

村瀬義益とニュートンの漸化式より得られる一般漸化式

Dedicated to Dr. Tamotsu Tsuchikura in celebration of his 88th birthday

新潟産業大学 堀口 俊二(Shunji Horiguchi)

Niigata Sangyo University

0. Contents

1. 村瀬義益の炉縁の 3 次方程式の 3 つの解法
2. 村瀬義益・ニュートン型の第 1 拡張漸化式(土倉・堀口(*TH*)法)
3. 村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式
4. 村瀬義益・ニュートン型の第 3 拡張漸化式
5. 村瀬義益・ニュートンの一般漸化式
6. 村瀬義益・ニュートン型の第 1～第 3 拡張漸化式の関連
7. 村瀬義益・ニュートン型の第 1～第 3 拡張漸化式の収束

1. 村瀬義益の炉縁の 3 次方程式の 3 つの解法

和算にはニュートン法の拡張と見られる研究があり, これより方程式の解を近似するための多数の漸化式が得られる. 村瀬義益(1630 頃-1710 頃, 新潟佐渡・東京・千葉)の『算法勿憚改』(1673)に, 「炉縁の体積を 192 立方寸とすると, 一辺が 1 尺 4 寸(=14 寸)のとき, 太さを求めよ」という問題がある. 右下図.

太さを x とおく. 縦 x , 横 $14-x$, 高さ x の直方体を 4 個組み合わせると炉縁になる. この体積が 192 であるから, 次の 3 次方程式となる.

$$4x^2(14-x)=192 \quad (1.1)$$

$$f(x)=x^3-14x^2+48=0 \quad (1.2)$$

これは 3 つの実数解 $x=2, 6 \pm 2\sqrt{15}$ をもつ.

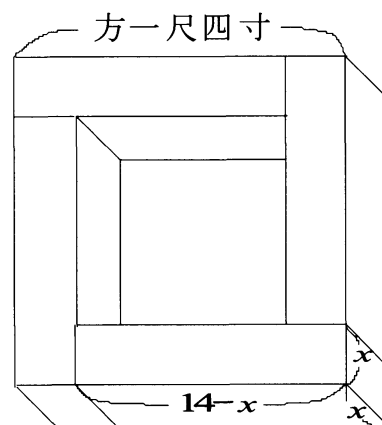
村瀬は(1.1)から 2 つの漸化式を考えた:

$$\text{第1法} \quad x_{n+1}^2 = \frac{48+x_n^3}{14} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (1.3)$$

村瀬は $x_0=0$ (初期値), $x_1=1.85$, $x_2=1.97$, $x_3=1.9936$ まで計算し, 解を 2 としている.

$$\text{第2法} \quad x_{n+1}^2 = \frac{48}{14-x_n} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (1.4)$$

ここでは $x_0=0$, $x_1=1.85$, $x_2=1.976$, $x_3=1.9989$, $x_4=1.9999907$ まで計算し, 解を 2 とし



炉 縁

ている。漸化式(1.3)より(1.4)の方が精度が良くなっている。

村瀬は、関孝和(1640頃-1708)の『題術弁議』(1685)にある逐次近似法より前にこれらを考案した。

第3法は長年未解読であったが、2009年6月初旬に藤井康生(関孝和数学研究所)が解読に成功する。それは次式である。

$$\text{第3法} \quad 48 - x^3 = (14 - 2x)x^2 \quad (1.5)$$

村瀬は方程式(1.5)で解(根)2の確かめをしているようである。これより次の漸化式が得られる。

$$x_{n+1}^2 = \frac{48 - x_n^3}{14 - 2x_n} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

村瀬の漸化式は x^2 を求める2次元の漸化式であり、(1.3),(1.4),(1.6)の右辺の x_n を x にすると、それぞれ3次関数、双曲線、有理関数の異なるタイプである。

2. 村瀬義益・ニュートン型の第1拡張漸化式(土倉・堀口(TH)法)

村瀬の漸化式(1.3),(1.4),(1.6)を拡張する。方程式(1.2)を

$$\begin{aligned} x^3 - mx^3 + 48 &= 14x^2 - mx^3 \\ &= x^2(14 - mx) \end{aligned} \quad (2.1)$$

