

ペッティス集合について

静岡大学 理 松田 稔 (Minoru Matsuda)

§1. 序. この報告は主に、ペッティス集合に関する従来までの諸結果と、最近[3], [4]で得られた結果の紹介を目的として構成されたもので、その主題は、バナッハ空間論に源をもつものである。 X を実バナッハ空間、その共役を X^* とし、 B_X は X の閉単位球を表すことにする。 (Ω, Σ, μ) は完備確率測度空間、 $([0, 1], \Lambda, \lambda)$ は $[0, 1]$ 上のルベーグ測度空間とし、以後 $[0, 1]$ 上には、 Λ と λ が備わっているとする。各 (Ω, Σ, μ) に対して、 $f: \Omega \rightarrow X$ (resp. X^*) が弱 (resp. 弱*) 可測であるとは、 $(x^*, f(\omega))$ (resp. $(x, f(\omega))$) が各 $x \in X$ (resp. $x^* \in X^*$) について μ に関し可測であることをいい、弱可測関数 $f: \Omega \rightarrow X$ がペッティス可積分であるとは、 $(x^*, f(\omega)) \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ (各 $x^* \in X^*$) で、各 $E \in \Sigma$ について $x_E \in X$ が存在して $(x^*, x_E) = \int_E (x^*, f(\omega)) d\mu(\omega)$, $\forall x^* \in X^*$, がみたされる時をいう。もし、 $f: \Omega \rightarrow X^*$ が有界値域をもつ弱*可測関数であるならば、 $T_f(x) = x \circ f$ ($x \in X$) により、 $T_f: X \rightarrow L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ の有界線形写像が得られる。この共役作

用素を $T_f^*(: L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \rightarrow X^*)$ と表す。 T_f の作用素ノルム $= \sup \left\{ \int_\Omega |x \circ f| d\mu : x \in B_X \right\} = \|f\|_p$ と表し、 f の Pettis norm という。 さて、 $\{J_{n,i}\} (n \geq 0, 0 \leq i \leq 2^n - 1)$ を $J_{n,i} = [i/2^n, (i+1)/2^n)$ $(n \geq 1, 0 \leq i \leq 2^n - 2)$, $J_{n,2^n-1} = [(2^n-1)/2^n, 1]$ $(n \geq 0)$ で定義される $[0, 1]$ の区間列とし、 $\Lambda_n (n \geq 1)$ は、 $\Pi_n = \{J_{n-1,i} : 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 1\}$ で生成される σ -algebra とする時、 $f: [0, 1] \rightarrow X^*$ が有界値域をもつ弱*可測関数であるならば、 $f_n(s) = \sum_{A \in \Pi_n} (T_f^*(\chi_A)/\lambda(A)) \chi_A(s)$ で定義される $f_n: [0, 1] \rightarrow X^*$ について、 $(f_n, \Lambda_n)_{n \geq 1}$ はマーチンゲールとなり、以後これを、 f に対応するマーチンゲールと呼ぶ。 又、 X の点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ が tree であるとは $x_n = (x_{2n} + x_{2n+1})/2$ $(n \geq 1)$ がみたされることをいい、正数 δ に対して、 tree $\{x_n\}_{n \geq 1}$ が δ -Rademacher tree とは、 $\left\| \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} (-1)^n x_n \right\| (= \left\| \sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^i x_{2^{m+1}+i} \right\|) \geq 2^m \cdot \delta$ $(\forall m \geq 0)$ がみたされることをいう。

Rosenthal [10] が ℓ_1 を含むバナッハ空間 X (即ち B_X が ℓ_1 -basis に同値な点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ を含む) の特徴付けを与えて以来、 X^* のラドン-ニコディム性の研究にも触発され、それと並行した型での Musiał [5] により定義された弱ラドン-ニコディム性の研究、あるいは、それを一般化、局所化した弱ラドン-ニコディム集合 (WRN set) の研究がなされ、一連の結果が得られている。

定義. X の部分集合 C が WRN set であるとは、各 (Ω, Σ, μ)

