

実連続関数に値をとる微分可能な写像の Hyers-Ulam stability について

新潟大学大学院 三浦 毅 (Takeshi Miura)
山形大学工学部 高橋 眞映 (Sin-Ei Takahasi)
大阪教育大学 長田 尚 (Hisashi Choda)

以下では I は $\mathbb{R}$ の開区間を表わす. このとき I は $\mathbb{R}$ に一致してもよいとする. つまり,

$$I = (a, b) \quad -\infty \leq a < b \leq \infty$$

とする. また特に断らない限り $\varepsilon \geq 0$, $\lambda > 0$ とし, $J = \{e^{-\lambda t} : t \in I\}$ とおく. 以下の命題 1 から命題 3 は, $\lambda = 1$ の場合を Alsina-Ger [1] が示したが, 一般の $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対してもまったく同様に示される. 以下では $\lambda > 0$ の場合についてのみ考察するが, $\lambda < 0$ の場合についても, $\lambda > 0$ に対応してほぼ同様の結果が成り立つ.

命題 1 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能とし, f' を f の導関数とする. このとき次が成り立つ.

- (i) $f' \leq \lambda f \Leftrightarrow g' \leq 0$ をみたすある $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$ ($t \in I$).
- (ii) $f' \geq \lambda f \Leftrightarrow g' \geq 0$ をみたすある $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$ ($t \in I$).

命題 2 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能とし, f' を f の導関数とする. このとき以下は同値である.

- (i) $|f'(t) - \lambda f(t)| \leq \varepsilon$ ($t \in I$).
- (ii) 微分可能な関数 $\theta: J \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して次をみたす.

$$0 \leq -\lambda \theta'(u) \leq 2\varepsilon \quad (u \in J),$$

$$f(t) = \frac{\varepsilon}{\lambda} + \theta(e^{-\lambda t})e^{\lambda t} \quad (t \in I).$$

ここに θ' は θ の導関数である.

注意 1 θ は $\frac{2\varepsilon}{\lambda}$ -lipschitz である. 実際 $u, v \in J: u \neq v$ とすると, 平均値の定理により, ある $w \in (\min(u, v), \max(u, v))$ に対して

$$\theta(u) - \theta(v) = \theta'(w)(u - v)$$

となる. ここで $0 \leq -\lambda \theta'(w) \leq 2\varepsilon$ より

$$|\theta(u) - \theta(v)| \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda} |u - v|$$

となる.

注意 2 命題2における J 上の関数 θ に対して, $\lim_{u \searrow \inf J} \theta(u)$ が存在する. 実際 $\varepsilon = 0$ のときは $\theta' = 0$ となり, θ は定数値関数である. よって $\lim_{u \searrow \inf J} \theta(u)$ が存在する. そこで $\varepsilon > 0$ のときを考える. まず $\sup_{v \in J} \theta(v) < \infty$ となることを示す. もしも $\sup_{v \in J} \theta(v) = \infty$ ならば, ある $v_1 \in J$ に対して $\theta(v_1) > 1$ となる. 次にある $v_2 \in J$ に対して $\theta(v_2) > \theta(v_1) + 1$ とできる. このとき $v_2 < v_1$ である. 実際 $v_2 \geq v_1$ とすると, $0 \leq -\lambda \theta'(u) \leq 2\varepsilon$ より $\lambda > 0$ に注意すれば, $\theta' \leq 0$ である. よって $\theta(v_2) \leq \theta(v_1)$ でなければならない. これは $\theta(v_2) > \theta(v_1) + 1$ に反する. つまり $v_2 < v_1$ である. 帰納的に $\theta(v_{n+1}) > \theta(v_n) + 1$ をみたす $v_n \in J: v_{n+1} < v_n$ ($n \in \mathbb{N}$) が存在する. ところで, ある $m \in \mathbb{N}$ に対して $(0 <) v_m - v_{m+1} < \frac{\lambda}{2\varepsilon}$ となる. もしも任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $v_n - v_{n+1} \geq \frac{\lambda}{2\varepsilon}$ とすると $\frac{\lambda}{2\varepsilon}, v_1 > 0$ より $\frac{\lambda}{2\varepsilon}k > v_1$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在するが, 仮定より

