

長距離力を持つ n - ベクトル模型の臨界指数

—— 次元, 対称性 (自由度), ポテンシャル・レンジと臨界指数 ——

東大物性研 鈴木 増 雄

一般に, 臨界指数は, 次元 d , 対称性 (または自由度 n), ポテンシャル・レンジ σ に依存する。最近, くりこみ群の方法を併用して臨界指数を展開し, d と n の依存性が主に調べられている。¹⁻⁵⁾

ここでは, 臨界指数が3つのパラメタ d , n , σ にどう依存するかを, $\frac{1}{n}$ -展開⁶⁾と ϵ -展開^{1,5)}を用いて研究した結果を報告する。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j); \quad J_{ij} = J_0 r_{ij}^{-(d+s)} / \sum_j r_{ij}^{-(d+s)}, \quad (1)$$

で与えられる。^{7,8)} 但し, $\mathbf{S}_j$ は n 個の連続な値をとる $\{\sigma_{jk}\}$ を成分とするベクトルである:⁷⁾

$$\mathbf{S}_j = (\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \dots, \sigma_{jn}); \quad \sum_{k=1}^n \sigma_{jk}^2 = n \quad (2)$$

$n \rightarrow \infty$ の極限は, 長距離力を持つ spherical model⁷⁾ になる。

さて, 帯磁率 χ が次の異常性を示すとする:

$$\chi = (T - T_c(\lambda))^{-r(\lambda)}; \quad \lambda = \frac{1}{n}. \quad (3)$$

その λ に関する微分は, 次のようになる:⁹⁾

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} \simeq T_c'(0) r(0) (T - T_c(0))^{-r(0)-1} - (T - T_c(0))^{-r(0)} \\ &\quad \times r'(0) \ln(T - T_c(0)) \\ &\simeq T_c'(0) r(0) x_0 / (T - T_c(0)) - r'(0) x_0 \ln(T - T_c(0)). \end{aligned} \quad (4)$$

従って, χ_1 の中の $x_0 \ln(T - T_c(0))$ の項を調べることにより, $r'(0)$ がわかり,^{9,10)}

$$r(\lambda) = r(0) + \frac{1}{n} r_1 + \dots \quad (5)$$

と展開形式で臨界指数が求まることになる。今の問題では、Abe⁶⁾によると、 χ_1 は次式で表わされる。

$$\chi_1 = -\frac{\mu_B^2}{kT} \times \frac{2N(\xi)}{(2\pi)^d} \int \frac{\mu(q)}{\nu(q)} d^d q, \quad (6)$$

但し、 $\mu(q) = G(q) \nu(0) - n(q)$, $N(\xi) = G^2(0) / \nu(0)$,

$$\nu(q) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int G(k) G(q-k) d^d k,$$

$$\begin{aligned} n(q) &= -(2K)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \nu(q) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int G^2(k) G(q-k) d^d k. \end{aligned} \quad (7)$$

短距離力 ($s \rightarrow \infty$) の場合⁶⁾と違って、一般の s の我々の問題では、propagator $G(k)$ は、小さな k に対して

$$G(k) = \frac{K^{-1}}{\xi + ak^\sigma}; \quad K = \frac{J_0}{kT}, \quad (8)$$

となる。⁸⁾但し、 σ は、 σ を用いて次のように定義された “effective potential-range” である。

$$\sigma = s \text{ for } 0 < s < 2 \text{ and } \sigma = 2 \text{ for } s > 2. \quad (9)$$

さらに、 ξ は、次のような漸近形⁸⁾を持つ温度変数である：

$$\begin{aligned} \xi &\sim (K_c - K)^{\sigma/(d-\sigma)} & \text{for } \frac{d}{2} < \sigma < d, \\ &\sim (K_c - K) & \text{for } 0 < \sigma < \frac{1}{2}d, \end{aligned} \quad (10)$$

Wilson⁵⁾に従って、1より大きい任意の実数 d に対して、次の公式により、連続次元 d を導入する：

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-d} \int d^d k f(k^\sigma) &= K_d \int_0^\infty k^{d-1} f(k^\sigma) dk \\ (2\pi)^{-d} \int d^d k f(k^2, k \cdot q) &= (2\pi)^{-1} K_{d-1} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta k^{d-1} (\sin \theta)^{d-2} \\ &\quad \times f(k^2, kq \cos \theta), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{但し, } K_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-d/2} [\Gamma(d/2)]^{-1}. \quad (12)$$

