウェイトは新しいトーラスパラメータ分だけ変化するが、直和分解という意味では変化しない。

注意 2.9. 以下では作用の記号 $\cdot$ を書かないことも多い。 T の変換を誘導する M の変換 φ と $t \in T$ による M の変換を同時に考える点が少し混乱しやすいように思う。

$\text{Aut}_c^0(M)$ の Weyl 群は T の正規化群 $N(T)$ を用いて、

$$W(\text{Aut}_c^0(M)) = N(T)/T$$

と書ける。 $\varphi \in T$ のとき、 $\varphi: M \rightarrow M$ は各固定点と不変な $\mathbb{C}P^1$ の各々を保つ。ゆえに $\varphi \in T$ は GKM グラフに関する部分を変更しない。

その一方で $\varphi \in N(T)$ のとき、 φ が GKM グラフの変換（詳細は 2.2 を参照）を与えることを見る。 $t \mapsto \varphi t \varphi^{-1}$ は T の変換 $\rho_\varphi: T \xrightarrow{\cong} T$ を定める。このとき、任意の $t \in T$ に対し、

$$\rho_\varphi(t)\varphi(x) = \varphi t \varphi^{-1}\varphi(x) = \varphi(tx) \quad (2.1)$$

であり、 φ は弱 T -同変写像である。つまり、図式で書けば次が可換である。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow t \cdot & & \downarrow \rho_\varphi(t) \cdot \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array} \quad \text{あるいは} \quad \begin{array}{ccc} T \times M & \xrightarrow{\rho_\varphi \times \varphi} & T \times M \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \cdot \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

この図式から φ を固定点集合上の変換に制限できると分かる。さらに φ は不変な $\mathbb{C}P^1$ を不変な $\mathbb{C}P^1$ に写すことも分かり、グラフの準同型を引き起こす。ウェイトがどのように対応するか確認するため、式 (2.1) の固定点 p における微分を考え、ウェイト α の部分空間に制限すると、

$$(\rho_\varphi(t))_* \varphi_*(v) = \varphi_* t_*(v) = \varphi_*(\alpha(t)v) = \alpha(t) \varphi_*(v)$$

t を $(\rho_\varphi)^{-1}(t)$ に取り直せば、 $\varphi_*(v)$ はウェイト $\alpha \circ (\rho_\varphi)^{-1}$ の部分空間のベクトルである。GKM グラフの一部として状況を描いておけば次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} q \\ \bullet \\ \swarrow e \\ \bullet \\ p \\ \text{ラベル } \alpha \end{array} & \xrightarrow{\varphi} & \begin{array}{c} \varphi(q) \\ \bullet \\ \swarrow \varphi(e) \\ \bullet \\ \varphi(p) \\ \text{ラベル } (\rho_\varphi^{-1})^*(\alpha) \end{array} \end{array}$$

より一般的な状況のために言い換えると、 e と $\varphi(e)$ のラベルには次の関係がある。

$$\rho_\varphi^*(\alpha(\varphi(e))) = \alpha(e)$$

2.3 抽象的有向 GKM グラフ

本稿では、通常の GKM 多様体から得られる非有向 GKM グラフおよびその抽象化と区別するために、抽象的有向 GKM グラフという名称を用いる。[2] では天下りの与えていた抽象的有向 GKM グラフの同型写像について、本稿では抽象的有向 GKM グラフの圏を定義することでその基礎を与えよう。

定義 2.10. 抽象的有向 GKM グラフ (Γ, α) とは、対応するトーラス T をもち、辺が双方向に向き付けられたグラフ Γ とラベル付け $\alpha: E(\Gamma) \rightarrow H^2(BT; \mathbb{Z})$ からなる。

以下で現れる複数のトーラスは ' や添字で暗黙のうちに区別していくことにする。

定義 2.11. 抽象的有向 GKM グラフ (Γ, α) の同変コホモロジー環 $H_T^*(\Gamma, \alpha)$ を

$$H_T^*(\Gamma, \alpha) = \{f \in \text{Map}(V(\Gamma), H^*(BT)) \mid f(s(e)) - f(t(e)) \equiv 0 \pmod{\alpha(e)} \text{ for } \forall e \in E(\Gamma)\}$$

で定める。また、 $H^*(BT)$ の元を上の意味で定数関数と思うことで、(同変でない) 通常のコホモロジー環 $H^*(\Gamma, \alpha)$ を

$$H^*(\Gamma, \alpha) = H_T^*(\Gamma, \alpha) / (H^{>0}(BT))$$

で定める。

本稿において、グラフの準同型は辺を 1 点に潰すことを許す。次で抽象的有向 GKM グラフの圏 $\mathbf{GKM}_{\text{grh}}$ を定義する。