と各 $\alpha: \Sigma \rightarrow X$ s.t. $\alpha(E) \in \mu(E) \cdot C$, $\forall E \in \Sigma$ について, λ° ティス可積分関数 $f: \Omega \rightarrow C$ が存在して, $\forall E \in \Sigma$ に対して

$$(x^*, \alpha(E)) = \int_E (x^*, f(\omega)) d\mu(\omega) \quad (\forall x^* \in X^*)$$

がみたされる時をいう。特に B_X が WRN set である時, X は弱ラドン-ニコディム性を持つという。

定義. B_X が $D(CX^*)$ に関して weakly precompact であるとは, $\forall \{x_n\}_{n \geq 1} \subset B_X$ に対して適当に部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ をとれば, $\forall x^* \in D$ について, $\lim_{k \rightarrow \infty} (x^*, x_{n(k)})$ が存在することをいう。

定義. K : compact Hausdorff space, $f: K \rightarrow R$ について, f が Baire-1-function であるとは, $\forall F$: compact $\subset K$ に対して, f の F への制限 $f|_F$ が連続点をもつことをいう。 f が universally measurable であるとは, $\forall \mu$: Radon probability measure on K について, f が μ に関して可測であることをいう。

以上の概念を用いて, $C = K$: 弱*コンパクト凸集合の時の WRN set に関する従来の諸結果 ([9], [6], [11], [8], [12], [1], [2] を参照) を概括したのが, 次である。なお, 以後, 弱*コンパクト集合上には, 弱*位相が備わっていると考える。

定理 A. X^* の弱*コンパクト凸集合 K に関する次の各陳述は, 同値である。

(1) $B_X \subset C(K)$ とみた時, B_X は l_1 -basis に同値な点列を含まない。

- (2) B_X は K に関して weakly precompact.
- (3) $\forall x^{**} \in X^{**}$ は K 上で universally measurable.
- (4) $\forall x^{**} \in X^{**}$ は K 上で Baire-1-function.
- (5) $\forall$ 有界線形写像 $T: L_1([0,1]) \rightarrow X^*$ s.t. $T(\chi_A) \in \lambda(A) \cdot K, \forall A \in \Lambda$ について, $\{T(\chi_A) : A \in \Lambda\}$ は 相対ノルム-コンパクト.
- (6) K は WRN set.
- (7) $\forall f: [0,1] \rightarrow K$, 弱*可測について, f に対応するマーチンゲールは Cauchy in the Pettis norm.
- (8) K が δ -Rademacher tree を含まない.

その後, Talagrand [13] の研究に示唆されて, 凸性のない弱*コンパクト集合について, 定理 A の一般化といえるものが研究された。

定義. X^* の弱*コンパクト集合 K が, ペットィス集合 (Pettis set) であるとは, $\forall x^{**} \in X^{**}$ が K 上で universally measurable である時をいう。

その時, この集合に関する特徴付けが, Talagrand [13], Riddle and Saab [7] 等で得られている。

定理 B. X^* の弱*コンパクト集合 K に関する次の各陳述は, 同値である。

- (1) 定理 A (1) に同じ.
- (2) " (2) " .

- (3) 定理 A (3) に同じ。即ち K は Pettis set.
 (4) " (4) "。
 (5) $\forall f: [0,1] \rightarrow K$, 弱*可測について $\{T_f^*(\chi_A) : A \in \Lambda\}$ は相対ノルム-コンパクト。
 (6) $\overline{\text{co}}^{w*}(K)$ (K の弱*閉凸包) は WRN set.
 (7) 定理 A (7) に同じ。

以上の経過から判断すれば、定理 A の (8) に対応する定理 B の場合の特徴付け、即ち、Pettis set の δ -Rademacher tree による特徴付けが、どんな形で可能であることを考察することは、自然の問題であろう。この事柄に関して我々は、性質 (5) に示唆され、次の形で特徴付けられることを立証した ([3])。