このようにして、 χ_1 の中の対数異常性を示す項を探すことにより、次の結果が得られる。(但し、 $\lambda=0$ のときの帯磁率 χ_0 は $\chi_0 = \mu_B^2 / (J_0 \xi)$ で与えられる。)

(i) classical region : $0 < \sigma < \frac{1}{2}d$. この領域では、 $r'(0)=0$ となり、少なくとも、 $\frac{1}{n}$ の次数までは、臨界指数 r は $r=1$ となり、分子場理論の値をとる。くりこみ群の方法を用いると、もっと一般に、任意の n に対して、この領域が classical であることが示される。即ち、 $\sigma_c = \frac{1}{2}d$ という臨界値が存在する。ただ、ここで注意すべきことは、 χ_1 の計算から、 χ には、 $\frac{1}{3}d < \sigma < \frac{1}{2}d$ では、次のような “confluent singularity” が存在することが示されることである：

$$\chi \simeq b_1 \xi^{-1} + b_2 \xi^{-(3-d/\sigma)} + O(1), \quad (13)$$

即ち、 σ が $\sigma_c = \frac{1}{2}d$ に近いときには、(13) の第 2 項は、第 1 項の異常性よりも弱いけれども、非常に近い発散を示す。このために、Nagle-Bonner¹¹⁾ の 1 次元の数値計算では、 $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{1}{2}$ のところでも、 $r > 1$ の値が見かけ上、得られたのであろう。

(ii) Non-classical region : $\frac{1}{2}d < \sigma$. この領域で、 $\xi/q^\sigma \ll 1$ に対して、 $\mu(q)$, $\nu(q)$ の漸近形を求め、 $\mu(q)/\nu(q)$ を調べると、

$$\frac{\mu(q)}{\nu(q)} = -\frac{C}{A} \frac{1}{q^\sigma} - \frac{AD-BC}{A^2} \frac{\xi^{d/\sigma-1}}{q^d} - \frac{E'}{A} \frac{\xi^{(d-2\sigma+2)/\sigma}}{q^{d-\sigma+2}} + ((\text{higher})), \quad (14)$$

となる。但し、

$$\begin{aligned} A &= K^{-2} a^{-2} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{A}, \quad B = K^{-2} a^{-d/\sigma-1} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{B}, \\ C &= K^{-3} a^{-3} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{C}, \quad D = K^{-3} a^{-2-d/\sigma} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{D}, \\ E' &= K^{-3} a^{-(d+\sigma+2)/\sigma} 2^{-d} \pi^{-d/2} \hat{E}'. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{A} = \left[\Gamma\left(\frac{d-\sigma}{2}\right) \right]^2 \Gamma\left(\sigma - \frac{1}{2}d\right) / \left\{ \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\sigma\right) \right]^2 \Gamma(d-\sigma) \right\}, \quad (16)$$

$$\hat{B} = -4 \Gamma(2-d/\sigma) \Gamma(d/\sigma-1) / \left\{ \sigma \Gamma\left(\frac{1}{2}d\right) \right\}, \quad (17)$$

$$\hat{C} = \Gamma\left(\frac{d-\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\sigma-d}{2}\right) / \left\{ \Gamma(\sigma) \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) \Gamma\left(d-\frac{3\sigma}{2}\right) \right\},$$

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \hat{B},$$

$$\hat{E}' = -\frac{(\sigma-d+2)(d-\sigma+2)}{d\sigma} \times \Gamma\left(3-\frac{d+2}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{d+2}{\sigma}-2\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}d\right). \quad (18)$$

鈴木増雄

こうして、次の2通りの場合が存在する。

Case a) : $D < \sigma < 2$. このときは、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{\mu(q)}{\nu(q)} d^d q \right)_{\log} &= \left(K_d \int_{\xi^{-1/\sigma}}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\nu(q)} q^{d-1} dq \right)_{\log} \\ &= \frac{AD-BC}{A^2} \frac{K_d}{\sigma} \xi^{d/\sigma-1} \ell n \xi. \end{aligned} \quad (19)$$

