

Maass waveform の数値計算

木村 巖* (富山大学理工学研究部 (理学))

Iwao KIMURA,

The Graduate School of Science and Engineering for Research,
University of Toyama.

本稿では, Maass waveform の数値計算の試みについて論ずる.

1 Maass waveform の基本事項

この節では, Maass waveform の基本事項を, 本稿 [本 99, II 部 §17-18] により概説する.

Maass waveform は, 上半平面上の「実解析的」関数で, 算術部分群 ($SL_2(\mathbf{R})$ の離散部分群で余体積有限なもの) について不変性をもつものである (正確な定義は後述する). これは正則モジュラー形式の「実解析的」類似である.

1.1 上半平面の微分幾何

上半平面を $H = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ とする. 上半平面の通常の前正則構造から, Riemann 計量 $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$ が定まる. 2 次の実特殊線形群 $SL_2(\mathbf{R})$ は一次分数変換で H に作用し, $SL_2(\mathbf{R})$ が (正確には $PSL_2(\mathbf{R})$ が) H の等長変換群である. また面積要素は $d\mu(z) = \frac{dx dy}{y^2}$ で, これは $SL_2(\mathbf{R})$ 不変である.

全モジュラー群 $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$ による H の商を考え, 通常の基本領域を $\mathcal{F}$ と書く. また, $\mathcal{F}$ に 1 点を付け加えて得られる実 2 次元曲面を $\mathcal{F}^*$ と書く.

上の Riemann 計量に対する Laplace-Beltrami 作用素から, 双曲的 Laplacian Δ が定まる:

$$\Delta = -y^2 \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right).$$

1.2 Maass waveform

■ Γ -保型関数

定義 1.1. 上半平面 H 上の関数 f が Γ -保型であるとは, $f(\gamma(z)) = f(z)$ が任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して成立すること, つまり, f が曲面 $\mathcal{F}$ 上の関数であることと定義する.

email:iwao@sci.u-toyama.ac.jp

本研究は JSPS 科研費 26400008 の助成を受けたものです.

特に $f \in C^2(\mathcal{F})$ が Γ -保型なら, Δf も Γ -保型である.

例 1.2 (Poincaré 級数・Eisenstein 級数). Γ -保型関数の例として次の Poincaré 級数, Eisenstein 級数がある. Γ_∞ をカスプ ∞ の $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ の作用に関する) 固定部分群とする.

$$P_m(z, s) = \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\mathrm{Im}(\gamma(s)))^s e(m\gamma(z)), \quad (e(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)),$$

$$E(z, s) = P_0(z, s) = \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\mathrm{Im}(\gamma(z)))^s,$$

とにおいて, 前者を Poincaré 級数, 後者を Eisenstein 級数という.

Poincaré 級数は, $m > 0$, $z \in \mathcal{F}$ のとき, $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \frac{3}{4}$ で s について正則かつ $P_m(z, s) \gg y^{1-\sigma}$. Eisenstein 級数は任意の $z \in H$ について s の関数として有理型である.

Eisenstein 級数は, 次のような具体的な表示を持つ.

命題 1.3. Eisenstein 級数は, 任意の $z \in H$ について s の関数として有理型で, 次の Fourier 展開を持つ:

$$E(z, s) = y^s + \phi_\Gamma(s) y^{1-s} + \tag{1}$$

$$\frac{2\pi^s}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \sqrt{y} \sum_{n \neq 0} |n|^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(|n|) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e(nx), \tag{2}$$

$$\phi_\Gamma(s) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2}) \zeta(2s-1)}{\Gamma(s) \zeta(2s)},$$

$K_s(z)$ は Bessel 関数で, $\phi_\Gamma(s)$ については本橋上掲書補題 17.2 をみよ. また $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, $s \neq 1$ で正則, $s = 1$ で一意の極を持ち留数は $\frac{3}{\pi}$ である. 更に, 関数等式と微分方程式を満たす:

$$E(z, s) = \phi_\Gamma(s) E(z, 1-s), \tag{3}$$

$$\Delta E(z, s) = s(1-s) E(z, s). \tag{4}$$

1.3 スペクトル理論

基本領域 $\mathcal{F}$ 上の関数 f に対して $\|f\|^2 = \int_{\mathcal{F}} |f(z)|^2 d\mu(z)$ と定義する.