定義 2.12. 圏 $\mathbf{GKM}_{\text{grh}}$ を次で定義する。対象は全ての抽象的有向 GKM グラフであり、射 $(\varphi, \psi): (\Gamma, \alpha) \rightarrow (\Gamma', \alpha')$ はグラフ準同型 $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ と次数を保つコホモロジーの準同型 $\psi: H^*(BT'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(BT; \mathbb{Z})$ からなり、 $\varphi(e)$ が辺である任意の辺 $e \in E(\Gamma)$ に対し

$$\psi(\alpha'(\varphi(e))) = \alpha(e) \quad (2.2)$$

を満たすものである。さらに $(\varphi, \psi): (\Gamma_1, \alpha_1) \rightarrow (\Gamma_2, \alpha_2)$, $(\varphi', \psi'): (\Gamma_2, \alpha_2) \rightarrow (\Gamma_3, \alpha_3)$ の合成は

$$(\varphi', \psi') \circ (\varphi, \psi) = (\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$$

となる。

上の合成を図式で書けば次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc}
 E(\Gamma_1) & \xrightarrow{\varphi} & E(\Gamma_2) & \xrightarrow{\varphi'} & E(\Gamma_3) \\
 \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 \\
 H^2(BT_1) & \xleftarrow{\psi} & H^2(BT_2) & \xleftarrow{\psi'} & H^2(BT_3)
 \end{array}$$

注意 2.13. 通常の GKM 多様体を想定した抽象的非有向 GKM グラフの圏を考える際には、条件 (2.2) は

$$\psi(\alpha'(\varphi(e))) \equiv 0 \pmod{\alpha(e)}$$

に変更すると良いだろう。また、この ψ の向きが [2] と異なる所である。同型写像 (φ, ψ) のみを考えるなら、 ψ はコホモロジーの同型写像になるので、逆向きでもほとんど問題無かったが、一般論を展開するなら、必ずこちらの向きにしなければならない。

特にこの向きはコホモロジー関手を考える際に重要である。各々の GKM グラフは異なるトーラス T をもち、同変コホモロジー環を考える際にどのような（次数付き）基礎環 $H^*(BT)$ をもつ代数なのかが異なる。そこで、下ではこの基礎環の情報込みの次数付き代数の圏 $_{\text{gr}}\mathbf{Alg}'$ を考えるが、その説明は割愛する。簡単にするため、代わりに次数付き環の圏 $_{\text{gr}}\mathbf{Rng}$ でも良い。

定義 2.14. $\mathbf{GKM}_{\text{grh}}$ から $_{\text{gr}}\mathbf{Alg}'$ への同変コホモロジー反変関手 H_{eq}^* を次で定める。対象については GKM グラフ (Γ, α) にその同変コホモロジー環 $H_T^*(\Gamma, \alpha)$ を対応させ、射については、 $(\varphi, \psi): (\Gamma, \alpha) \rightarrow (\Gamma', \alpha')$ を

$$(\varphi, \psi)^* = H_{\text{eq}}^*(\varphi, \psi): H_{T'}^*(\Gamma', \alpha') \rightarrow H_T^*(\Gamma, \alpha)$$

で、 $f \in H_{T'}^*(\Gamma', \alpha')$ を $\psi \circ f \circ \varphi \in H_T^*(\Gamma, \alpha)$ に写す準同型に対応させる。 $(_{\text{gr}}\mathbf{Alg}'$ の射としては、基礎環の間の写像 $\psi: H^*(BT') \rightarrow H^*(BT)$ を忘れていない。）

$$\begin{array}{ccc}
 V(\Gamma') & \xleftarrow{\varphi} & V(\Gamma) \\
 f \downarrow & & \downarrow \psi \circ f \circ \varphi \\
 H^*(BT') & \xrightarrow[\psi]{} & H^*(BT)
 \end{array}$$

これが正しく写像を定めているか確認しよう。任意の辺 $e \in E(\Gamma)$ を考え、その始点と終点をそれぞれを p, q とし、 $e' = \varphi(e)$ のそれらは $p' = \varphi(p), q' = \varphi(q)$ としよう。

$f \in H_{T'}^*(\Gamma', \alpha')$ を考えると

$$f(p') - f(q') \equiv 0 \pmod{\alpha'(e')}$$

を満たしている。このとき

$$\psi \circ f \circ \varphi(p) - \psi \circ f \circ \varphi(q) = \psi(f(p') - f(q')) \equiv 0 \pmod{\psi(\alpha'(e'))} (= \alpha(e))$$

