

高階の広中部分群スキームと特異点解消

東北大理 小田 忠雄

序

正標数代数多様体の特異点解消問題に関する最近の状況を，簡単のため超曲面の場合に限定して，報告する．詳細は $[O_3], [O_4]$ を参照して頂きたい．

ネーター正則局所環 $\mathcal{O}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ ，剰余体を $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ とし， k の標指数を p とする．このとき $gr_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}) := \bigoplus_{v \geq 0} \mathfrak{m}^v / \mathfrak{m}^{v+1}$ は k 上の多項式環となる．正則スキーム $Z := \text{Spec}(\mathcal{O})$ 内の点 $\mathfrak{m}$ を通る超曲面 $X := \text{Spec}(\mathcal{O}/g\mathcal{O})$ を考える．このとき， X の $\mathfrak{m}$ における特異点の状況を測る二つの不変量 μ ， ν を次のように定義する．

まず ν の不変量は

$$\nu := \text{mult}_{\mathfrak{m}}(X) = \text{ord}_{\mathfrak{m}}(g)$$

すなわち， X の $\mathfrak{m}$ における重複度であり，これは定義方程式 g の $\mathcal{O}$ における $\mathfrak{m}$ 進位数と一

致する。このとき g の m 進 initial form を $f \in \text{gr}_m^M(\mathcal{O})$ と書くことにしよう。

$\mathcal{O} =$ の不変量は次の通りである。多項式環 $\text{gr}_m(\mathcal{O})$ 内の f を含む斉次部分環のうち、加法形式で生成されるもので最小のものを考え、 f の k 上の超越次数を

$$\tau = \tau_m(X; \Sigma)$$

とする。ただし一般に k 上の多項式環 $k[x_0, \dots, x_n]$ 内の 加法形式 とは

$$a_0 x_0^{pe} + a_1 x_1^{pe} + \dots + a_n x_n^{pe} \quad (e \geq 0, a_0, \dots, a_n \in k)$$

の形をしたものである。

さて、次のことを既知である。

安定性定理 $\pi: X' \rightarrow X$ を X に対し permissible な blowing-up (後述) とし、 X' を π による X の strict transform とする。 $m' \in X' \cap \pi^{-1}(m)$ を任意に選ぶ、 X' の m' における不変量を μ', τ' とする。

(i) (広中 [H₂]) 常に $\mu \geq \mu'$ が成立する。もし等号 $\mu = \mu'$ が成立 (m' is infinitely near to m と [G] は称する) するならば後述の $\star$ が成り立つ。

(ii) (Giraud [G]) もし $\mu = \mu'$ なし $c \leq c'$ が成立する. もし $\mu = \mu'$ かつ $c = c'$ が成立 (m' is infinitely very near to [G] は称する) する なし 後述の $\star\star$ が成立する.

注 1982年10月の日仏シンポジウム後になって, Giraud が既に1975年に (ii) を証明済みであることが判明した.

1. 多項式環の線形代数と高階の広中部分群スキーム. 上記の定理に於ける $\star$, $\star\star$ および最近の結果は, 多項式環に関する線形代数により記述出来るので, まずそのための一般論を述べる.

$S = k[x_0, \dots, x_n]$ を標指数 p の体 k 上の多項式環とし, 通常という次数付き環 $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ と考える. S の斉次素イデアル $\mathfrak{g} \neq S_+$ ($= \bigoplus_{i \geq 1} S_i$) をとり, 局所化 $R = S_{\mathfrak{g}}$, 極大イデアル $M = \mathfrak{g} S_{\mathfrak{g}}$ および剰余体 $K = R/M$ を考える.

(1.1) (広中 [H₁]) R 内で考えて

$$\bigoplus_{v \geq 0} S_v \cap M^v$$

は S の斉次大部分環であり, しかも加法形式で生成される. 言「換之れは」, ハストル群スキーム $\text{Spec}(S)$ 内に斉次部分群スキーム $B(g)$ が存在して, S の $B(g)$ -不変式全体のなる部分環を $S^{B(g)}$ としたとき

$$\bigoplus_{v \geq 0} S_v \cap M^v = S^{B(g)}$$

が成立する. ここで斉次部分群スキームとは, スカラー倍の作用で閉じているもの, つまり斉次の (加法形式で生成される) イデアルで定義された部分群スキームである.