$$L^2(\mathcal{F}, d\mu) := \{f; f \text{ は } \Gamma\text{-保型関数で, } \|f\| < +\infty\}, \tag{5}$$

$$B^\infty(\mathcal{F}) := \{f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu); f \text{ の任意階の偏導関数が急減少}\}. \tag{6}$$

g が急減少とは, 任意に固定した $M > 0$ に対して $g(z) = O(y^{-M})$, $z \in \mathcal{F}$ と定義する.

Δ はアブリオリには $C^2(\mathcal{F}) \cap L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 上の作用素だが, $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 上に自己共役作用素に拡張でき, スペクトル分解が可能である.

また, $f \in C^2(\mathcal{F}) \cap L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ が $\Delta f = (R^2 + \frac{1}{4})f$ を満たすとき,

- $R = \frac{1}{2}i$ なら f は定数関数,

- $R \neq \frac{1}{2}i$ なら次の Fourier 展開を持ち, よって $f \in B^\infty(\mathcal{F})$. :

$$f(z) = \sqrt{y} \sum_{n \neq 0} c(n) K_{iR}(2\pi|n|y) e(nx), \quad z \in H.$$

■ Δ のスペクトル分解

定理 1.4 (cf. 本橋, 定理 18.1). • Δ を $B^\infty(\mathcal{F})$ に制限すると, 固有値は離散集合. これらを

$$\lambda_j = R_j^2 + \frac{1}{4}, \quad j = 1, 2, \dots; R_{j+1} > R_j > 0, \text{ とする.}$$

- 各 λ_j に対応する固有関数 ψ_j は正規直交系をなすものとする. このとき

$$L^2(\mathcal{F}, d\mu) = \mathbf{C} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{E},$$

ただし, $\mathfrak{D}$ は $\{\psi_j\}$ で張られる空間, $\mathfrak{E}$ は省略.

- つまり, $f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ は次のように展開できる (ノルム収束の意味で):

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \psi_j \rangle + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t, f) E(z, \frac{1}{2} + it) dt.$$

$\psi_j(z)$ を Maass wave cuspform ということにする.

1.4 Hecke 作用素

定義 1.5 (Hecke 作用素). ϕ を Γ -保型, $z \in H$ とする. 正整数 n に対して, 次のように $T_n[\phi](z)$ を定義する:

$$T_n[\phi](z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n, d>0} \sum_{0 \leq b < d} \phi\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

このとき $T_n[\phi](z)$ も再び Γ -保型であることが示せる. $\phi \mapsto T_n[\phi]$ により, n 番目の Hecke 作用素 T_n を定義すし, n 番目の Hecke 作用素という.

特に $n = p$, 素数の時は $(a, d) = (1, p)$ または $(a, d) = (p, 1)$ だから

$$T_p[\phi](z) = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\sum_{0 \leq b < p} \phi\left(\frac{z+b}{p}\right) + \phi(pz) \right). \quad (7)$$

補題 1.6 (Hecke 作用素の間の関係).

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} T\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

特に, Hecke 作用素たちは可換である: $T_m T_n = T_n T_m$. また, $\gcd(m, n) = 1$ なら $T_{mn} = T_m T_n$.

系 1.7. 次の再帰式が成立. 特に T_{p^μ} は T_p の μ 次整数係数多項式である:

$$T_{p^{\mu+1}} = T_{p^\mu} T_p - T_{p^{\mu-1}}.$$

補題 1.8. Hecke 作用素は $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 内の Δ の固有空間それぞれで Hermite 作用素である.

系 1.9. 定理 1.4 の $\{\psi_j\}_{j=1,2,\dots}$ の元は, それぞれ Hecke 作用素の同時固有関数と仮定して良い:
 $T_n[\psi_j](z) = \lambda_j(n)\psi_j(z)$, $\lambda_j(n)$ を Hecke 固有値という.