定理 1. X^* の弱*コンパクト集合 K について、 K が Pettis set であるための必要十分条件は、 $\forall f: [0,1] \rightarrow K$, 弱*可測について $\{T_f^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A) > 0, A \in \Lambda\}$ が δ -Rademacher tree を含まないことである。

更に、この結果に示唆され、定理 B の (7) による Pettis set の特徴付けの精密化として、次が得られることを注意する ([4])。

定理 2. X^* の弱*コンパクト集合 K について、 K が Pettis set であるための必要十分条件は、 $\forall f: [0,1] \rightarrow K$, 弱*可測について f に対応するマーチンゲール $(f_n, \mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ が $\inf \{\|f_n - f_{n+1}\|_p : n \geq 1\} = 0$ をみたすことである。

これら二定理に関し、我々が強調すべき、重要で本質的な部分は、 K が non-Pettis setである時に、[0.1]で定義された K -値弱可測関数 h で $\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A) > 0, A \in \Lambda\}$ が δ -Rademacher treeを含むもの、あるいは、 h に対応するマートンゲール $(h_n, \Lambda_n)_{n \geq 1}$ について $\inf \{ \|h_n - h_{n+1}\|_p : n \geq 1 \} > 0$ であるものを構成することであり、以下、その構成の概略を与える。

§2. 準備. ここでは、定理1, 2の証明の過程で必要とされる概念や事実を準備しよう。

K を compact Hausdorff space とする時、 K の互いに素な集合の対の列 $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ が independent であるとは、 $\forall k \geq 1$ と $\forall \{\varepsilon_j\}_{j=1}^k$ ($\varepsilon_j = 1$ or $-1, 1 \leq j \leq k$) について $\bigcap_{j=1}^k \varepsilon_j A_j \neq \emptyset$ (但し、 $\varepsilon_j A_j = A_j$ if $\varepsilon_j = 1, \varepsilon_j A_j = B_j$ if $\varepsilon_j = -1$) であることをいう。もし、 K の互いに素な閉集合の対の列で independent なもの $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ が存在すれば、 $\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$ とおくことにより、我々は K の空でない compact subset Γ を得る。その時、 $\phi: \Gamma \rightarrow \Delta (= \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, Cantor space) を $\phi(z) = \{t_n\}_{n \geq 1}$ (但し、 $t_n = 1$ if $z \in A_n, t_n = 0$ if $z \in B_n$) で定義すれば、 ϕ は連続全射であり、 $\Gamma \cap A_m = \phi^{-1}(U_m)$ かつ $\Gamma \cap B_m = \phi^{-1}(U_m^c)$ (但し、 $U_m = \{t = \{t_n\}_{n \geq 1} \in \Delta : t_m = 1\}$) をみたす。 ϕ が連続全射であることから、Talagrandの結果(1-2-5 in [13])を用いれば、 Γ 上の Radon probability measure γ

で $\phi(\gamma)$ (γ の ϕ による像測度) $= \nu$ (Δ 上の正規化されたハール測度) で $\{f \circ \phi : f \in L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)\} = L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ (但し $\Sigma_\nu, \Sigma_\gamma$ は各々 ν, γ に関して可測な集合全体を表す) をみたすものが存在する。

更に, $\rho: \Delta \rightarrow [0, 1]$ を $\rho(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n / 2^n$ (但し $t = \{t_n\}_{n \geq 1} \in \Delta$) で定義すれば, ρ は $\rho(\nu) = \lambda$ かつ $\{u \circ \rho : u \in L_1([0, 1])\} = L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)$ をみたす連続全射である。

この時, 次の補題を得るのは容易で ([3] を参照). 本質的には, Talagrand [13] の Theorem (7-3-7) の証中에서도示唆されている。

補題. S を $S(u) = u \circ \rho \circ \phi$ ($u \in L_1([0, 1])$) で定義される線形写像とすれば, 次の事柄が成り立つ。

(a) S は $L_1([0, 1])$ から $L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ への全射距離同型写像である。

(b) 任意の $g \in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ について, $S^*(g)(\rho(\phi(z))) = g(z)$, γ -a.e. (但し S^* は S の共役)。

(c) 任意の $g_1, g_2 \in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ について, $S^*(g_1 \cdot g_2) = S^*(g_1) \cdot S^*(g_2)$ in $L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$.

