

7-マ-拡大の Galois module structure

愛媛大理 宮本雅彦 (Masahiko Miyamoto)

L/K を代数体の有限次 Galois 拡大とし, G をその Galois 群 $\text{Gal}(L/K)$ とする。このとき L の整数環 $\mathcal{O}_L$ は自然に $\mathcal{O}G$ -加群としての構造を持つ。ここで $\mathcal{O}$ は K の整数環を表すとする。当然, 自然な問題として,

" $\mathcal{O}_L$ の $\mathcal{O}G$ -加群としての構造を決定せよ "

が起, てくるのですが, 現在ほとんどわか, ていません。

$\mathbb{Z}G$ -加群としての構造では, Fröhlich 予想が Taylor によ, て証明され, G の symplectic character の Artin root numbers $W(\chi)$ と密接な関係があることがわか, っています。

$\mathcal{O}G$ -加群の話 1 にもどると, ネーターの結果(?) により, $\mathcal{O}_L$ が $\mathcal{O}G$ -加群として locally free であることと, L/K が tame 拡大であることが同値となります。この場合, 各 tame 拡大 L/K は locally free $\mathcal{O}G$ -加群より成る類群 $\mathcal{A}(\mathcal{O}G)$ の中の元 $[\mathcal{O}_L]$ を与えるわけですが, ここで視点をかえ, 体 K と群 G を固定して考え, Galois 群 $\text{Gal}(L/K)$ が,

G であるような K の tame 拡大体 L を動かしたとき, $[O_L]$ の集合 $R(oG)$ は $\mathcal{C}(oG)$ のどんな部分集合になるかを調べてみます。

まず, elementary abelian p -group に対しては,すでに求められています。(L.R. McCullor)

「定理」 G を elementary abelian p -group とする。

G を有限体 F_q の加法群と見て, C を F_q の乗法群とする。自然に C は G の自己同型群となる。このとき, $\mathbb{Z}C$ の中に (Stickelberger-type と呼ばれる) イデアル $\mathcal{J}$ があって $R(oG) = \mathcal{C}'(oG)^{\mathcal{J}}$ となる。ここで $\mathcal{C}'(oG) = \text{Ker}(\mathcal{C}(oG) \rightarrow \mathcal{C}(o))$ 。

特に上の結果は $R(oG)$ が部分群となっていることを示しています。アーベル群に対してはこれが成り立ちます。この証明も含めて, 以下では G を位数 p^2 の巡回群とし, L/K をフニマ-拡大として話を進めます。

L/K を Galois 群 G をもつ Galois 拡大とする。

$L \ni v$ に対して resolvent $\tilde{v} = \sum_{g \in G} v^g g^{-1} \in LG$ を考えると, この写像は 左 KG -同型です。ゆえに O_L の oG 加群の構造は LG 中の oG -加群 $\tilde{O}_L$ と一致します。

$\Omega \in K$ の代閉体とすると, ΩG の中の元 x が *resolvent* であるためには 任意の K -同型 α に対して $x^\alpha = f(\alpha)x$ となる G の元 $f(\alpha)$ が存在することです。(ここでは f が全射であることを考えないでおく)。このとき容易に,

(1) x, y が *resolvent* なら, xy も *resolvent*。

$\mathcal{O}_L = \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{V}$ (左からの作用と表して) と書けるので, $\tilde{\mathcal{O}}_L = \mathcal{N}\mathcal{P}\tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{N}\mathcal{P}$ は *locally free* なので, $\tilde{\mathcal{O}}_L^{p^2} = \mathcal{N}\mathcal{P}^{p^2}\tilde{\mathcal{V}}^{p^2}$ となる。 $\tilde{\mathcal{V}}^\alpha = f(\alpha)\tilde{\mathcal{V}}$ なので とくに, $(\tilde{\mathcal{V}}^{p^2})^\alpha = (\tilde{\mathcal{V}})^{p^2}$, 即ち, K -同型で不変, ゆえに, $\tilde{\mathcal{V}}^{p^2} \in KG$ 。このとき,

(2) $\tilde{\mathcal{O}}_L^{p^2}$ は $\mathcal{O}G$ の *integral ideal* で p^2 -th power free である。

(3) $\mathcal{N}\mathcal{P}^{-p^2}$ は $w = \tilde{\mathcal{V}}^{p^2}$ の KG 内での *ideal* 分解での p^2 -th power part として特徴付けられる。

次に, G の各 character χ に対して, $\tilde{\mathcal{V}}_\chi$ で $\tilde{\mathcal{V}}$ の ΩG の χ -成分を一般に表すとする。このとき $\tilde{\mathcal{V}}_\chi^g = \chi(g)\tilde{\mathcal{V}}_\chi$ となる。 G は *cyclic* なので, 今 $\chi \in G$ の *faithful character* とすると, 他の character は χ^j の形となる。このとき, $\tilde{\mathcal{V}}_{\chi^j} \tilde{\mathcal{V}}_\chi^{-j}$ は G -不変, ゆえに, $\tilde{\mathcal{V}}_{\chi^j} \tilde{\mathcal{V}}_\chi^{-j} \in K$ となる。今 LG の元 u を $u_{\chi^j} = \tilde{\mathcal{V}}_\chi^{-j} u$ として定義すると, $\tilde{\mathcal{V}} u' \in KG$ 。ゆえに $u^{p^2} = (u \tilde{\mathcal{V}}^{-1})^{p^2} \mathcal{N}\mathcal{P}^{-p^2} \tilde{\mathcal{O}}_L^{p^2} = (\tilde{\mathcal{V}} u' \mathcal{N}\mathcal{P})^{-p^2} \tilde{\mathcal{O}}_L^{p^2}$ となる。