Hecke 作用素の関係式から, Hecke 固有値の間にも次の関係式が成立:

$$\lambda_j(m)\lambda_j(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_j\left(\frac{mn}{d^2}\right), \quad (8)$$

$$\lambda(p^{\mu+1}) = \lambda(p^\mu)\lambda(p) - \lambda(p^{\mu-1}). \quad (9)$$

■Hecke 作用素の明示式 Maass waveform

$$\phi(z) = \sqrt{y} \sum_{n \neq 0} c(n) K_{iR}(2\pi|n|y) e(nx), \quad z \in H$$

への T_p (p は素数) の作用 (7) を係数で書き下すと,

$$T_p[\phi](z) = \sqrt{y} \sum_{n \neq 0} b(n) K_{iR}(2\pi|n|y) e(nx)$$

としたとき,

$$b(n) = c(pn) + \frac{1}{\sqrt{p}} c\left(\frac{n}{p}\right), \quad (10)$$

ただし $p \nmid n$ なら $c(\frac{n}{p}) = 0$ とする.

1.5 Maass waveform を計算する動機

$SL_2(\mathbf{Z})$ についての, Hecke 固有 Maass wave cuspform (Hecke 作用素の同時固有関数となっている Maass wave cuspform) を計算することを目指す. 動機としては, 次のような間についての例の構成・数値的な検証が挙げられる:

- Poincaré 級数, Eisenstein 級数, Maass による, 実 2 次体の指標に伴うもの以外は具体例に乏しい. 例えば H. Maass [Maa49], H. Cohen, [Coh88], [Coh95].
- Laplacian の最小固有値の評価に関する Selberg の予想 [Sel65],
- Maass waveform についての Ramanujan 型予想 ($|c_p| < 2$) Hejhal-Arno [HA93],
- Maass waveform についての Sato-Tate 型予想, 同上,
- 固有値 $\frac{1}{4}$ の Hecke 固有 Maass waveform と 2 次元偶 Artin 表現の対応 (ただしレベル $N > 1$).

2 Maass waveform の計算法 (Stark による反復法)

■Maass waveform の数値計算法 $\phi(z)$ を Hecke 固有 Maass wave cuspform とする.

$$\phi(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^{\infty} c(n) K_{iR}(2\pi|n|y) e(nx) \quad (11)$$

の $c(n)$ を計算することを目指す. 今回は, Stark [Sta84] 他による先行計算例がある反復法を pari-gp で実装した結果について報告した.

■反復法のアイデア (Stark) $\phi(z)$ が正規化された (すなわち式 (11) で $c(1) = 1$ である) Hecke 固有 Maass waveform と仮定する. するとすべての n について,

$$T_n[\phi](z) = c(n)\phi(z).$$

ここでポイントは,

$$\phi(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^{\infty} c(n) K_{iR}(2\pi|n|y) e(nx)$$

の Bessel-K 関数が, y が大きいと非常に早く減衰することから, 数値計算の際には上の和を N まで打ち切って良い, という点である.

■反復法 これらを組み合わせて, アルゴリズム 1 のような「反復法」による数値計算ができる.

アルゴリズム 1 反復法による Maass waveform の計算

Require: Laplacian の固有値 $\lambda = \frac{1}{4} + R^2$ の近似値.

$c_0 = (c_0(1), c_0(2), \dots, c_0(N)) = (1.0, \dots)$; 初期値を設定する.

$z = z_0$ を適切に選ぶ.

$\phi^{(N)}(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^N c(n) K_{iR}(2\pi ny) \cos(nx)$ と書く (有限和).

while c_n が安定するまで繰り返す: **do**

$c_{n+1} = (c_{n+1}(1), c_{n+1}(2), \dots, c_{n+1}(N))$ を

$$c_{n+1}(m) = \frac{T_m[\phi]^{(N)}(z_0)}{\phi^{(N)}(z_0)}$$

で計算する.

end while

■反復法の改良 Hecke 作用素と Hecke 固有値の関係式 (下記補題 2.1) から, 僅かに改良したアルゴリズム 2 が考えられる.