(1.2) 各 $v \geq 0$ に対し $S_v \cap M^{1+v} = \{0\}$ が成立する. 従って $f \in S_v \cap M^v$ に対し f の M^{1+v} を法とする剰余類 $\rho(f)$ と対応させることにより得る
変換準同型

$$\rho: S^{B(g)} \hookrightarrow \text{gr}_M(R)$$

は次数を保存する 1 対 1 の環準同型である.
証明には [O₁] にある Jacobi 判定法

$$M^v = \{f \in R \mid \text{Diff}_{v-1}(R)f \subset M\}$$

$$S \cap M^v = \{f \in S \mid \text{Diff}_{v-1}(S)f \subset \mathfrak{p}\}$$

を用いる. ここに $\text{Diff}_{v-1}(R)$ および $\text{Diff}_{v-1}(S)$ は R および S から自分自身への素体上の微分作用素で階数が $v-1$ 以下のもの全体である. 階数が $v-1$ 以下の長上の微分作用素全体 $\text{Diff}_{v-1}(S/k)$ が $\text{Diff}_{v-1}(S)$ に自然に含まれることを考えれば, 本項最初の主張は明らかである.

(1.3) 各 $e \geq 0$ に対し S_{pe} 内の加法形式全体のなす長部分空間を

$$L_e = \{a_0 x_0^{pe} + a_1 x_1^{pe} + \cdots + a_n x_n^{pe} \mid a_0, \dots, a_n \in k\}$$

とする. 従って $S_1 = L_0$ である.

$$L := \bigoplus_{e \geq 0} L_e$$

は次数付き左 $k[F]$ -加群となる. また L は p 中乗 Frobenius 写像である. また

$$L_e = k F^e(L_0) = k \otimes_{F^e(k)} F^e(L_0)$$

が成立する. (1.2) の変換準同型を L_e に制限すれば, 長線形写像

$$\rho: L_e \cap M^{pe} = L_e^{B(f)} \hookrightarrow gr_M^{pe}(R)$$

を得る.

k 上の多項式環 $gr_M(R)$ 内の次数 pe の加法形

式'全体は $KF^e(\text{gr}_M^1(R))$ であるが, ρ により
 その中に移る $L_e \cap M^{pe}$ の元全体は明らかに
 $L_e \cap (RF^e(M) + M^{1+pe})$ である. 従って線形写像

$$\rho: L_e \cap (RF^e(M) + M^{1+pe}) \hookrightarrow KF^e(\text{gr}_M^1(R))$$

を得る.

(1.4) (高階の広中部分群スキーム) 整数 $r \geq 0$
 に対し

$$\bigoplus_{e \geq 0} L_e \cap (RF^e(M) + M^{rpe})$$

および

$$\bigoplus_{e \geq 0} L_e \cap (RF^e(M) + M^{1+rpe})$$

は明らかに L の $[F]$ 部分加群である. 従って
 $\text{Spec}(S)$ の斉次部分群スキーム $B(g, r)$ および
 $B(g, r+0)$ が存在して, 上記はそれぞれ不変加
 法形式'の全体 $L^{B(g, r)}$ および $L^{B(g, r+0)}$ と一致する.

この定義により次のことが成り立つ.

(i) $B(g, r) \subset B(g, r+0)$ であり, それぞれ r
 に同じ単語に増大して

$$B(g, \infty) := \bigcup_{r \geq 0} B(g, r) = \bigcup_{r \geq 0} B(g, r+0)$$

$$= B(g, r) \quad r \gg 0$$

が成立する.