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{k+1} + \sum_{l=1}^k (v_l - v_{l+1}) \\ &> \sum_{l=1}^k \frac{\lambda}{2\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} k. \end{aligned}$$

これは k のとりかたに反する. よって $(0 <) v_m - v_{m+1} < \frac{\lambda}{2\varepsilon}$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在することが示された. このとき

$$\frac{\theta(v_{m+1}) - \theta(v_m)}{v_{m+1} - v_m} < -\frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

となる. 平均値の定理より

$$\theta'(v_0) = \frac{\theta(v_{m+1}) - \theta(v_m)}{v_{m+1} - v_m}$$

をみたす $v_0 \in (v_{m+1}, v_m)$ が存在する. よって

$$\theta'(v_0) < -\frac{2\varepsilon}{\lambda}.$$

ところが $v_0 \in J$ なので, これは $-\lambda \theta'(u) \leq 2\varepsilon$ ($u \in J$) に反する. ゆえに $\sup_{v \in J} \theta(v) < \infty$ が示された.

最後に $\lim_{u \searrow \inf J} \theta(u) = \sup_{v \in J} \theta(v)$ を示す. $\eta > 0$ を任意に与えると, $\sup_{v \in J} \theta(v) - \eta < \theta(u_0)$ なる $u_0 \in J$ が存在する. $\theta' \leq 0$ なので, $u \leq u_0$ ならば $\theta(u) \geq \theta(u_0)$ となる. ゆえに

$$|\theta(u) - \sup_{v \in J} \theta(v)| < \eta \quad (u \in J: u < u_0).$$

すなわち, $\lim_{u \searrow \inf J} \theta(u) = \sup_{v \in J} \theta(v)$ が示された.

命題 3 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能とし, f' を f の導関数とする. このとき

$$|f'(t) - \lambda f(t)| \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

ならば, $c = \lim_{u \searrow \inf J} \theta(u)$ に対して

$$|f(t) - ce^{\lambda t}| \leq \frac{3\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

となる.

[1] では微分方程式の摂動 $|f'(t) - \lambda f(t)| \leq \varepsilon$ の解の, 命題 3 の意味での安定性を Hyers-Ulam stability と呼んでいる.

定義 1 A を Banach 空間, $f: I \rightarrow A$ とする. f が微分可能であるとは, 任意の $t \in I$ に対して $f'(t) \in A$ が存在して,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\| f'(t) - \frac{f(t+s) - f(t)}{s} \right\|_A = 0$$

をみたすことをいう. ここに $\|\cdot\|_A$ は A のノルムとする.

注意 3 定義 1 の意味での微分可能性は, 各点で Fréchet 微分可能であることと同値である.

以後特に断らない限り, $f'(t)$ は $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t+s) - f(t)}{s}$ を表わすことにする. 次の命題はよく知られた結果であると思うが, 完全を期すため証明を述べる.

命題 4 A を Banach 空間, $f: I \rightarrow A$ は微分可能とする. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ とすると次は同値である.

- (i) $f'(t) = \lambda f(t) \quad (t \in I)$
- (ii) ある $g \in A$ に対して $f(t) = e^{\lambda t} g$.

証明 (ii) $\Rightarrow$ (i) 微分の定義より明らか.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $g(t) = e^{-\lambda t} f(t) \quad (t \in I)$ とおく. このとき

$$g'(t) = \{-\lambda f(t) + f'(t)\}e^{-\lambda t} = 0 \quad (t \in I).$$

いま $g(t)$ は $t \in I$ に依存しないことを示す. 実際 $t_0 \in I$ を任意にとり固定し,

$$h(t) = g(t) - g(t_0) \quad (t \in I)$$

とおく. A の双対空間 A^* の任意の元 Λ に対して, Λ の連続性により

$$\frac{d}{dt} \{\Lambda(h(t))\} = \Lambda(h'(t)) = \Lambda(0) = 0 \quad (t \in I)$$