と変形すると、 $14 - mx \neq 0$ の範囲で次の命題の漸化式を得る。

$$\text{命題 2.1} \quad x_{n+1}^2 = \frac{48 - (m-1)x_n^3}{14 - mx_n} \quad (m \in \mathbf{R}, n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

これを村瀬の炉縁の拡張漸化式という。

定義 2.2 方程式 $f(x)=0$ の根 α の近似値を求める漸化式(反復式)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

をニュートン(1669年頃発見)・ラフソン(1690年頃発見)法という。単にニュートン法あるいはニュートンの漸化式(反復式)ともいう。ただし、根 α の近傍で $f'(x_n) \neq 0$ とする。

定義 2.3 $f(x) = x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \dots + a_{p-1}x + a_p$ とする。 $f(x)$ の q 次導関数の最高次数の項は $p(p-1)(p-2)\dots(p-(q-1))x^{p-q}$ である。この係数を実数 $m(\neq 0)$ に置換えると mx^{p-q} となる。このように置換えた $f^{(q)}(x)$ を $f^{(q)}(x)_m$ と表す。さらに $m=\alpha$ としたとき $f^{(q)}(x)_{m=\alpha}$ と表す。とくに $m=p(p-1)(p-2)\dots(p-(q-1))$ のときは今まで通り単に $f^{(q)}(x)$ と表す。

今後、漸化式において $f^{(q)}(x)_m$ と $f^{(q)}(x)$ を使い分ける。特に $f(x)$ が初等関数を含む場合は $f^{(q)}(x)$ を用いる。

例 2.4 炉縁の方程式

$$f(x)=x^3-14x^2+48=0 \quad (2.4)$$

を漸化式

$$x_{n+1,m}^2 = x_n^2 - 2x_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n), m} \quad (2.5)$$

に適用する.

$$x_n^2 - 2x_n \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{mx_n^2 - 28x_n} = \frac{(m-2)x_n^3 - 96}{mx_n - 28} \quad (2.6)$$

$$= \frac{(m/2-1)x_n^3 - 48}{(m/2)x_n - 14} \quad (2.7)$$

となる. ここで $m/2=m'$ とおくと漸化式(2.7)は命題 2.1 の村瀬の炉縁の拡張漸化式(2.2)になる.

漸化式(2.5)を一般化するとつぎの定理の漸化式を得る.

定理 2.5
$$x_{n+1}^q = x_n^q - qx_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.8)$$

ここで, q は 0 でない整数, 根 α の近傍で $f'(x_n) \neq 0$ とする.

証明 $f(x)$ において
$$x^q = t, g(t) = f(t^{1/q}) \quad (2.9)$$

と変換すれば, ニュートン法は(2.10), (2.11)となる.

$$t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n)} \quad (2.10)$$

ここで $t_n = x_n^q$ とおくと

$$= t_n - \frac{f(t_n^{1/q})}{f'(t_n^{1/q})^{1/q} t_n^{1/q-1}} \quad (2.11)$$

漸化式(2.8)を得る. $\square$

定義 2.6 漸化式(2.8)を村瀬義益・ニュートン型の第 1 拡張漸化式 あるいは土倉・堀口 (TH) 法という.

TH 法は次のようにしても得られる. すなわちニュートン法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

の両辺を q 乗して右辺を 2 項展開する. この (初項+第 2 項) が TH 法となる.

3. 村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式

以下の § において漸化式の分母の $f(x)$ の q 次導関数 $f^{(q)}(x_n)$ は根 α の近傍で $f^{(q)}(x_n) \neq 0$ とする.

k は 0 でない実数定数とする. 方程式 $f(x)=0$ は

$$x^q f^{(q)}(x) = x^q f^{(q)}(x) - kf(x) \quad (3.1)$$

と変形され, これより次の漸化式を得る.

命題 3.1
$$x_{n+1}^q = x_n^q - k \frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)} (q \geq 1, k \text{ は } 0 \text{ でない実数定数}) \quad (3.2)$$

例 3.2 漸化式(3.2)において, $k=1$, $q=2$, $f^{(2)}(x_n)=f^{(2)}(x_n)_m$, $f(x)$ を炉縁の方程式(1.2)の $f(x)=x^3-14x^2+48$ としても村瀬の炉縁の拡張漸化式(2.2)を得られない. しかし $q=k=1$ のときニュートン法となる.