§3. 定理 1, 2 の証明の概略. §1 で注意したように, 次の 2 つの事柄 (A), (B) が, 定理 1, 2 における証明の中核をなすので, これらの証明の概略を与えることにしよう。

(A) K が non-Pettis set の時、弱*可測関数 $h: [0, 1] \rightarrow K$ で、
 $\{T_\lambda^*(x_A)/\lambda(A) : \lambda(A) > 0, A \in \mathcal{A}\}$ が δ -Rademacher tree を含むものを
 構成すること。

(B) K が non-Pettis set の時、弱*可測関数 $h: [0, 1] \rightarrow K$ で、
 h に対応するマーチンゲール $(h_n, \mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ について $\inf\{\|h_n - h_{n+1}\|_p : n \geq 1\} > 0$ であるものを構成すること。

結論からいえば、(A) で得られた関数 h が、実は (B) もみたす
 訳であるが、以下、関数 h の構成と、それが (A), (B) を述べら
 れた性質を有することを注意しよう。

(α) 関数 h の構成について。 K を non-Pettis set とすれば、
 §1 で述べた定理 B の同値関係を利用することにより、 B_X は
 K に関して weakly precompact でないから、 $\exists \{x_n\}_{n \geq 1} \subset B_X$ s.t. $\{x_n\}_{n \geq 1}$
 のどんな部分列も、 K 上で各点収束列ではないことを得る。
 このことに Rosenthal の議論を利用すれば、 $\exists \{x_{n(k)}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1}$,
 $\exists r \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0$ s.t. $A_k = \{x^* \in K : (x^*, x_{n(k)}) \leq r\}$, $B_k = \{x^* \in K : (x^*, x_{n(k)}) \geq r + 2\eta\}$ について、 $(A_k, B_k)_{k \geq 1}$ は K の閉集合から
 なる independent sequence。従って、§2 で注意したように、
 $\Gamma = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k \cup B_k)$ とおけば、 Γ は K に含まれるコンパクトで
 あり、補題から、完備確率測度空間 $(\Gamma, \Sigma_\Gamma, \gamma)$ と全射距離同
 型線形写像 $S: L_1([0, 1]) \rightarrow L_1(\Gamma, \Sigma_\Gamma, \gamma)$ が存在し、 $S^*(g)(\rho(\phi(x^*)))$
 $= g(x^*)$, γ -a.e. ($\forall g \in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\Gamma, \gamma)$) が成り立つことがわか

る。

さて、各 $x \in B_x$ について $f_x(x^*) = (x^*, x)$ ($x^* \in \Gamma$) で定義される Γ 上の連続関数を考える。又、 ℓ を $L_\infty([0, 1])$ の lifting とする。そして、各 $\lambda \in [0, 1]$ について $C(\Gamma)$ (Γ 上で定義された実数値連続関数の作る Banach space) 上で定義される有界線形汎関数 $L_\lambda(f) = \ell(S^*(f))(\lambda)$ を考えよ。その時、補題から L_λ は multiplicative であるから $L_\lambda(f) = f(x^*)$, $\forall f \in C(\Gamma)$, をみたす Γ の点 x^* が唯一存在する。従って、 $h: [0, 1] \rightarrow \Gamma$ を $h(\lambda) = x^*$ ($\lambda \in [0, 1]$) で定義すれば、 h は K -値であり、 $f(h(\lambda)) = \ell(S^*(f))(\lambda)$, $\forall f \in C(\Gamma)$, が成り立つ。よって、特に、 $f_x(h(\lambda)) = \ell(S^*(f_x))(\lambda)$, $\forall x \in B_x$, であるから、 $(x, h(\lambda)) = \ell(S^*(f_x))(\lambda)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, が成り立ち、 h は弱可測である。このようにして K -値弱可測関数 h が構成された。