となる. ここで $h'(t) = 0$ であることを用いた. よって任意の $\Lambda \in A^*$ に対して $c_\Lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $\Lambda(h(t)) = c_\Lambda \quad (t \in I)$ となる. $h(t_0) = 0$ より $c_\Lambda = \Lambda(h(t_0)) = \Lambda(0) = 0$ なので, Hahn-Banach の定理より $h(t) = 0 \quad (t \in I)$. よってある $g \in A$ に対して $g(t) = g \quad (t \in I)$ となる. すなわち $f(t) = e^{\lambda t} g$. ■

以下では $C_0(X, \mathbb{R})$ を局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の実数値連続関数で、無限遠点で 0 になるもの全体からなる実 Banach 空間とする. $f: I \rightarrow C_0(X, \mathbb{R})$ は微分可能で

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

となるならば、次をみたす $k \in \mathbb{R}$ と $g \in C_0(X, \mathbb{R})$ が存在するか?

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g\|_\infty \leq k\varepsilon \quad (t \in I).$$

ここに $\|\cdot\|_\infty$ は X 上の sup-ノルムである.

以下でこの問題について考察する. まず各 $t \in I, x \in X$ に対して

$$f'(t)(x) = \frac{d}{dt} \{f(t)(x)\}$$

に注意すると

$$\left| \frac{d}{dt} \{f(t)(x)\} - \lambda f(t)(x) \right| \leq \varepsilon \quad (t \in I, x \in X)$$

となる. このとき命題 2 により各 $x \in X$ に対して

$$f(t)(x) = \frac{\varepsilon}{\lambda} + \theta_x(e^{-\lambda t})e^{\lambda t} \quad (t \in I)$$

とかける. ここに θ_x は J 上の微分可能な実数値関数で、次をみたす.

$$0 \leq -\lambda \theta_x'(u) \leq 2\varepsilon \quad (u \in J)$$

注意 2 により

$$g(x) = \lim_{u \searrow \inf J} \theta_x(u)$$

は well-defined である. このとき g の定義及び命題 3 により

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g\|_\infty \leq \frac{3\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

となることに注意する. 以下で g は、ここで得られた X 上の関数を表わすことにする.

注意 4 $f: I \rightarrow C_0(X, \mathbb{R})$ は微分可能で

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

とする. 特にこの不等式が $\varepsilon = 0$ に対して成立するならば、命題 4 により $f(t) = e^{\lambda t} h$ となる $h \in C_0(X, \mathbb{R})$ が存在する. また命題 2 により各 $t \in I, x \in X$ に対して $f(t)(x) = \theta_x(e^{-\lambda t})e^{\lambda t}$ と表わせるので

$$h(x) = \theta_x(e^{-\lambda t}) \quad (x \in X, t \in I).$$

g の定義により、各 $x \in X$ に対し

$$g(x) = \lim_{u \searrow \inf J} \theta_x(u) = h(x)$$

である. すなわち $g \in C_0(X, \mathbb{R})$ である.

定理 1 $f: I \rightarrow C_0(X, \mathbb{R})$ は微分可能で

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

をみたすとする. このとき g は X 上で連続である.

証明 注意 4 により $\varepsilon > 0$ の場合を考えれば十分である. このとき背理法により示す. そこで, g はある $x_0 \in X$ で連続でないと仮定し矛盾を導く. つまり $\eta_0 > 0$ が存在して, x_0 の任意の開近傍 V に対して $z \in V$ が存在し,

$$|g(x_0) - g(z)| \geq \eta_0$$

をみたすとする. このとき $g(x_0) = \lim_{u \searrow \inf J} \theta_{x_0}(u)$ より

$$|g(x_0) - \theta_{x_0}(u)| < \frac{\eta_0}{4} \quad (u \in J : u < u_0)$$

をみたす $u_0 \in J$ が存在する. いま $\alpha = \inf J$ とおき, $u_1 < \min \left\{ u_0, \alpha + \frac{\lambda \eta_0}{8\varepsilon} \right\}$ なる $u_1 \in J$ を考える. このとき

$$(1) \quad |g(x_0) - \theta_{x_0}(u_1)| < \frac{\eta_0}{4}$$

$$u_1 < \alpha + \frac{\lambda \eta_0}{8\varepsilon}$$

である. さて, $x \mapsto \theta_x(u_1)$ は X 上の連続関数なので,

$$(2) \quad |\theta_{x_0}(u_1) - \theta_y(u_1)| < \frac{\eta_0}{4} \quad (y \in W_0)$$