補題 2.1 (係数の関係式). $\bullet c(p^2) = c(p)^2 - 1,$

$$\bullet c(p^3) = c(p)^3 - 2c(p),$$

$$\bullet c(p^4) = c(p)^4 - 3c(p)^2 + 1,$$

$$\bullet c(p^5) = c(p)^5 - 4c(p)^3 + 3c(p). \quad (\text{式 (9) から}).$$

命題 2.2. $T_p[\phi](z)$ の係数 $b(n)$ を計算するのに,

$$\bullet p \nmid n \text{ なら } b(n) = c(np) = c(n)c(p),$$

$$\bullet p \parallel n \text{ なら } n = pn', p \nmid n' \text{ として } b(n) = c(p^2n') + \frac{1}{\sqrt{p}}c_{n'} = (c(p^2) + \frac{1}{\sqrt{p}})c(n') = (c(p)^2 - 1 + \frac{1}{\sqrt{p}})c(n').$$

$$\bullet p^2 \parallel n \text{ なら } n = p^2n', p \nmid n' \text{ として } b(n) = c(pn) + \frac{1}{\sqrt{p}}c(pn') = (c(p)^3 + (\frac{1}{\sqrt{p}} - 2)c(p) + \frac{1}{\sqrt{p}})c(n').$$

アルゴリズム 2 反復法による Maass waveform の計算 (Hecke 固有値の関係式を使う)

Require: Laplacian の固有値 $\lambda = \frac{1}{4} + R^2$ の近似値.

$c_0 = (c_0(1), c_0(2), \dots, c_0(N)) = (1.0, \dots)$; 初期値を設定する.

$z = z_0$ を適切に選ぶ.

$\phi^{(N)}(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^N c(n) K_{iR}(2\pi ny) \cos(nx)$ と書く (有限和).

while c_n が安定するまで繰り返す: **do**

$c_{n+1} = (c_{n+1}(1), c_{n+1}(2), \dots, c_{n+1}(N))$ の素数番目を

$$c_{n+1}(p) = \frac{T_p[\phi]^{(N)}(z_0)}{\phi^{(N)}(z_0)}$$

で計算する.

$c_{n+1}(p^r), c_{n+1}(m)$ を Hecke 固有値の漸化式, 関係式で計算する.

end while

■今回の数値計算例 Stark の論文 [Sta84] にある, $R = 13.7797513519 * I$ の場合を, $N = 19$ として計算した. この場合に, $T_p[\phi](z)$ の各係数 $b(n)$, $1 \leq n \leq 19$ を $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ について $c(n)$, $1 \leq n \leq 19$ の式で表し,

$$c_p \text{ の近似値} = \frac{T_p[\phi]^{(19)}(z)}{\phi^{(19)}(z)} = \frac{\sqrt{y} \sum_{n=1}^{19} b(n) K_{iR}(2\pi ny) \cos(2\pi nx)}{\sqrt{y} \sum_{n=1}^{19} c(n) K_{iR}(2\pi ny) \cos(2\pi nx)}$$

を $p = 2, 3, \dots, 19$ について計算し, アルゴリズム 2 に従い c_n を計算した.

この Hecke 固有 Maass waveform は, LMFDB^{*1} だと <http://www.lmfdb.org/ModularForm/GL2/Q/Maass/4cb8503a58bca91458000000> に相当するものと思われる.

実装に際しては, Hecke 固有 Maass waveform を係数を並べたベクトルとし, Hecke 作用素 T_p を作用させた Maass waveform の係数の計算を, 補題 2.1 により実装する. 例えば T_2 の作用はリスト 1 のようになる. 考えている Maass waveform と, Hecke 作用素を作用させたものとそれぞれの関数値を計算し (リスト 2), その比を計算する.