$q=k=2$ とすると(3.3)になる. これに炉縁の方程式を適用すると(3.6)になる. ここで $m/2=m'$

とおくと(3.6)は命題 2.1 の村瀬の炉縁の拡張漸化式(2.2)になる.

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 - 2 \frac{f(x_n)}{f''(x_n)_m} \quad (3.3)$$

$$= x_n^2 - 2 \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{mx_n - 28} \quad (3.4)$$

$$= \frac{(m-2)x_n^3 - 96}{mx_n - 28} \quad (3.5)$$

$$= \frac{(m/2-1)x_n^3 - 48}{(m/2)x_n - 14} \quad (3.6)$$

この例より漸化式(3.2)を次のように定義する.

定義 3.3 漸化式(3.2)を村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式という. とくに $k=1$ のときニュートン型の拡張漸化式, $k=2$ のとき村瀬型の拡張漸化式という.

命題 3.4 ニュートン型の拡張漸化式を ${}^N x_{n+1}^q$, 村瀬型の拡張漸化式を ${}^M x_{n+1}^q$ と表す. このとき次の関係式を得る.

$${}^N x_{n+1}^q = {}^M x_{n+1}^q + \frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)} \quad (3.7)$$

4. 村瀬義益・ニュートン型の第 3 拡張漸化式

定義 4.1
$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (k=2, 3, \dots) \quad (4.1)$$

をシュレーダー法(1870)という.

村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式(3.2)において, $q=1$, $k=2, 3, \dots$ とするとシュレーダー法になる. すなわち(3.2)はシュレーダー法の拡張である.

ニュートン法を ${}^N x_{n+1}$, シュレーダー法を ${}^S x_{n+1}$ と表すと

$$\frac{1}{k}({}^S x_{n+1} - x_n) + x_n = {}^N x_{n+1} \quad (4.2)$$

となる. (4.2)を式変形して次の命題の関係式を得る.

命題 4.2
$$\frac{1}{k} {}^S x_{n+1} + \frac{k-1}{k} x_n = {}^N x_{n+1} \quad (4.3)$$

関係式(4.3)は線分 ${}^S x_{n+1} x_n$ を $(k-1)/k : 1/k$ に内分する点が ${}^N x_{n+1}$ であるという面白い公式である(三重大学 新田貴士教授による指摘).

シュレーダー法を 2 項展開して (初項 + 第 2 項) を選ぶと次の漸化式を得る.

命題 4.3
$$x_{n+1}^q = x_n^q - q x_n^{q-1} k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (q=1, 2, \dots, k(\neq 0) \in \mathbf{R}) \quad (4.4)$$

定義 4.4 漸化式(4.4)を村瀬義益・ニュートン型の第3拡張漸化式あるいはシュレーダー型の拡張漸化式という.

注意 4.5 シュレーダー型の拡張漸化式は $k=1$ のとき土倉・堀口法となる. しかしシュレーダー型の拡張漸化式から村瀬型とニュートン型の拡張漸化式は得られない.

5. 村瀬義益・ニュートンの一般漸化式

村瀬義益・ニュートン型の第1～第3拡張漸化式を一般化する.

定義 5.1 方程式 $f(x)=0$ に対して次式を村瀬義益・ニュートンの一般漸化式という.

$$x_{n+1}^q = x_n^q - \lambda x_n^r \frac{f(x_n)}{f^{(i)}(x_n)} \quad (\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbf{R}) \quad (5.1)$$

漸化式 (5.1) は q, λ, r, i により以下のように switch する.

- A. $\lambda=q$ (0 でない整数), $r=q-1, i=1$ のとき村瀬・ニュートン型の第1拡張漸化式あるいは土倉・堀口 (TH) 法という.
- B. $r=0, \lambda$ は 0 でない実数, $i=q$ (1 以上の整数) のとき村瀬・ニュートン型の第2拡張漸化式という. 特に
 $\lambda=1$ のときニュートン型の拡張漸化式という. $\lambda=2$ のとき村瀬型の拡張漸化式という.
- C. $\lambda=qk$ (q は 0 でない整数, k は 0 でない実数), $r=q-1, i=1$ のとき, 村瀬・ニュートン型の第3拡張漸化式あるいはシュレーダー型の拡張漸化式という.