をみたす x_0 の開近傍 W_0 が存在する. このとき背理法の仮定より

$$(3) \quad |g(x_0) - g(z)| \geq \eta_0$$

となる $z \in W_0$ が存在する. また, 上と同様にして

$$(4) \quad |g(z) - \theta_z(u_2)| < \frac{\eta_0}{4}$$

をみたす $u_2 \in J : u_2 < u_1$ が存在する. ゆえに (1), (2), (3), (4) より

$$\begin{aligned} & |\theta_z(u_2) - \theta_z(u_1)| \\ & \geq |g(z) - g(x_0)| - |\theta_z(u_2) - g(z)| \\ & \quad - |g(x_0) - \theta_{x_0}(u_1)| - |\theta_{x_0}(u_1) - \theta_z(u_1)| \\ & \geq \eta_0 - \frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0}{4} \\ & = \frac{\eta_0}{4}, \end{aligned}$$

すなわち

$$(5) \quad |\theta_z(u_2) - \theta_z(u_1)| \geq \frac{\eta_0}{4}$$

である. ところで平均値の定理より

$$\theta_z'(v) = \frac{\theta_z(u_2) - \theta_z(u_1)}{u_2 - u_1}$$

となる $v \in (u_2, u_1)$ が存在するが, 不等式 (5) より

$$\theta_z'(v) \leq \frac{\eta_0}{4(u_2 - u_1)} < \frac{\eta_0}{4(\alpha - u_1)}$$

でなければならない. u_1 の定め方より

$$\frac{\eta_0}{4(\alpha - u_1)} < -\frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

であるから

$$\theta_z'(v) < -\frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

となるが, これは $-\frac{2\varepsilon}{\lambda} \leq \theta_z'(v) \leq 0$ に反する. ゆえに背理法により g は X 上連続であることが示された. ■

系 2 $C(X, \mathbb{R})$ をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の実数値連続関数全体からなる実 Banach 空間とする. $f: I \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ が微分可能で,

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

とする. このとき $g \in C(X, \mathbb{R})$ であり

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g\|_\infty \leq \frac{3\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

をみたす.

定理 3 $f: I \rightarrow C_0(X, \mathbb{R})$ は微分可能で,

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

をみたせば $g_0 = g + \frac{\alpha\varepsilon}{\lambda}$ は無限遠点で 0 になる. ここに $\alpha = \inf J$ である.

証明 注意 4 により $\varepsilon > 0$ のときを考えればよい. このとき背理法により上の命題を示す. すなわち g_0 は無限遠点で 0 にならないと仮定し, 矛盾を導く. つまり次をみたす $\delta_0 > 0$ が存在すると仮定する:

X の任意のコンパクト部分集合 K に対して $y \in X \setminus K$ が存在して $|g_0(y)| \geq \delta_0$ となる.

まず $\alpha = \inf J$ より

$$(6) \quad u_0 < \alpha + \frac{\lambda \delta_0}{8\varepsilon}$$

をみたす $u_0 \in J$ が存在する. このとき $t_0 \in I: u_0 = e^{-\lambda t_0}$ なる t_0 に対して, $f(t_0) \in C_0(X, \mathbb{R})$ なので

$$|f(t_0)(x)| < \frac{\delta_0}{4} e^{\lambda t_0} \quad (x \in X \setminus K_0)$$

をみたす X のコンパクト部分集合 K_0 が存在する. すなわち

$$(7) \quad |\theta_x(u_0) + \frac{\varepsilon}{\lambda} u_0| < \frac{\delta_0}{4} \quad (x \in X \setminus K_0).$$