(B) $\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A) > 0, A \in \Lambda\}$ が δ -Rademacher tree を含むこと。そのために、まず各 $A \in \Lambda$ について

$$\begin{aligned} \int_A (x, h(\lambda)) d\lambda(\lambda) &= \int_A \ell(S^*(f_x))(\lambda) d\lambda(\lambda) = \int_A S^*(f_x)(\lambda) d\lambda(\lambda) \\ &= \int_A S^*(f_x)(\lambda) d(p(\phi(\lambda)))(\lambda) = \int_{\phi^{-1}(p^{-1}(A))} S^*(f_x)(p(\phi(x^*))) d\delta(x^*) \\ &= \int_{\phi^{-1}(p^{-1}(A))} f_x(x^*) d\delta(x^*) \quad (\text{補題の (b) を用いた}) = \int_{\phi^{-1}(p^{-1}(A))} (x^*, x) d\delta(x^*) \end{aligned}$$

であることを注意する。

次に、 $\alpha(A) = T_h^*(X_A)$ ($A \in \Lambda$) とすれば、 $\alpha: \Lambda \rightarrow X^*$ はバウト
ル値尺度である。よって、 $I_{m,i} = [i/2^m, (i+1)/2^m]$ ($m \geq 0, 0 \leq i \leq 2^m - 1$)
について、 $x_{2^m+i}^* = 2^m \alpha(I_{m,i})$ ($m \geq 0, 0 \leq i \leq 2^m - 1$) とおけば、
 α の測度性より、 $\{x_n^*\}_{n=1}$ が tree であること、しかも $\{x_n^*\}_{n=1}$
 $\subset \{T_h^*(X_A)/\lambda(A) : \lambda(A) > 0, A \in \Lambda\}$ であることは明らかであるか
ら、 $\{x_n^*\}_{n=1}$ が適当な正数 δ に対し、 δ -Rademacher tree を
含むことを示せばよい。

そのために、 $\{I_{m,i}\}$ ($m \geq 0, 0 \leq i \leq 2^m - 1$) の番号付けを次のよう
に改めることにする。 $I_{0,0} = I (= [0, 1])$, $I_{1,0} = I(0)$, $I_{1,1} = I(1)$,
 $I_{2,0} = I(0,0)$, $I_{2,1} = I(0,1)$, $I_{2,2} = I(1,0)$, $I_{2,3} = I(1,1)$ 等々。即ち、
 $I_{2^m,0} = I$ であり、もし $I_{m,i} = I(a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)})$ ($m \geq 1, 0 \leq i \leq 2^m - 1$)
ならば $I_{m+1,2i} = I(a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}, 0)$ かつ $I_{m+1,2i+1} = I(a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}, 1)$ 。
但し $\{a_j^{(i)}\}_{1 \leq j \leq m}$ は 0 と 1 からなる数列で、 $\{(a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}) : 0 \leq i \leq 2^m - 1\}$
 $= \{(a_1, \dots, a_m) : a_j = 0 \text{ or } 1\}$ を与えた。その時、0 と 1 の数列
 $\{a_j\}_{1 \leq j \leq m}$ について、 $\bigcup_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap \bigcup_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_m} = \rho^{-1}(I(a_1, \dots, a_m))$ (但し $a_j = 1$
の時 $\varepsilon_j = 1$ かつ $a_j = 0$ の時 $\varepsilon_j = c$ (補集合) とする) が成り
立つ。従って、 α の定義と、最初に示した等式から、0 と 1
からなる数列 $\{a_j\}_{1 \leq j \leq m}$ と $x \in X$ について、

$$(\alpha(I(a_1, \dots, a_m)), x) = \int_{I(a_1, \dots, a_m)} (x, h(\lambda)) d\lambda(\lambda) = \int_{\rho^{-1}(\rho(I(a_1, \dots, a_m)))} (x^*, x) d\gamma(x^*)$$

$$= \int_{\phi^{-1}(U_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap U_m^{\varepsilon_m})} (x^*, x) d\gamma(x^*)$$