であり、確かに $\psi \circ f \circ \varphi \in H_T^*(\Gamma, \alpha)$ である。ちなみに、環に値をとる関数として考えているので、準同型性は自明である。また、ただの写像の合成として射の対応を定めており明らかに函手性を満たしている。

さらに通常のコホモロジー函手 H^* を $\mathbf{GKM}_{\text{grh}}$ から次数付き環の圏 $\text{gr}\mathbf{Rng}$ への変換函手として、 $H^*(\Gamma, \alpha) = H_T^*(\Gamma, \alpha)/(H^{>0}(BT))$ とし、射の対応は $(\varphi, \psi)^*$ が $H^*(\Gamma', \alpha') \rightarrow H^*(\Gamma, \alpha)$ に誘導する写像として定める。

2.4 GKM グラフの自己同型群とその部分群

概複素 GKM 多様体 M の自己同型写像 φ を 1 つ選ぶ。2.2 節での議論を 2.3 節での定義と合わせることで φ は GKM グラフ (Γ_M, α_M) の自己同型 $(\varphi, \rho_\varphi^*)$ を誘導することが定式化された。 φ を 2 つの意味で用いているのは記号の濫用ではあるが、これは GKM グラフを概複素 GKM 多様体の一部で本質的な部分だとみなしているためである。今、 $\varphi \in N(T) \subset \text{Aut}_c^0(M)$ は連結成分の中から取ってきたので、 φ は恒等写像とホモトピックである。ゆえにコホモロジーのホモトピー不変性から $\varphi^*: H^*(M) \rightarrow H^*(M)$ は恒等写像である。

定義 2.15. $\mathbf{GKM}_{\text{grh}}$ の中での (Γ, α) の自己同型群を $\text{Aut}(\Gamma, \alpha)$ と表す。さらに

$$\text{Aut}^*(\Gamma, \alpha) = \{(\varphi, \psi) \in \text{Aut}(\Gamma, \alpha) \mid H^*(\varphi, \psi) = \text{id}_{H^*(\Gamma, \alpha)}\}$$

と部分群を定める。

ここで、 $H^*(M) \cong H^*(\Gamma, \alpha)$ であったので、 $\text{Aut}(\Gamma, \alpha)$ の中で、幾何学的に実現する可能性の無い同型写像を排したものが $\text{Aut}^*(\Gamma, \alpha)$ である。もちろん $(\varphi, \psi) \in \text{Aut}(\Gamma, \alpha)$ であるとき、 φ はグラフ同型写像で、 ψ はコホモロジーの同型写像である。

例 2.16. [2, §3] では (regular semisimple) Hessenberg 多様体と呼ばれる、旗多様体 $\text{Flag}(\mathbb{C}^n)$ の滑らかな subvariety について取り扱っている。その GKM グラフを (Γ_h, α_h) とする。以下では、連結性を仮定する。ほとんどの場合

$$\text{Aut}(\Gamma_h, \alpha_h) \cong \mathfrak{S}_n$$

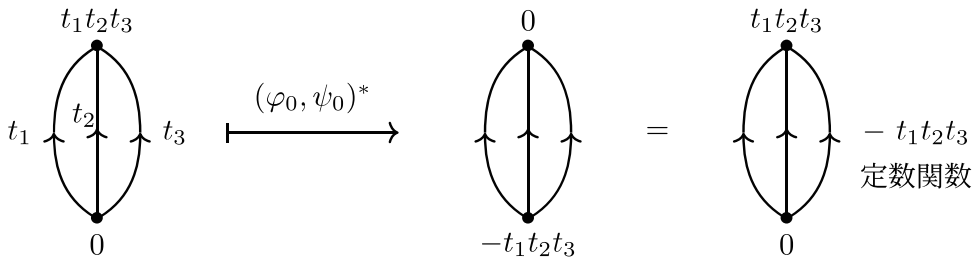
で、例外的な場合には Dynkin 図形の対称性が GKM グラフの自己同型に現れ、 $\text{Aut}(\Gamma_h, \alpha_h) \cong \mathfrak{S}_n \rtimes \{\pm 1\}$ となる。この $\mathfrak{S}_n$ は Hessenberg 多様体のコホモロジーに Tymoczko のドット作用と呼ばれるものとして作用する。Hessenberg 多様体が旗多様体自身でないなら、これは非自明な作用である。また、Dynkin 図形の対称性から来る作用も非自明である。つまり

$$\text{Aut}^*(\Gamma_h, \alpha_h) = \{\text{id}\}$$

である。定理 1.2 から、Hessenberg 多様体の Aut_c^0 は自明群である。

例 2.17. 例 2.7 における S^6 の GKM グラフの自己同型群を考える。グラフ同型 φ として頂点は固定して辺を入れ替えるものを考えると、そのラベル t_1, t_2, t_3 の入れ替えから ψ が自動的に決まる。このような (φ, ψ) を $\mathfrak{S}_3$ の元と同一視する。例 2.7 で述べた $H^*(BT)$ -加群としての基底は、これらの自己同型で不変である。ゆえに $\mathfrak{S}_3 \subset \text{Aut}^*(\Gamma_{S^6}, \alpha_{S^6})$ である。