6. 村瀬義益・ニュートン型の第1～第3拡張漸化式の関連

§ 6, 7 において必要に応じて $f(x)$ は C^i ($i \geq 1$) 級とする.

定義 6.1 集合 $D \subseteq \mathbf{R}$ で定義された関数 $g(x): D \rightarrow D$ に対して

- (1) $\alpha=g(\alpha)$ を満たすとき α を $g(x)$ の不動点という.
- (2) $g(x)$ がある定数 L に対して $|g(x)-g(y)| \leq L|x-y|$ ($x, y \in D$) (6.1)

のとき **Lipschitz 連続**, さらに $0 \leq L < 1$ のとき縮小写像とよばれる.

定義 6.2 十分大きい n と定数 $M(>0)$ に対して

- (1) $|x_{n+1} - \alpha| \leq M|x_n - \alpha|$ ($0 < M < 1$) (6.2)

のとき, 数列 $\{x_n\}$ は α に1次収束するといい, M を収束率という.

- (2) 収束する数列 $\{x_n^q\}$ に対して

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M|x_n - \alpha|^p \quad (q \geq 1, p \geq 2) \quad (6.3)$$

のとき, 数列 $\{x_n^q\}$ は α^q に p 次収束するという.

次の縮小写像の原理は、漸化式が収束するための十分条件を与える。

定理 6.3 (縮小写像の原理) 閉集合 $D \subseteq \mathbb{R}$ で定義された関数 $g(x): D \rightarrow D$ が縮小写像

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad (0 \leq L < 1, L: \text{収縮率}) \quad (6.4)$$

なら、 $g(x)$ の不動点 α が D 内に唯一存在し、任意の初期値 x_0 に対し反復

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (6.5)$$

は α に収縮率 L で 1 次収束する。

定理 6.4
$$g(x) = \left(x^q - q x^{q-1} \frac{f(x)}{f'(x)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (6.6)$$

は $f(x)=0$ の根 α の近傍で縮小写像である。さらに、 $g(\alpha)=\alpha$ であるから、 α は $g(x)$ の不動点である。したがって漸化式

$$x_{n+1} = \left(x_n^q - q x_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (6.7)$$

は α に 1 次収束する。

証明
$$g'(x) = \frac{1}{q} \left(x^q - q x^{q-1} \frac{f(x)}{f'(x)} \right)^{\frac{1}{q}-1} \left(q x^{q-1} - q(q-1) x^{q-2} \frac{f(x)}{f'(x)} - q x^{q-1} \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right) \quad (6.8)$$

$$\therefore g'(\alpha) = \frac{1}{q} (\alpha^q)^{\frac{1}{q}-1} \left(q \alpha^{q-1} - q \alpha^{q-1} \frac{(f'(\alpha))^2}{(f'(\alpha))^2} \right) = 0 \quad (6.9)$$

仮定より $f(x)$ は C^i 級であるから $g'(x)$ は連続となるので、 $x=\alpha$ の近傍で $|g'(x)| < 1$ となる。したがって $g(x)$ は縮小写像となる。しかも $g(\alpha)=\alpha$ であるから α は $g(x)$ の不動点である。したがって縮小写像の原理により漸化式(6.7)は α に 1 次収束する。 $\square$

注意 6.5 TH 法(2.8)の q 乗根は q が偶数のとき

$$g(x) = \pm \left(x^q - q x^{q-1} \frac{f(x)}{f'(x)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (6.6')$$

となる。ここでは q が奇数の場合と統一して $-$ (マイナス) の方は省略する。

定理 6.6 方程式 $f(x)=0$ の根を α とする。関数

$$g(x) = x^q - k \frac{f(x)}{f^{(q)}(x)} \quad (k \neq 0) \quad (6.10)$$

は C^i 級とする。このとき

$$q x^{q-1} = k \frac{f'(x)}{f^{(q)}(x)} \quad (6.11)$$

が成り立てば, $g(x)$ は α の近傍で縮小写像になり, 村瀬・ニュートン型の第 2 拡張漸化式

$$x_{n+1}^q = x_n^q - k \frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)} \quad (q \geq 1) \quad (6.12)$$

は村瀬・ニュートン型の第 1 拡張漸化式すなわち土倉・堀口法

$$x_{n+1}^q = x_n^q - qx_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6.13)$$

になる.

