

行列型作用素とバートン値マーチンゲール

山形大 工 渡利 千波 chinami Watari

離散時マーチンゲールに対し, Burkholder-Gundy [2] は行列型作用素を定義した. 歴史的には, Fourier 解析における Littlewood-Paley の理論の類似と見られる面もあり, 作用素の補間定理が整備された現在では, その非線型性もあまり大まかな不便にはないと思えることもできるが, ここでは一つの解釈による線型化の試みを通じて, 関連する問題提起を行いたい.

1. 行列型作用素

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に, σ -fields の増大列 $\{\mathcal{F}_n\}$ が与えられ, $\forall \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ が成り立たないとする. マーチンゲール $\{f_n\}$: $f_n \in L^1$, $E[f_n | \mathcal{F}_{n-1}] = f_{n-1}$, $d_n = f_n - f_{n-1}$ に対し

$$Mf = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} d_k \right|^2 \right)^{1/2} \quad \begin{array}{l} a_{j,k} \text{ は } \mathcal{F}_{k-1} \text{ 可測} \\ 0 < C \leq \sum_j a_{j,k}^2 \leq C < \infty \end{array}$$

を対応させる作用素が行列型作用素であるが,

図 1 のように, 適当に時間停止を行えば, Mf を調べることは

は $M_n f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} d_k \right|^2 \right)^{1/2}$ を調べることに帰着される。また、これに関連して、「極大型行列型作用素」といふべき

$$M^* f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_k \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} d_k \right|^2 \right)^{1/2}$$

を考へられ、諸種の評価が得られる。 (本来は M^* は他の対象に使われたいので、 M^{***} と書くべきかもしれない。)
(たとえば [2,3] を参照)

$f \mapsto M_n f, \quad f \mapsto M^* f$ は、いずれも "sub-linear" であるか、線形かはた。

2. Davis の不等式

離散時マールコフ過程に関する注目すべき結果の 1 つは、上記の Davis の不等式 [4] がある。

$$f^* = \sup_n |f_n|, \quad S(f) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |d_j|^2 \right)^{1/2} \quad \text{に対し}$$

$$C \|f^*\|_1 \leq \|S(f)\|_1 \leq C \|f^*\|_1 \quad (1)$$

$$a_{j,k} = 1 \quad (j=1) \quad = 0 \quad (j \geq 2) \quad \text{とすれば } M^* f = f^*$$

である。

$$a_{j,k} = 1 \quad (j=k) \quad = 0 \quad (j \neq k) \quad \text{とすれば } M^* f = S(f)$$

であるから、Davis の不等式は、行列型作用素の間の不等式の一例とたるといふ。一般の行列型作用素の間には、Burkholder - Gundy - Davis の不等式 [3] といふ知られた結果が成立するが、この結果は Izumisawa によつて独立

に証明されたものがある。Davis の不等式 との関連を述べると、2つの Hilbert 型作用素 $M_n f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} d_k \right|^2 \right)^{1/2}$, $N_n f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n b_{jk} a_k \right|^2 \right)^{1/2}$ の間には

$$\|N^* f\|_1 \leq C \sup_n \|M_n f\|_1$$

が成立する、という形になる。

3. ベクトル値マーチンゲール

$M_n f$ を、 ℓ^2 のベクトル $M_n f$ の ℓ^2 -ノルムと見れば、
 というものがある。

$$M_n f = \left(\sum_{k=1}^n a_{1k} d_k, \sum_{k=1}^n a_{2k} d_k, \dots \right)$$

がマーチンゲールであるとは、(現段階では) 各成分ごとに条件付き期待値をとるといふ意味で、 $\|M_n f\|_{\ell^2} \in L^1$ かつ

$$E[M_n f | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} f$$

の成立することを用いる。マーチンゲール(ここではベクトル値)全体を MG 、その階差列を MGD と書くことは許される。この記法を採用すると、

$$M_n f = \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} d_k \right)_j \in MG$$

$$M_n f - M_{n-1} f = (a_{jn} d_n)_j \in MGD$$

となる。実数値マーチンゲールについては、類似の(新しい字を用いる)記法は、すでにある程度標準的であると思われる。

さて、この立場に立つと Davis の不等式 (1) を見直すと、記号的に

$$E[|MG|_{\ell^\infty}] \sim E[|MGD|_{\ell^2}] \quad (1')$$

と読むことが出来るが、絶対値がかわりに1ベクトルに直アール（ $\gamma - \gamma - \gamma - \gamma$ ） ℓ^2 , ℓ^4 をとり、2次元の結果が成立する。

具体的には

$$E[|MG|_{\ell^\infty}] \sim E[|MGD|_{\ell^2}] \quad (2)$$

である。実際

$$M_n f = \left(\sum_{k=1}^n a_{j,k} d_k \right)_j$$

$$M_n d = M_n f - M_{n-1} f = (a_{j,n} d_n)_j$$

に対して、

$$|Mf|_{\ell^\infty} = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} d_k \right|$$

$$||Mf|_{\ell^\infty}|_{\ell^2} = M^* f$$

$$||M_n d|_{\ell^2}|_{\ell^2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{j,n} d_n|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n}^2 \right)^{1/2}$$

$$\sim \text{const.} \cdot S(f)$$

であるから、(2) は Burkholder - Gundy - Davis (- Izu-misawa) の不等式から出る。

このように考えたのは、("Real method" が整備される前には) Fourier 級数論に関連して登場した。Marcinkiewicz の補間定理がベクトル空間数に対して通用できるようになった現在の目では、Boas - Bochner [1] あたりを見直してみることが、無駄にはないと思われる。よって $\gamma - \gamma - \gamma - \gamma$

寄与には, Walsh Fourier 級数に関する Paley [5] がある。

実は, 多時間系に対する条件付き期待値も, どのようにならば, 本稿のベクトル値マーチンゲールの名に値するものが得られるのか, 問題である。ここに概したように, 1) のスカラーマーチンゲールからの変換で得られるものは, 諸種の分解定理も利用できるとし, 好都合な部分だけをつまみ喰いしに留め, する。

引用文献

- [1] Boas, R. P. --- Bochner, S.
On a theorem of M. Riesz for Fourier series,
Journal of the London Math. Soc., 14(1939), 62 -- 73.
- [2] Burkholder, D. L. --- Gundy, R.F.
Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on
martingales, Acta Math. 124(1970), 250 -- 304.
- [3] Burkholder, D. L. --- Gundy, R.F. --- Davis, B.
Integral inequalities for convex functions of operators on martingales,
Proc. Sixth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability,
Univ. of Calif. Press, 2(1972), 223 -- 240.
- [4] Davis, B.
On the integrability of martingale square function,
Israel Journal of Math., 8(1970), 187 -- 190.
- [5] Paley, R. E. A. C.
A remarkable system of orthogonal functions,
Proc. London Math. Soc., (II) 34(1932), 241 -- 279.