(ii) $B(g, 0) = \{0\}$ である。また $L^{B(g, 0+0)} = g \cap L$ 従って $B(g, 0+0)$ は点 $g \in \text{Spec}(S)$ を通る最小の斉次部分群スキームである。

(iii) $B(g, 1) = B(g)$ すなわち元束の広中部分群スキームである。また (1.3) により $K[F]$ -加群の変換準同型

$$\rho: L^{B(g, 1+0)} \hookrightarrow \bigoplus_{e \geq 0} K F^e(\text{gr}_M^1(R))$$

を得る。右辺は K 上の多項式環 $\text{gr}_M^1(R)$ 内の加法形式全体のなす左 $K[F]$ 加群である。

(iv) 各 $e \geq 0$ に対して

$$L_e^{B(g, \infty)} = L_e \cap R F^e(M) = K F^e(g \cap L_0)$$

が成立し、結局 $B(g, \infty)$ は点 $g \in \text{Spec}(S)$ を通る最小のベクトル部分群スキーム（一次式の生成するイデアルで定義されるもの）である。

(1.5) (Jacobi 判定法) 前項 (1.4) において導入した高階の広中部分群スキームは、後述するように安定性定理の☆, ☆☆ を述べるためおよびその後の発展のために不可欠な概念である。(1.4) における定義は一見不自然であるが、 $[O_2], [O_3]$ における普遍族等の結果か

を考えると極めて自然なのである。ここでは高階の広中部分群スキームを完全に内部での線形代数で記述する Jacobi 判定法を述べるに与める。

k の元の p^e 中乗全体のなす部分体を $F^e(k)$ とし、 k から自分自身への $F^e(k)$ 上の微分作用素全体のなす k ベクトル空間を $\text{Diff}(k/F^e(k))$ とし、 $L_e = k \otimes_{F^e(k)} F^e(L_0)$ には第一因子 k を通して作用するものと考える。また各 $\nu \geq 0$ に対し、 $\text{Diff}_\nu(k/F^e(k))$ を階数 $\leq \nu$ 以下の微分作用素全体とする。このとき各 $r \geq 0$ に対し ($r = \infty$ も許す)

$$L_e^{B(g, r)} = \{ h \in L_e \mid \text{Diff}_{r p^e - 1}(k/F^e(k)) h \subset g \cap L_e \}$$

$$L_e^{B(g, r+0)} = \{ h \in L_e \mid \text{Diff}_{r p^e}(k/F^e(k)) h \subset g \cap L_e \}$$

が成立する。証明は [O₃, Section 4] を参照して頂きたい。

2. 安定性定理 前節の記法を使用すれば、
序における $\star$, $\star\star$ および $\star$ の後に調べるべ
きことは次の通りである。

(2.1) $\Pi: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ が X に 関し permissible な部
分スキーム $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}/\mathcal{O}_Y)$ に沿った blowing-up
であるとは、 Y が正則 (すなわち $\mathcal{O}/\mathcal{O}_Y$ が正則局
所環) であり、 $X \supset Y \ni m$ であり、しかも X が Y
に沿って法平坦なことを意味する。今考えている
如く $X = \text{Spec}(\mathcal{O}/g\mathcal{O})$ と超曲面である場合には、
法平坦性は、 g の $\mathcal{O}_Y$ 進位数 $\text{ord}_{\mathcal{O}_Y}(g)$ が m 進位数
 $\mu = \text{ord}_m(g)$ と一致することを意味する。

Y の m における接平面 $T_{Y,m} = \text{Spec}(gr_{m/\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}/\mathcal{O}_Y))$
は自然に Σ の m における接平面 $T_{\Sigma,m} = \text{Spec}(gr_m(\mathcal{O}))$
の部分ベクトル群スキームである。このとき
法平坦性は、 g の m 進 initial form f が $T_{Y,m}$ 不変
であることを意味する。つまり f は
 $T_{Y,m}$ 不変式全体のなる $\mathcal{O}_Y$ 上の多項式環

$$S := gr_m(\mathcal{O})^{T_{Y,m}}$$

内の次数 μ の齊次多項式である。

(2.2) 上記の S は一方で次のような意味を持つ。 良く知られておりように $\text{Rees}(\mathcal{O}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}^n$ とすれば $Z' = \text{Proj}(\text{Rees}(\mathcal{O}))$ であり, $\Pi^{-1}(m) = \text{Proj}(S)$, $S = k \otimes_{\mathcal{O}/\mathcal{O}_0} \text{gr}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) = k \otimes_{\mathcal{O}} \text{Rees}(\mathcal{O})$ である。従って, $m' \in \Pi^{-1}(m)$ に対し $\text{Rees}(\mathcal{O})$ の斉次素イデアルが決まり, それの S における像として S の斉次素イデアル $\mathfrak{g} \neq S_+$ を得る。