さらに頂点を入れ替えて辺は (向き以外) 変えないグラフ同型 φ_0 を考える。このとき ψ_0 は各 t_i を (-1) 倍する。次の計算から、 $(\varphi_0, \psi_0) \in \text{Aut}^*(\Gamma_{S^6}, \alpha_{S^6})$ である。



ただのグラフとしての同型写像が上の組合せ (半直積) で得られる 12 種類しかなく、そこから得られる GKM グラフとしての同型写像が全て $\text{Aut}^*(\Gamma_{S^6}, \alpha_{S^6})$ の元である。ゆえに $\text{Aut}^*(\Gamma_{S^6}, \alpha_{S^6}) \cong \mathfrak{S}_3 \rtimes \{\text{id}, (\varphi_0, \psi_0)\}$ である。

さて、 S^6 の自己同型群は例外型 Lie 群 G_2 であることが知られており、上の $\mathfrak{S}_3 \rtimes \{\text{id}, (\varphi_0, \psi_0)\}$ は G_2 の Weyl 群と同型である。これは偶然なのだろうか？

2.5 概複素 GKM 多様体の圏

この節では、(空間ごとに異なる) トーラスが作用するような、概複素 GKM 多様体の圏 $\mathbf{GKM}_{\text{mfd}}$ について考える。この節では特に作用するトーラスを明示する。概複素 GKM 多様体の間の射 $(T \curvearrowright M) \rightarrow (T' \curvearrowright M')$ を次で定める。それは、概複素多様体の間の写像 $\varphi: M \rightarrow M'$ とトーラスの間の写像 $\rho: T \rightarrow T'$ との組 (φ, ρ) で、

$$\begin{array}{ccc} T \times M & \xrightarrow{\rho \times \varphi} & T' \times M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array} \quad (2.3)$$

が可換で、さらに次の条件を満たすものである。 M 内の不変な $\mathbb{C}P^1$ の φ による像が、 M' 内の固定点または不変な $\mathbb{C}P^1$ である。この条件は GKM 理論を展開する際に必要であるが、 ρ が全射なら 2.2 節と同様の議論により自動的に満たされる。この条件を満たすとき概複素多様体の写像として $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ で 2 つの固定点を保つものは、ある角度 φ_0 により $(r \cos \theta : r \sin \theta) \mapsto (r \cos(\theta + \varphi_0) : r \sin(\theta + \varphi_0))$ と書けるものしかない (と思われる)。この事実は概複素 GKM 多様体の間の写像が式 (2.2) を満たすラベルの対応を与えることを意味する。実際に次のようになる。

GKM グラフを作る操作が函手 $\mathbf{GKM}_{\text{mfd}} \rightarrow \mathbf{GKM}_{\text{grh}}$ になっていることを確認する。 $(\varphi, \rho): (T \curvearrowright M) \rightarrow (T' \curvearrowright M')$ について、 ρ から誘導される

$$\rho^*: H^*(BT'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(BT; \mathbb{Z})$$

がある。 M, M' の GKM グラフをそれぞれ $(\Gamma, \alpha), (\Gamma', \alpha')$ とする。このとき、 $\varphi(e)$ が辺であるような $e \in E(\Gamma)$ に対し、 $\mathbb{C}P^1$ のことである辺 $\varphi(e)$ への ρ を通じた T -作用を考えると、次が成立する (2.2 節と同様の議論)。

$$\rho^*(\alpha'(\varphi(e))) = \alpha(e) \quad (\varphi(e) \text{ が辺のとき})$$

図式 (2.3) の可換性により (φ, ρ) から $ET \times_T M \rightarrow ET' \times_{T'} M'$ が誘導される。具体的には ET を T の infinite join として作れば良い。これにより (同変) コホモロジーを取る操作が反変函手になる。この函手は $(T \curvearrowright M)$ に $H_T^*(M)$ を対応させ、 $(\varphi, \rho): (T \curvearrowright M) \rightarrow (T' \curvearrowright M')$ に対しては、上記の写像 $ET \times_T M \rightarrow ET' \times_{T'} M'$ がコホモロジーに誘導する写像 $(\varphi, \rho)^*: H_{T'}^*(M') \rightarrow H_T^*(M)$ を対応させる。