が成り立つ。このことから、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^m-1} (\alpha(I(a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}, 0)), x_{n(m+1)}) \\ &= \int_{\phi^{-1}(U_{m+1}^c)} (x^*, x_{n(m+1)}) d\gamma(x^*) = \int_{\Gamma \cap B_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)}) d\gamma(x^*) \end{aligned}$$

及び、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^m-1} (\alpha(I(a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}, 1)), x_{n(m+1)}) \\ &= \int_{\phi^{-1}(U_{m+1})} (x^*, x_{n(m+1)}) d\gamma(x^*) = \int_{\Gamma \cap A_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)}) d\gamma(x^*) \end{aligned}$$

が得られる。従って、各 $m \geq 0$ について

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=0}^{2^{m+1}-1} (-1)^i x_{2^{m+1}+i}^* \right\| \\ & \geq \left(\sum_{i=0}^{2^{m+1}-1} (-1)^i x_{2^{m+1}+i}^*, x_{n(m+1)} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{2^m-1} (x_{2^{m+1}+2i}^*, x_{n(m+1)}) - \sum_{i=0}^{2^m-1} (x_{2^{m+1}+2i+1}^*, x_{n(m+1)}) \\ &= 2^{m+1} \left(\int_{\Gamma \cap B_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)}) d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma \cap A_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)}) d\gamma(x^*) \right) \end{aligned}$$

$$\geq 2^{m+1} \{ (r+2\eta)/2 - \varepsilon/2 \} = 2^{m+1} \eta$$

が成り立つ。よって $x_i^* \neq 0$ ならば、 $\delta = \min \{ \|x_i^*\|, \eta \}$ とおけば、 $\{x_n^*\}_{n \geq 1}$ 自身が δ -Rademacher tree である。次に $x_i^* = 0$ ならば、今示した不等式の $m=0$ の場合から $\|x_2^* - x_3^*\| \geq 2\eta$ であるから、一般性を失うことなく、 $x_2^* (=d([0, 1/2])) \neq 0$ としよ。そして $\{L_{m,i}\} (m \geq 0, 0 \leq i \leq 2^m - 1)$ を $L_{m,i} = [i/2^{m+1}, (i+1)/2^{m+1}]$ によって与えられる $[0, 1/2]$ の閉区間の列としよう。その時、 $y_{2^{m+1}+i}^* = 2^{m+1} \cdot d(L_{m,i}) (m \geq 0, 0 \leq i \leq 2^m - 1)$ とおけば、 $\{y_n^*\}_{n \geq 1}$ は $\{x_n^*\}_{n \geq 1}$ の部分列の作る tree であり、しかも $\delta = \min \{ \|x_2^*\|, \eta \}$ とおけば、先と同様の議論により、 $m \geq 0$ について

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^{m+1}-1} (-1)^i y_{2^{m+1}+i}^* \right\| \geq 2^{m+1} \eta \geq 2^{m+1} \delta$$

かつ、 $\|y_n^*\| \geq \delta$ が示されるから、 $\{y_n^*\}_{n \geq 1}$ は δ -Rademacher tree である。

以上から、 $\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A) > 0, A \in \Lambda\}$ は適当な正数 δ に対して、 δ -Rademacher tree を含むことが立証された。最後は、この h に対応するマングーレル $(h_m, \Lambda_m)_{m \geq 1}$ について

(*) $\inf \{ \|h_m - h_{m+1}\|_p : m \geq 1 \} > 0$ であること。そのために各 $m (\geq 1)$ について、

$$a_{m,i} = \int_{J_{m,2i}} |(\chi_{n(m)}, h_m(t)) - (\chi_{n(m)}, h_{m+1}(t))| d\lambda(t)$$

かつ

$$b_{m,i} = \int_{J_{m,2i+1}} |(x_{n(m)}, h_m(t)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(t))| d\lambda(t)$$