(2.3) $\mathcal{O}' := \mathcal{O}_{Z', m'}$ とすれば X の Π による strict transform X' は点 m' において $\text{Spec}(\mathcal{O}'/\mathfrak{g}'(\mathcal{O}'))$ と一致する。 したがって, $\mathcal{O}$ の正則パラメータ $\mu = (u_0, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r)$, $\mathcal{O}_0 = (u_0, \dots, u_n)$, $\mathcal{O}_0 \mathcal{O}' = u_0 \mathcal{O}'$ となるように選んて $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/u_0 \mu$ とする。 $\mathfrak{g}'$ の m' 進位数は μ' であり, $\mu \geq \mu'$ が殆んど明らかになる。

(2.4) $\mu = \mu'$ が成立する場合, 本一節における記法で

$$f \in S_\mu \cap M^\mu = S_\mu^{B(f)}$$

となることも比較的容易に判る。 したがって $\mathfrak{g}$ の m 進 initial form f は法平坦性により S に属する。 更に $\mathfrak{g}$ に関する広中部分群スキーム

$B(f) \subset \text{Spec}(S)$ により不変である。

さて, $f \in \mathcal{O}$ を含む $\text{gr}_m(\mathcal{O})$ の斉次部分環であってしかも加法形式で生成されるものの内で最小のものに $\tilde{S}$ としよう。(2.1) の法平坦性により $\tilde{S} \subset S$ である。従って $\text{Spec}(S)$ の斉次部分群スキーム A が存在して $\tilde{S} = S^A$ となる。 A は $f \in S$ を不変とする $\text{Spec}(S)$ の斉次部分群スキーム中最大のものであると言ってもよい。このとき $\tau = \tau_m(X; \mathbb{Z})$ は S^A の上の超越次数である。 $\mu = \mu'$ ならば $f \in S^{B(f)}$ であることは上述した。 A の最大性から

$$\star \quad S^A \subset S^{B(f)} \quad \text{すなわち} \quad A \supset B(f)$$

が成立する。

(2.5) $S' := \text{gr}_{m'}(\mathcal{O}')$ とすれば g' の m' 進 initial form f' は S' の μ' 次の斉次元である。上の準同型 $S' \twoheadrightarrow S'' := \text{gr}_{m'/m\mathcal{O}'}(\mathcal{O}'/m\mathcal{O}')$ による f' の像を f'' とする。 S', S'' は $k' = \mathcal{O}'/m'$ 上の多項式環である。(2.3) にあてはまる $u_0, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r$ の m' 進 initial forms を $x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r$ とすれば $S = k[x_0, \dots, x_n]$, $\text{gr}_m(\mathcal{O}) = k[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r]$ である。

一方 $m\mathcal{Q}'$ の生成元 $u_0, v_1, \dots, v_r$ の m' 進 initial forms を $w_0, w_1, \dots, w_r$ とすれば, 一次式 $z'_1, \dots, z'_r \in S'$ を適当に選び多項式環 $S' = k'[w_0, \dots, w_r, z'_1, \dots, z'_r]$ を得る. z'_i の S'' への像を z_i とすれば

$S'' = k'[z_0, \dots, z_r]$ であり, $S' \twoheadrightarrow S''$ は一次式の生成するイデアル $(w_0, \dots, w_r)$ を法とする剰余環である.

また, (2.4) におけると同様に k' 上のベクトル群スキーム $\text{Spec}(S')$ 内の斉次部分群スキーム A' があり k' 部分ベクトル群スキーム $\text{Spec}(S'')$ 内の斉次部分群スキーム A'' を, 与えられた f' があり f'' を不変とするものの内で最大のものとする. 従って $\tau' = \tau_{m'}(X'; Z')$ は $S'A'$ の k' 上の超越次数である. また $S' \twoheadrightarrow S''$ は明らかに k' 上の環準同型 $S'A' \rightarrow S''A''$ をひきおこす.