リスト 1 pari-gp で実装した T_2 の作用

```
T2(cs) =
{
  my(bs, rpinv);
  rpinv = 1/sqrt(2);
  bs = vector(#cs);
  bs[1] = 1.0;
  bs[2] = cs[2]^2-1 + rpinv;
  bs[3] = cs[2]*cs[3];
  bs[4] = cs[2]^3+rpinv*cs[2]^2-2*cs[2]-rpinv;
  bs[5] = cs[2]*cs[5];
```

^{*1} L-functions and Modular Forms Data Base

```

bs[6] = (cs[2]^2-1+rpinv)*cs[3];
bs[7] = cs[2]*cs[7];
bs[8] = cs[2]^4 +(rpinv-3)*cs[2]^2 -rpinv+1;
bs[9] = cs[2]*(cs[3]^2-1);
bs[10]= (cs[2]^2-1+rpinv)*cs[5];
bs[11]= cs[2]*cs[11];
bs[12]= (cs[2]^3-2*cs[2]+rpinv)*cs[2]*cs[3];
bs[13]= cs[2]*cs[13];
bs[14]= (cs[2]^2-1+rpinv)*cs[7];
bs[15]= cs[3]*cs[5];
bs[16]= cs[2]^5-(4-rpinv)*cs[2]^3+(3-sqrt(2))*cs[2];
bs[17]= cs[2]*cs[17];
bs[18]= (cs[2]^2-1+rpinv)*(cs[3]^2-1);
bs[19]= cs[2]*cs[19];
return(bs);
}

```

リスト 2 Maass waveform の値

```

maassform(R, z, cs) =
{
  /*
   * cs are coeff's of the Maass form (cs[1]=1, ..., cs[19]).
   * R is the spectral parameter, z is the point at which the form is evaluated.
   */
  my(x, y);
  z = pingpong(z);
  x = real(z); y = imag(z);
  return(2*sqrt(y)*sum(n=1, #cs, exp((Pi/2)*(R/l))*cs[n]*besselk(R, 2*Pi*n*y)*cos(2*Pi*n*x)));
}

```

リスト 3 デモ用のドライバ関数

```

demo_generic(niter=10, R, z, cs) =
{
  my(cs1, cs2, cs3, cs4, cs5, cs6, cs7, cs8, cs9, cs10, cs11,
     cs12, cs13, cs14, cs15, cs16, cs17, cs18, cs19, cs20, cs21, cs22,
     cs23, cs24, cs25, cs26, cs27, cs28, cs29, cs30, cs31, maasval, csnew);

  csnew=vector(19); csnew[1]=1.0;
  csnew=cs;
  print("initial cs = ", cs);
  for(n=1, niter,
    /* update p-th coefficients */
    maasval = maassform(R, z, cs);
    /* csnew[2] = maassform(R, z, T2(cs))/maasval; */
    csnew[2] = maassform(R, z, T6(cs))/maassform(R, z, T3(cs));
    /* csnew[3] = maassform(R, z, T3(cs))/maasval; */

```

```

    csnew[3] = maassform(R, z, T6(cs))/maassform(R, z, T2(cs));
    csnew[5] = maassform(R, z, T5(cs))/maasval;
    csnew[7] = maassform(R, z, T7(cs))/maasval;
    csnew[11] = maassform(R, z, T11(cs))/maasval;
    csnew[13] = maassform(R, z, T13(cs))/maasval;
    csnew[17] = maassform(R, z, T17(cs))/maasval;
    csnew[19] = maassform(R, z, T19(cs))/maasval;
    /* update coefficients */
    csnew[4]=csnew[2]^2-1;
    csnew[6]=csnew[2]*csnew[3];
    csnew[8]=csnew[2]^3-2*csnew[2];
    csnew[9]=csnew[3]^2-1;
    csnew[10]=csnew[2]*csnew[5];
    csnew[12]=csnew[4]*csnew[3];
    csnew[14]=csnew[2]*csnew[7];
    csnew[15]=csnew[3]*csnew[5];
    csnew[16]=csnew[2]^4-3*csnew[2]^2+1;
    csnew[18]=csnew[2]*csnew[9];

    cs=csnew;
    print(n, "-th iteration:");
    print("cs( 2) = ", cs[2]);
    print("cs( 3) = ", cs[3]);
    print("cs( 5) = ", cs[5]);
    print("");
);
return(cs);
}