従って、 x_1 の対数発散の項は次式で与えられる：

$$(x_1)_{\log} = - \frac{2 (\hat{\hat{AD}} - \hat{\hat{BC}})}{\hat{A}^2} \frac{x_0 \ell n \xi}{B(2-d/\sigma, d/\sigma)} ;$$

$$B(x, y) = \Gamma(x) \Gamma(y) / \Gamma(x+y). \quad (20)$$

そこで、 $\ell n \xi \simeq \{ \sigma / (d-\sigma) \} \ell n (K_c - K)$ に注意すると、臨界指数 r は次のように求まる：

$$\begin{aligned} r &= \sigma / (d-\sigma) + (1/n) r_1 + O(1/n^2), \\ r_1 &= \{ 2 \sigma / (d-\sigma) \} \cdot \{ (\hat{\hat{AD}} - \hat{\hat{BC}}) / \hat{A}^2 \} / B(2-d/\sigma, d/\sigma). \end{aligned} \quad (21)$$

これは、一般に、 $\frac{d}{\sigma}$ だけの関数にはならず、今までの予想⁸⁾は正しくないことがわかる。

Case b) : $\sigma = 2$. このときには、(14) の第3項が第2項と同じ異常性を示すようになり、 r_1 は、次式で与えられる：

$$r_1 = 4 (d-2)^{-1} B^{-1}(2-d/2, d/2) [\{ \hat{A}(\hat{D} + \hat{E}) - \hat{BC} \} / \hat{A}^2]_{\sigma=2}. \quad (22)$$

これは、Abe⁶⁾ や Ma⁶⁾ によって得られた結果と一致する。

a) と b) の結果から、 r は $\sigma = 2$ のところで σ に関して飛びが存在することになる。

その飛び Δr_1 は、次のようになる：

$$\begin{aligned} \Delta r_1 &\equiv r_1(\sigma=2) - \lim_{\sigma \rightarrow 2-0} r_1(\sigma) = 2(d-4)(d-2)^{-2} \\ &\quad \times [B(2-d/2, d/2) B(d/2-1, d/2)]^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

また、臨界指数は、パラメタ a 即ち、格子の微細構造には依存しないことがわかる。さらに、 $s > 2$ では、potential-range s にも依らず、 $s \rightarrow \infty$ のときの値をとる。この意味で、 $s > 2$ の相互作用を short-range potential と呼ぶことができる。

次に、Wilson にならって、 ϵ -展開を行う。我々の問題は

$$\epsilon = d_c - d = 2(\sigma - \sigma_c) = 2\sigma - d, \quad (24)$$

と定義される。 ϵ の一次までの結果は、次式で与えられる： $(\sigma > \frac{1}{2}d)$

$$2\nu = r = 1 + \frac{n+2}{n+8} \left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) + O(\epsilon^2), \quad \eta = 2 - \sigma + O(\epsilon^2),$$

$$\varphi = 1 + \frac{n}{n+8} \left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) + O(\epsilon^2), \quad (25)$$

これをさらに $\frac{1}{n}$ -展開すると、 $\frac{1}{n}$ -展開の結果で ϵ -展開した式と $\frac{\epsilon}{n}$ の次数までは完全に一致する。また (25) で、 $\sigma \rightarrow 2 - 0$ とすると、明らかに Wilson⁵⁾ の結果と一致する。但し、 $\Delta r_1 \propto O(\epsilon^2)$ であることに注意せよ。

参 考 文 献 :

- 1) K. G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Letters 28, 240 (1972)
- 2) K. G. Wilson, Phys. Rev. Letters 28, 548 (1972).
- 3) M. E. Fisher and P. Pfeuty, Phys. Rev. (in press).
- 4) F. Wegner, Phys. Rev. (in press).
- 5) K. G. Wilson, Phys. Rev. B4, 3174, 3184 (1971).
- 6) R. Abe, Prog. Theor. Phys. (in press). (この研究会報告参照)
- S. Ma は n -成分ボーズ系で、Abe と本質的に同じ結果を得た。
- 7) H. E. Stanley, Phys. Rev. 176, 718 (1968).
- 8) G. S. Joyce, Phys. Rev. 146, 349 (1966).
- 9) M. Suzuki, Phys. Rev. Letters 28, 508 (1972).
- 10) L. Kadanoff and F. Wegner, Phys. Rev. B4, 3989 (1971).
- 11) J. F. Nagle and J. C. Bonner, J. of Physics C, 3, 352 (1970).