証 明
$$g'(x) = qx^{q-1} - k \frac{f'(x)f^{(q)}(x) - f(x)f^{(q+1)}(x)}{(f^{(q)}(x))^2} \quad (6.14)$$

$$\therefore g'(\alpha) = q\alpha^{q-1} - k \frac{f'(\alpha)f^{(q)}(\alpha)}{(f^{(q)}(\alpha))^2} \quad (6.15)$$

$$= q\alpha^{q-1} - k \frac{f'(\alpha)}{f^{(q)}(\alpha)} \quad (6.16)$$

ここで条件(6.11)より $g'(\alpha)=0$ となる. 仮定より $g'(x)$ は連続であるから, $x=\alpha$ の近傍で $|g'(x)| < 1$ となる. したがって $g(x)$ は縮小写像となる. 条件(6.11)から

$$qx^{q-1} \frac{f(x)}{f'(x)} = k \frac{f(x)}{f^{(q)}(x)} \quad (6.17)$$

が導かれるから, 村瀬・ニュートンの第 2 拡張漸化式は土倉・堀口法となる. $\square$

例 6.7 $f^{(q)}(x_n)$ を $f^{(q)}(x_n)_m$ とする. 炉縁の方程式

$$f(x) = x^3 - 14x^2 + 48 = 0 \quad (6.18)$$

のとき村瀬・ニュートン型の第 2 拡張漸化式は次式となる.

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 - k \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{mx_n - 28} \quad (6.19)$$

$$g(x) = x^2 - k \frac{x^3 - 14x^2 + 48}{mx - 28} \quad (6.20)$$

が縮小写像となる条件は, (6.11)より

$$2x = k \frac{3x^2 - 28x}{mx - 28} \quad (6.21)$$

である. これを解いて $k=2, m=3$ を得る. したがって(6.19)は

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 - 2 \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n - 28} \quad (6.22)$$

となる. これは TH 法

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 - 2x_n \frac{x_n^3 - 14x_n^2 + 48}{3x_n^2 - 28x_n} \quad (6.23)$$

に等しい. 村瀬は漸化式 (1.3), (1.4) を計算して, (1.4) の方が収束が速いことを知っている. さらにこの延長として縮小写像のときの収束の速い漸化式 (6.23) が得られるのである.

定理 6.6 と同様な証明方法で次の定理の十分条件 $k=1$ を得る.

定理 6.8 $f(\alpha)=0$ とする. $g(x)=x^q - qx^{q-1}k \frac{f(x)}{f'(x)}$ (k は 0 でない実数定数) (6.24)

は C^i 級とする. このとき $k=1$ なら $g(x)$ は α の近傍で縮小写像となり, シュレーダー型の拡張漸化式は土倉・堀口法になる.

7. 村瀬義益・ニュートン型の第 1~第 3 拡張漸化式の収束

定理 7.1 (土倉 保) 数列 $\{x_n\}$ において $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ とする. 自然数 i を任意に与える. n が十分大きいとき, 定数 $A, B (A < B)$ が存在して

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{A} |x_n^i - \alpha^i| \quad (i=2, 3, \dots) \quad (7.1)$$

$$|x_n^i - \alpha^i| \leq B |x_n - \alpha| \quad (7.2)$$

となる. すなわち $\{x_n\}$ が α を近似するオーダーと $\{x_n^i\}$ が α^i を近似するオーダーは同一である.

$f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$ (m : 自然数), $h(\alpha) \neq 0$ とする. ここで $m=1$ のとき $f(x)=0$ は単根, $m \geq 2$ のときは m 重根となる. 単根のとき $f'(\alpha) = h(\alpha) \neq 0$, m 重根のとき $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ となる.

A. 村瀬義益・ニュートン型の第 1 拡張漸化式(土倉・堀口法)の収束

定理 7.2 ニュートン法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7.3)$$

は α が単根のとき

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M |x_n - \alpha|^2 \quad (7.4)$$

となる. すなわち 2 次収束する. α が m 重根のとき

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \left(1 - \frac{1}{m}\right) |x_n - \alpha| \quad (7.5)$$

となる. すなわち 1 次収束する.