```

リスト 4 Stark の例

```

demo_stark(niter=10, R=13.7797513518907*I, z = 0.1+1.005*I) =
{
    my(cs, cs1, cs2, cs3, cs4, cs5, cs6, cs7, cs8, cs9, cs10, cs11,
    cs12, cs13, cs14, cs15, cs16, cs17, cs18, cs19, cs20, cs21, cs22,
    cs23, cs24, cs25, cs26, cs27, cs28, cs29, cs30, cs31, csnew);

    /* initial values at prime--th coeff's. */
    cs1=1.0; cs2=1.549304; cs3=0.246899; cs5=0.737060;cs7=-0.261420;
    cs11=-0.953564; cs13=0.278827; cs17=1.307341; cs19=0.092558;

    /* initial values at composite--th coeff's. */
    cs4=cs2^2-1;
    cs6=cs2*cs3; cs8=cs2^3-2*cs2;
    cs9=cs3^2-1; cs10=cs2*cs5; cs12=cs4*cs3;
    cs14=cs2*cs7; cs15=cs3*cs5; cs16=cs2^4-3*cs2^2+1;
    cs18=cs2*cs9;

```


99997810849975064417281477 + 0.E-86*I, 0.86621859602648914984066394576156082587
 + 0.E-86*I, 1.0049521671279636949874642299714949935 + 0.E-86*I, -0.6880018721557
 6152790917300262360540599 + 0.E-86*I, 1.000000000000000093294612778997859927 +
 0.E-86*I, 0.0085996502233617055297616993011335912230 + 0.E-86*I, 0.999999999999999
 9997245422836217771920834 + 0.E-86*I]

のようになる。計算結果が収束してはいるが、先行する計算例 Stark [Sta84][Table 1], Hejhal-Arno [HA93][Example 3] の $c(2) = 1.5493\dots$, $c(3) = 0.2468\dots$, $c(5) = 0.7370\dots$ と一致していない。

データは省くが、上のルーチンで計算してみると、Hecke 作用素の可換性が数値的に成立していないことが観察され、それが一つの原因であるかもしれない。

また、 $c_2 = T_2[\phi](z)/\phi(z) = T_6[\phi](z)/T_3[\phi](z)$ が数値的に成立しないので、上掲の Hejhal-Arno 論文では、これらのうち最小のものをとる、といった戦略も検討している（同論文 §5 参照）。

3 まとめ

本稿では、Stark, Hejhal-Arno らの提案による、反復法による、全モジュラー群 $SL_2(\mathbf{Z})$ についての Hecke 固有 Maass waveform の展開係数の数値計算を試みたが、残念ながら先行する計算結果を再現できなかったことを報告した。更に全体的な再検討、実装の改良を試み、先行する計算結果の再現、更には計算範囲を広げることなどを目指したい。

参考文献

- [Coh88] H. Cohen, *q-identities for Maass waveforms*, Invent. Math. **91** (1988), no. 3, 409–422. MR 928490 (89f:11072)
- [Coh95] ———, *Corrigendum: “q-identities for Maass waveforms” [Invent. Math. **91** (1988), no. 3, 409–422; MR0928490 (89f:11072)]*, Invent. Math. **120** (1995), no. 3, 579–580. MR 1334485
- [HA93] D. A. Hejhal and S. Arno, *On Fourier coefficients of Maass waveforms for $PSL(2, \mathbf{Z})$* , Math. Comp. **61** (1993), no. 203, 245–267, S11–S16. MR 1199991 (94a:11062)
- [Maa49] Hans Maass, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **121** (1949), 141–183. MR 0031519 (11,163c)
- [Sel65] Atle Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, pp. 1–15. MR 0182610 (32 #93)
- [Sta84] H. M. Stark, *Fourier coefficients of Maass waveforms*, Modular forms (Durham, 1983), Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984, pp. 263–269. MR 803370 (87h:11128)
- [本 99] 本橋洋一, リーマンゼータ函数と保型波動, 共立講座 21 世紀の数学, no. 21, 共立出版, 1999.