ここで背理法の仮定より

$$|g_0(y_0)| \geq \delta_0$$

となる $y_0 \in X \setminus K_0$ が存在する. つまり

$$(8) \quad |g(y_0) + \frac{\alpha \varepsilon}{\lambda}| \geq \delta_0$$

である. また g の定義より

$$(9) \quad |g(y_0) - \theta_{y_0}(v_0)| < \frac{\delta_0}{4}$$

となる $v_0 \in J: v_0 < u_0$ が存在する. このとき (6), (7), (8), (9) より

$$\begin{aligned} |\theta_{y_0}(v_0) - \theta_{y_0}(u_0)| &\geq |g(y_0) + \frac{\alpha \varepsilon}{\lambda}| - |\theta_{y_0}(v_0) - g(y_0)| \\ &\quad - |\theta_{y_0}(u_0) + \frac{\varepsilon}{\lambda} u_0| - \frac{\varepsilon}{\lambda} |u_0 - \alpha| \\ &\geq \delta_0 - \frac{\delta_0}{4} - \frac{\delta_0}{4} - \frac{\varepsilon \lambda \delta_0}{\lambda 8\varepsilon} \\ &> \frac{\delta_0}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ. さて平均値の定理より

$$\theta_{y_0}'(w) = \frac{\theta_{y_0}(v_0) - \theta_{y_0}(u_0)}{v_0 - u_0}$$

となる $w \in (v_0, u_0)$ が存在するが, $\theta_{y_0}'(u) \leq 0$ ($u \in J$) に注意すれば,

$$\theta_{y_0}'(w) < \frac{\delta_0}{4(v_0 - u_0)} < \frac{\delta_0}{4(\alpha - u_0)}$$

である. ところが $u_0 < \alpha + \frac{\lambda \delta_0}{8\varepsilon}$ より

$$\theta_{y_0}'(w) < -\frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

でなければならない. これは $-\frac{2\varepsilon}{\lambda} \leq \theta_{y_0}'(w) \leq 0$ に反する. よって背理法により $g_0 = g + \frac{\alpha \varepsilon}{\lambda}$ は無限遠点で 0 になることが示された. ■

定理 4 $f: I \rightarrow C_0(X, \mathbb{R})$ は微分可能で

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

をみたすとする. このとき $g_0 = g + \frac{\alpha\varepsilon}{\lambda} \in C_0(X, \mathbb{R})$ であり,

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g_0\|_\infty \leq \frac{4\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

が成り立つ.

証明 定理 1 及び定理 3 により $g_0 \in C_0(X, \mathbb{R})$ である. また

$$\begin{aligned} \|f(t) - e^{\lambda t} g_0\|_\infty &\leq \|f(t) - e^{\lambda t} g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{\lambda} \alpha e^{\lambda t} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\lambda} (3 + \alpha e^{\lambda t}) \end{aligned}$$

であるが,

$$\alpha = \inf J \leq e^{-\lambda t} \quad (t \in I)$$

に注意すると

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g_0\|_\infty \leq \frac{4\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

である. ■

系 5 $I = (a, \infty)$ ($-\infty \leq a < \infty$) とする. $f: I \rightarrow C_0(X, \mathbb{R})$ は微分可能で,

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (t \in I)$$

とする. このとき, $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) e^{-\lambda t} = 0$ となるある関数 $k: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ に対して,

$$\|f(t) - e^{\lambda t} h\|_\infty \leq \varepsilon k(t) \quad (t \in I)$$

をみたす $h \in C_0(X, \mathbb{R})$ が存在すれば, $g = h$ である. ただし $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ である.

証明 いま $\inf J = 0$ なので, 定理 1, 定理 3 により $g \in C_0(X, \mathbb{R})$ で,

$$\|f(t) - e^{\lambda t} g\|_\infty \leq \frac{3\varepsilon}{\lambda} \quad (t \in I)$$

をみたす. そこで, $h \in C_0(X, \mathbb{R})$ が

$$\|f(t) - e^{\lambda t} h\|_\infty \leq \varepsilon k(t) \quad (t \in I)$$

をみたせば, $g = h$ であることを示す. 実際

$$\begin{aligned} \|g - h\|_\infty &\leq \|g - e^{-\lambda t} f(t)\|_\infty + \|e^{-\lambda t} f(t) - h(t)\|_\infty \\ &\leq \left\{ \frac{3}{\lambda} + k(t) \right\} \varepsilon e^{-\lambda t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

なので, $g = h$ でなければならない. ■

参考文献

- [1] C. Alsina, R. Ger, *On some inequalities and stability results related to the exponential function*, J. of Inequal. & Appl., 2 (1998), 373-380.