定理 7.3 q を 2 以上の整数定数, M を正の定数とする. TH 法(土倉・堀口法)

$$x_{n+1}^q = x_n^q - q x_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7.6)$$

$$\text{は, } \alpha \text{ が単根のとき 2 次収束} \quad |x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M |x_n - \alpha|^2 \quad (7.7)$$

となる. α が m 重根のとき

$$M = (1 - \frac{1}{m}) |q \alpha^{q-1}| < 1 \quad (7.8)$$

$$\text{なら 1 次収束} \quad |x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M |x_n - \alpha| \quad (7.9)$$

となる.

証明 $y = f(x)$ を C^i ($i \geq 1$) 級とする. $x^q = t$ とおくと $x = t^{1/q}$ となる.

$$g(t) = f(t^{1/q}) = f(x) \quad (7.10)$$

とすると $g(t)$ も C^i 級となる. $f(\alpha) = 0$ であるから $g(\alpha^q) = 0$ となり, α が $f(x) = 0$ の単根(重根)ならば α^q は $g(t) = 0$ の単根(重根)になる. したがって $g(t) = 0$ のときのニュートン法は α^q が単根のとき 2 次収束し,

$$|t_{n+1} - \alpha^q| < M |t_n - \alpha^q|^2 \quad (M > 0) \quad (7.11)$$

となる. この不等式を x で表すと次の不等式になる.

$$\begin{aligned} |x_{n+1}^q - \alpha^q| &< M |x_n^q - \alpha^q|^2 \\ &< M |x_n^{q-1} + x_n^{q-2} \alpha + \cdots + x_n \alpha^{q-2} + \alpha^{q-1}| |x_n - \alpha|^2 \end{aligned} \quad (7.12)$$

ここで $M |x_n^{q-1} + x_n^{q-2} \alpha + \cdots + x_n \alpha^{q-2} + \alpha^{q-1}|$ を新たに M に置き換えればよい.

$$\alpha^q \text{ が } m \text{ 重根のとき} \quad |t_{n+1} - \alpha^q| < (1 - \frac{1}{m}) |t_n - \alpha^q| \quad (7.13)$$

すなわち

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| < (1 - \frac{1}{m}) |x_n^{q-1} + x_n^{q-2} \alpha + \cdots + x_n \alpha^{q-2} + \alpha^{q-1}| |x_n - \alpha| \quad (7.14)$$

となる. ここで x_n は十分 α に近いから $x_n \doteq \alpha$ となり

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| < (1 - \frac{1}{m}) |q \alpha^{q-1}| |x_n - \alpha| \quad (7.15)$$

となる. したがって $(1 - 1/m) |q \alpha^{q-1}| < 1$ のとき TH 法は 1 次収束する. $\square$

注意 7.4 条件(7.8)およびこのあと出てくる条件(7.21)は方程式の解 α が 0 の近傍にあるときしか使えないという難点がある. これを克服するには次のようにすればよい. 何らかの方法で(例えば関数 $y = f(x)$ のグラフをコンピュータに描かせるような方法で), およその α の値を求め, この近傍で $q(d - c)^{q-1} < 1$ を満たすようなある区間 $c < x < d$ を選んで x の代わりに $x' = x - (c + d)/2$ を新しい変数としてとればよい.

定理 7.1 と 7.3 より次の命題を得る.

命題 7.5 漸化式
$$x_{n+1} = \left(x_n^q - q x_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (7.16)$$

は土倉・堀口法と同じオーダーで収束する.

B. 村瀬義益・ニュートン型の第 2 拡張漸化式の収束

ここの B と次の C において (7.17) は次の 1 次収束を示す番号である.

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M |x_n - \alpha| \quad (0 < M < 1) \quad (7.17)$$

定理 7.6 $f(\alpha)=0$ とする. k を 0 でない実数とする. 村瀬・ニュートン型の第 2 拡張漸化式

$$x_{n+1}^q = x_n^q - k \frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)} \quad (q=1, 2, \dots) \quad (7.18)$$

は $(x_n \rightarrow \alpha$ のとき)
$$|q\alpha^{q-1} - k \frac{f'(\alpha)}{f^{(q)}(\alpha)}| < 1 \quad (7.19)$$

を満たせば (7.17) の 1 次収束をする.