結局、同変コホモロジーを与える関手としての次の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{GKM}_{\text{mfd}} & \xrightarrow{\text{同変コホモロジー}} & {}_{\text{gr}}\mathbf{Alg}' \\
 & \searrow \text{GKM グラフ化} & \nearrow H_{\text{eq}}^* \\
 & \mathbf{GKM}_{\text{grh}} &
 \end{array}$$

注意 2.18. このようなセッティングで考える理由として、GKM 理論的なファイバー束を扱いたいという狙いがある。例えば、旗多様体 $\text{Flag}(\mathbb{C}^n)$ はファイバー束

$$\text{Flag}(\mathbb{C}^{n-1}) \rightarrow \text{Flag}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

を用いて帰納的に得られる。 $\text{Flag}(\mathbb{C}^n)$ には T^n （あるいはそれを対角成分で割った $n-1$ 次元トーラス）の作用を考えるので、 $\text{Flag}(\mathbb{C}^n)$ と $\text{Flag}(\mathbb{C}^{n-1})$ で考えているトーラスが異なり、 $T^{n-1} \hookrightarrow T^n$ という包含写像込みで考える必要がある。また、 $\text{Flag}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ は各ファイバー（部分 GKM グラフ）を 1 点に潰す。

3 主結果と予想

M を連結な概複素 GKM 多様体とする。 $\text{Aut}_{\mathbb{C}}^0(M)$ は $\text{Aut}(M)$ における恒等写像を含む連結成分の極大コンパクト部分群である。トーラス T は概複素 GKM 多様体に効果的に作用し、 $\text{Aut}_{\mathbb{C}}^0(M)$ の中で極大なものとする。

定理 1.2 (再掲). 連結な概複素 GKM 多様体 M に対し、2.2 節で述べた次の群準同型写像は単射である。

$$W(\text{Aut}_{\mathbb{C}}^0(M)) \rightarrow \text{Aut}^*(\Gamma_M, \alpha_M)$$

証明の概略を与えよう。

証明. $W(\text{Aut}_{\mathbb{C}}^0(M)) = N(T)/T$ を思い出そう。 $\varphi \in N(T)$ が $\text{Aut}^*(\Gamma_M, \alpha_M)$ の id に写されると仮定する。このとき、 φ は固定点における辺を動かさない。つまり、 ρ_{φ} はラベルを変化させない。 T が効果的に作用することを仮定しているので、1 つの頂点でのラベルは $H^2(BT; \mathbb{Q})$ を張る。ゆえに φ と T は（微分を考えると）固定点での接空間への作用として可換である。exponential map は局所的に T -同変微分同相を与えるので、局所的に φ と T は可換な作用である。 $\text{Aut}_{\mathbb{C}}^0(M)$ はコンパクト Lie 群である

ことから、 φ と T が可換であるような M の部分集合は部分閉多様体になることが分かり、 M の連結性から M 全体で φ と T は可換である。今、トーラス T は極大にしていたので、 $\varphi \in T$ である。□

例 2.17 での計算から自然と次の予想が浮かぶ。

予想 3.3. 上の対応

$$W(\mathrm{Aut}_c^0(M)) \rightarrow \mathrm{Aut}^*(\Gamma_M, \alpha_M)$$

は同型写像である。

細かい状況をわざと省略しつつ言葉にすると、「 M の自己同型群の Weyl 群は、 M の GKM グラフの自己同型群である」ということになって、非常に美しい対応関係について述べた予想だと思う。

例 2.16 で述べた通り、[2] では regular semisimple Hessenberg 多様体について扱っており、それに効果的に作用するトーラスの次元や Aut^0 自体についても詳しく述べているが、詳細は論文を参照されたい。

参考文献

- [1] S. Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer; 1995th edition.
- [2] D. Jang, S. Kuroki, M. Masuda, T. Sato, H. Zeng, Automorphisms of GKM graphs and regular semisimple Hessenberg varieties, arXiv:2405.16399v2.
- [3] M. Goresky, R. Kottwitz and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), 25–83.
- [4] V. Guillemin and C. Zara, *1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 283–349.
- [5] M. Harada, A. Henriques, and T. Holm, *Computation of generalized equivariant cohomologies of Kac-Moody flag varieties*, Adv. Math. **197** (2005), no 1, 198–221.