一方, (2.2) より $\pi^{-1}(m) = \text{Proj}(S)$ であるから, $\mathcal{Q}'/m\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}_{\pi^{-1}(m), m'}$ は局所化 $R = S_{\mathfrak{p}}$ 内の次数 0 の斉次元全体と一致する. また

$$\text{gr}_m(R) = k'(x_0) \otimes_{k'} S''$$

となることも明らかである.

(2.6) さて, $\mu = \mu'$ が成立するときは, (2.4) により $f \in SA \subset S^{B(8)}$ であり, (1.2) における変換率同型 P を用い

$$f \in SA \subset S^{B(8)} \xrightarrow{P} gr_n(R)$$

による像 $P(f)$ を考えることが出来る. このとき $P(f) = \pi_0^A \cdot f''$ となることも明らかである.

先に述べた Giraud の安定性定理は

$\tau = \text{tr. deg}_k(S^A) \leq \text{tr. deg}_{k'}(S''A'') \leq \text{tr. deg}_{k'}(S'A') = \tau'$ である. 右の不等式は (2.5) より明らかであるが. 左の不等式を示すには少し考察が必要である.

(2.7) $\mu = \mu'$ から $\tau = \tau'$ なる (2.6) の二つの不等式において共に等式が成立する. Giraud によりこのとき

(i) $S'A' \rightarrow S''A''$ は同型写像

(ii) $SA \subset S^{B(8)} \xrightarrow{P} gr_n(R)$ により L^A の元はすべて $gr_n(R)$ 内の加法形式に移る.
つまり (1.4), (ii') により $SA \subset S^{B(8, 1+0)}$
となつた $A \supset B(8, 1+0)$ となる.

以上要約すれば次の通りである。

- ① permissible blowing-up に対し $\mu \geq \mu'$ が成立。
- ② $\mu = \mu'$ ならば $c \leq c'$ かつ $A \supset B(g, 1)$ が成立。
- ③ $\mu = \mu'$ かつ $c = c'$ ならば $A \supset B(g, 1+0)$ が成立。
このとき, (1.4), (iii) により k 上の多項式環 S と K 上の多項式環 $g_m(R)$ における加法形式全体の間に $k[F]$ -加群の同型

$$L^A \subset L^{B(g, 1+0)} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{e \geq 0} K F^e(g_m'(R))$$

が存在する。(以上は完全に S , K の斉次素イデアル $g \neq S_+$ および μ 次 の斉次元 f のみに関する結果である。) 更に $S'A' \rightarrow S''A''$ は同型である。

標数 0 と類似の状況 (すなわちほぼ定理 4-4 が適用出来る状況) は $A \supset B(g, \infty)$ すなわち

$$L^A \subset L^{B(g, \infty)} = \bigoplus_{e \geq 0} K F^e(g \cap L_0)$$

の場合である。(cf. (1.4), (iv)). 上記 4 のギョッポについては序章は現在進行中である。

参考文献

- [G] J. Giraud, Contact maximal en caractéristique positive, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 8(1975), 201-234.
- [H₁] H. Hironaka, Additive groups associated with points of a projective space, Ann. of Math. 92(1970), 327-334.
- [H₂] H. Hironaka, Certain numerical characters of singularities, J. Math. Kyoto Univ. 10(1970), 151-187.
- [O₁] T. Oda, Hironaka's additive group scheme, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of Y. Akizuki (Y. Kusunoki et al., eds.), Kinokuniya, Tokyo, 1973, 181-219.
- [O₂] T. Oda, A versal family of Hironaka's additive group schemes, Proc. Japan Acad. 58(A) (1982), 126-128.
- [O₃] T. Oda, Hironaka's additive group scheme, II, to be submitted to Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.
- [O₄] T. Oda, Hironaka group schemes and resolution of singularities, to appear in Proc. Japan-France Conference in Algebraic Geometry, Tokyo and Kyoto, 1982 (to be published as Lecture Notes in Math., Springer-Verlag).