証明概略 $h(x_n) = f(x_n) / f^{(q)}(x_n)$ とおき Taylor の定理を適用する.

注意 7.7 条件 (7.19) の絶対値の中の式から定理 6.6 の条件 (6.11) が得られる.

定理 7.8 α を $f(x)=0$ の $k (\neq 1)$ 重根とする. このとき村瀬・ニュートン型の第 2 拡張漸化式

$$x_{n+1}^q = x_n^q - k \frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)} \quad (q=2, 3, \dots) \quad (7.20)$$

は $(x_n \rightarrow \alpha$ のとき)
$$q|\alpha|^{q-1} < 1 \quad (7.21)$$

を満たせば (7.17) の 1 次収束をする.

証明概略 $f(x) = (x-\alpha)^k h(x)$, $h(\alpha) \neq 0$ とする. $f(x)$ の q 次導関数は

$$\begin{aligned} f^{(q)}(x) = & a_0 (x-\alpha)^{k-q} h(x) + a_1 (x-\alpha)^{k-(q-1)} h'(x) + a_2 (x-\alpha)^{k-(q-2)} h''(x) \\ & + a_3 (x-\alpha)^{k-(q-3)} h'''(x) + \dots + a_{q-1} (x-\alpha)^{k-(q-(q-1))} h^{(q-1)}(x) + (x-\alpha)^k h^{(q)}(x) \end{aligned}$$

となる. 次に $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|x^q - kf(x)/f^{(q)}(x) - \alpha^q|}{|x - \alpha|}$ を求める.

定理 7.8 の漸化式 (7.20) は $q=1$ のときシュレーダー法となり, つぎの定理 7.9 のように 2 次収束する.

C. 村瀬義益・ニュートン型の第 3 拡張漸化式 (シュレーダー型の拡張漸化式) の収束

定理 7.9 シュレーダー法(1870)
$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7.22)$$

は k 重根に2次収束する[3].

定理 7.10 $f(\alpha)=0$ とする. k を0でない実数とする. シュレーダー型の拡張漸化式

$$x_{n+1}^q = x_n^q - q x_n^{q-1} k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (q=1, 2, \dots) \quad (7.23)$$

は $(x_n \rightarrow \alpha$ とするとき)

$$q|\alpha^{q-1}(1-k)| < 1 \quad (7.24)$$

を満たせば, (7.17)の1次収束をする.

証明概略 $h(x_n) = f(x_n)/f'(x_n)$ とおき Taylor の定理を適用する. 次に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^q - q x_n^{q-1} k f(x_n)/f'(x_n) - \alpha^q| / |x_n - \alpha|$$

を求める.

定理 7.11 $f(x)=0$ の k 重零点を α とする. このときシュレーダー型の拡張漸化式

$$x_{n+1}^q = x_n^q - q x_n^{q-1} k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7.25)$$

は $(x_n \rightarrow \alpha$ とするとき) (7.17)の1次収束をする.

証明概略 $f(x) = (x - \alpha)^k h(x)$, $h(\alpha) \neq 0$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1}^q - \alpha^q| / |x_n - \alpha| = 0$$

となる.

謝 辞 東北大学名誉教授 土倉保氏および日本大学名誉教授 山中健氏からご助言を頂きました.ここに厚く御礼申し上げます.

参 考 文 献

- [1] 村瀬義益著・西田知己校注:『算法勿憚改』, 研成社, 1993
- [2] 鈴木武雄:『和算の成立』, 恒星社厚生閣, 2007.7
- [3] 長田直樹:お話:数値解析第10回 非線型方程式(前編)
<http://www.cis.twcu.ac.jp/~osada/rikei/rikei2009-03.pdf>
- [4] 森正武・室田一雄・杉原正顕:『数値計算の基礎』, 岩波書店, 1993.5
- [5] 永坂秀子:『計算機と数値解析』, 朝倉書店, 1980.3
- [6] 戸川隼人:『数値計算法』, コロナ社, 1981.1
- [7] 藤野清次:『数値計算の基礎』, サイエンス社, 1998.2
- [8] 山本哲朗:『数値解析入門[増訂版]』, サイエンス社, 1976.10
- [9] 伊理正夫:『数値計算』, 朝倉書店, 1981.12