(但、 $0 \leq i \leq 2^{m-1}-1$) とおこう。そして $\Delta \in J_{m,2i}$ ($0 \leq i \leq 2^{m-1}-1$) をとれ。その時、

$$\begin{aligned} & (x_{n(m)}, h_m(s)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(s)) \\ &= 2^{m-1} \int_{J_{m-1,i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - 2^m \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) \\ &= 2^{m-1} \left\{ \int_{J_{m-1,i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - 2 \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) \right\} \\ &= 2^{m-1} \left\{ \int_{J_{m,2i+1}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) \right\} \end{aligned}$$

が成り立つから、各 i (但、 $0 \leq i \leq 2^{m-1}-1$) について

$$a_{m,i} \geq \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \int_{J_{m,2i+1}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) \right\}$$

である。従って (B) と同様の議論から、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} a_{m,i} \\ & \geq \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} \left\{ \int_{J_{m,2i+1}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} \left\{ \int_{I_{m,2i+1}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - \int_{I_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) \right\} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \int_{\Gamma \cap B_m} (x^*, x_{n(m)}) d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma \cap A_m} (x^*, x_{n(m)}) d\gamma(x^*) \right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ。又、 $b_{m,i}$ に関しても同様の議論から、

$$\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} b_{m,i} \geq \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \int_{\Gamma \cap B_m} (x^*, x_{n(m)}) d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma \cap A_m} (x^*, x_{n(m)}) d\gamma(x^*) \right\}$$

が成り立つから、これらを用いて、

$$\|h_m - h_{m+1}\|_p$$

$$\geq \int_{[0,1]} |(x_{n(m)}, h_m(t)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(t))| d\lambda(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} \int_{J_{m-1,i}} |(x_{n(m)}, h_m(t)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(t))| d\lambda(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} a_{m,i} + \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} b_{m,i}$$

$$\geq \int_{\Gamma \cap B_m} (x^*, x_{n(m)}) d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma \cap A_m} (x^*, x_{n(m)}) d\gamma(x^*)$$

$$\geq (\varepsilon + 2\eta)/2 - \varepsilon/2 = \eta$$

が得られる。即ち、 $\inf \{\|h_m - h_{m+1}\|_p : m \geq 1\} \geq \eta > 0$ であり、

要求された結果である。

References

- [1] M. Matsuda, On Saab's characterizations of weak Radon-Nikodym sets, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21(1985), 921-941.
- [2] M. Matsuda, A characterization of weak Radon-Nikodym sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 22(1986), 551-559.
- [3] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 26(1991), 827-836.
- [4] M. Matsuda, A characterization of non-Pettis sets in terms of martingales, Preprint.
- [5] K. Musial, The weak Radon-Nikodym property in Banach spaces, Studia Math., 64(1978), 151-174.
- [6] L. H. Riddle, The geometry of weak Radon-Nikodym sets in dual Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 86(1982), 433-438.
- [7] L. H. Riddle and E. Saab, On functions that are universally Pettis integrable, Illinois J. Math., 29(1985), 509-531.
- [8] L. H. Riddle, E. Saab and J. J. Uhl, Jr, Sets with the weak Radon-Nikodym property in dual Banach spaces, Indiana Univ. Math. J., 32(1983), 527-541.
- [9] L. H. Riddle and J. J. Uhl, Jr, Martingales and the fine line between Asplund spaces and spaces not containing a copy of l_1 , Lecture Notes in Math., Springer, 939(1981), 145-156.
- [10] H. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing l_1 , Proc. Nat. Acad. Sci., 71(1974), 2411-2413.
- [11] E. Saab, Some characterizations of weak Radon-Nikodym sets, Proc. Amer. Math. Soc., 86(1982), 307-311.
- [12] E. Saab and P. Saab, A dual geometric characterization of Banach spaces not containing l_1 , Pacif. J. Math., 105(1983), 415-425.
- [13] M. Talagrand, Pettis integral and measure theory, Memoirs of the A.M.S., 307(1984).