ゆえに $\mathcal{M}$ の類を考えると, $\mathcal{U}$ も resolvent なので,
 $\mathcal{U} = \mathcal{U}$ と仮定してよい。

(6, 7) を使うことになるが 次の重要な結果を求める。

(4) $\mathcal{I}$ を $\mathcal{O}G$ の ideal とする。このとき $\mathcal{I}$ と素な $\mathcal{O}G$ の integral ideal $\mathcal{Q}$ で p^2 -th power free なものがあて、
 $\mathcal{I} = \mathcal{Q} \mathcal{X}^{p^2}$ と書ける。ここで $\mathcal{X}$ は resolvent 。

この結果より

(5) $R(\mathcal{O}G)$ は $\mathcal{U}(\mathcal{O}G)$ の部分群となる。

$E = \text{End}(G)$ とおく。 $E \ni e$ に対して, $g^e = g^{t(e)}$ となる整数 $t(e)$ ($0 \leq t(e) < p^2$) が定まる ($g \in G$)。このとき $e \in [t(e)]$ と書く。 C を E の単元, 即ち G の自己同型群とする。 $E \ni e$ と $\mathcal{O}G$ の ideal $\mathcal{I}$ に対して $\mathcal{O}G$ -加群 $\mathcal{I}^{e^{-1}}$ を次のように定義する。

(i) $\mathcal{I}^{e^{-1}}$ は集合として $\mathcal{I}$ と一致。

(ii) $\mathcal{O}G \ni x, \mathcal{I} \ni m$ に対して x の作用 $x \cdot m$ を $x^e m$ として定義する。

同時に $\mathcal{I}^{e^{-1}}$ で又 $\mathcal{O}G$ -加群 $\mathcal{I}^{e^{-1}}$ に対応する ideal 類の中のある元を表わすとする。これにより e^{-1} は $\mathcal{U}(\mathcal{O}G)$ の endomorphism となる。

$$\theta = \sum_{e \in E} t(e) e^{-1} \quad \text{とおくと, } (E' = E - \{0\})$$

(6) $\langle \hat{v}^{p^2} \rangle = \sigma^\theta$ と書ける。ここで σ は $\sigma_\chi = \langle \hat{v}_\chi^{p^2} \rangle$ で他の成分はすべて 0 とする。

今 $\sigma = \prod_{i=1} \sigma_i$ と分解させる。ここで σ_i は互いに素な square free。このとき容易に

$$\eta_{\chi_j} = \prod_i \sigma_i^{[j]^{-1}(\bar{v}_j - t(\bar{v}_j)) \cdot \frac{1}{p^2}} \quad \text{となる。ここで } t(\bar{v}_j) \text{ は}$$

$0 \leq t(\bar{v}_j) < p^2$ と $t(\bar{v}_j) \equiv \bar{v}_j \pmod{p^2}$ とする。ゆえに

$$\eta_j = \prod_j \prod_i \sigma_i^{[j]^{-1}(\bar{v}_j - t(\bar{v}_j)) \cdot \frac{1}{p^2}}$$

今 $(\bar{v}, p) = 1$ なら, $\sum_j [j]^{-1}(\bar{v}_j - t(\bar{v}_j)) \frac{1}{p^2} = p^{-2}(\theta(\bar{v} - [\bar{v}]))$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 p \text{ なら, } \sum_j [j]^{-1}(\bar{v}_0 p_j - t(\bar{v}_0 p_j)) \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p^2}(\gamma \bar{v}_0 \theta - \gamma \theta_0[\bar{v}_0]) = \frac{1}{p}(\theta \bar{v}_0 - \theta_0[\bar{v}_0])$$

ここで $\theta_0 = \sum_{e \in E} t_0(e) e^{-1} \quad t_0(e) \equiv t(e), 0 \leq t_0(e) < p$ とする。

$$\text{ゆえに, } \mathcal{I} = \langle \mathbb{Z} E^{-1} \cap \frac{1}{p^2} \theta \mathbb{Z} C, \frac{1}{p}(\theta - \theta_0) \mathbb{Z} C \rangle$$

とおくと, $[\eta_j] \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{o}G)^{\mathcal{I}}$ 。ここで

$$\mathcal{C}_1(\mathfrak{o}G) = \text{Kernel}(\mathcal{C}(\mathfrak{o}G) \rightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{o}G/\mathfrak{h}(G)))。$$

「定理」 $R(\mathfrak{o}G) = \mathcal{C}_1(\mathfrak{o}G)^{\mathcal{I}}$

逆の包含関係は 逆にたどり McCullon と同じように

1で求まる。 K は1の原始 p^2 乗根を含んでいるので、
 ΩG の一つの単純成分で話を進めて、 u を構成1たように
 すると resolvent が求まる。

参 照

- L.R. McCulloch , Galois module structure of elementary
 abelian extensions, J. Algebra 82, (1983) 102-134.
 M. Taylor , On Fröhlich's conjecture for rings of integers
 of tame extensions, Invent. Math. 63 (1981), 41-79