

## 二層流体中を伝播する界面孤立波の線形安定性

神戸大学・工学部・機械工学科 片岡 武 (Takeshi Kataoka)

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering  
Kobe University

### 1. 問題設定と基礎方程式

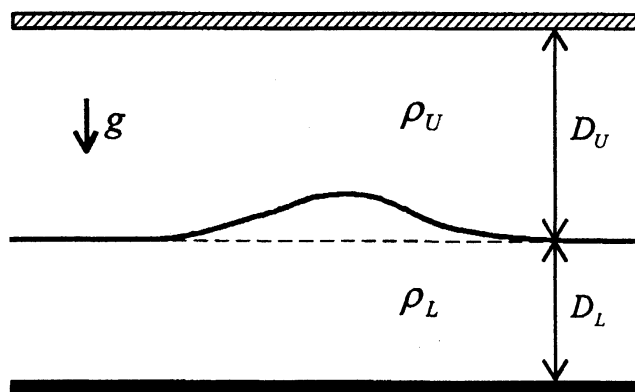


図1 二層流体の概略図

一様な重力加速度  $g$  が働く系において、無限に広い2枚の水平平板により挟まれた非圧縮性完全流体を考える。この流体はそれぞれが均質な互いに密度の異なる2流体が重なり合って構成され、上層の流体は密度  $\rho_U$  で平均深さが  $D_U$ 、下層の流体は密度  $\rho_L (> \rho_U)$  で平均深さが  $D_L$  であるとする(図1参照)。これ以降、変数はすべて  $g, D_L, \rho_L$  により無次元化したものを使う。解析の便宜上、これら2層の境界面(界面)の平均深さが  $y=0$  にあるものとしよう。つまり下板と上板がそれぞれ  $y=-1$  と  $y=D(\equiv D_U/D_L)$  にあることになる。そして水平1方向に  $x$  座標をとったときの  $x-y$  面内の空間2次元流れを考えよう。界面を除く各層内の流れは渦なしであると仮定すれば、上層、下層の流体に対してそれぞれ速度ポテンシャル  $\phi_U(x, y, t)$  ( $t$  は時間)、 $\phi_L(x, y, t)$  を導入でき、連続の式よりそれぞれが Laplace 方程式:

$$\Delta \phi_U = 0 \quad (\text{上層流体に対して}) \quad (1)$$

$$\Delta \phi_L = 0 \quad (\text{下層流体に対して}) \quad (2)$$

を満たさなければならない。ただし  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 。境界条件は、 $\eta(x, t)$  を界面の鉛直変位とすると、

$$\frac{\partial \phi_U}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = D, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_U}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_U}{\partial y} \quad \text{at } y = \eta, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_L}{\partial y} \quad \text{at } y = \eta, \quad (5)$$

$$-\rho \left\{ \frac{\partial \phi_U}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_U}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\partial \phi_L}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_L}{\partial y} \right)^2 \right] + (1-\rho)\eta = f(t) \quad \text{at } y=\eta, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=-1. \quad (7)$$

ただし,  $f(t)$  は(6)の左辺を  $x \rightarrow \infty$  で評価した値であり,

$$\rho = \rho_U / \rho_L, \quad D = D_U / D_L, \quad (8)$$

はそれぞれ二層流体の密度比と深さ比である.

方程式系(1)-(7)の解として次の形のものを考える:

$$\phi_U = -vx + \Phi_U(x, y), \quad \phi_L = -vx + \Phi_L(x, y), \quad \eta = \eta_I(x), \quad (9)$$

ただし  $\partial \Phi_U / \partial x$ ,  $\partial \Phi_U / \partial y$ ,  $\partial \Phi_L / \partial x$ ,  $\partial \Phi_L / \partial y$ ,  $\eta_I$  はいずれも  $x \rightarrow \pm\infty$  で零に近づき,  $v$  は正のパラメータ. この解は, 空間的に局所的な変動がその形を崩すことなく一定速さ  $v$  で伝播する現象を, その変動とともに動く座標系で眺めたものである. 局所的な変動が伝播する現象を表すこの解(9)のことを, 孤立波解と呼ぼう.

いま, この孤立波解(9)の線形安定性を調べる. そのため(1)-(7)の解を孤立波解(9)と微小攪乱との和で

$$\begin{aligned} \phi_U &= -vx + \Phi_U + \hat{\phi}_U(x, y) \exp(\lambda t), \\ \phi_L &= -vx + \Phi_L + \hat{\phi}_L(x, y) \exp(\lambda t), \\ \eta &= \eta_I + \hat{\eta}(x) \exp(\lambda t), \end{aligned} \quad (10)$$

とあらわす. ここに  $\lambda$  は未知の複素定数. (10)を(1)-(7)に代入し,  $(\hat{\phi}_U, \hat{\phi}_L, \hat{\eta})$  に関して線形化し,  $x$  に関して局所的であるという条件を課すと,  $(\hat{\phi}_U, \hat{\phi}_L, \hat{\eta})$  に対する以下の線形方程式系が得られる:

$$\Delta \hat{\phi}_U = 0 \quad (\text{上層流体に対して}) \quad (11)$$

$$\Delta \hat{\phi}_L = 0 \quad (\text{下層流体に対して}) \quad (12)$$

境界条件は,

$$\frac{\partial \hat{\phi}_U}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=D, \quad (13)$$

$$L_U[\hat{\phi}_U, \hat{\eta}] = -\lambda \hat{\eta} \quad \text{at } y=\eta_I, \quad (14)$$

$$L_L[\hat{\phi}_L, \hat{\eta}] = -\lambda \hat{\eta} \quad \text{at } y=\eta_I, \quad (15)$$

$$L_I[\hat{\phi}_U, \hat{\phi}_L, \hat{\eta}] = \lambda(\rho \hat{\phi}_U - \hat{\phi}_L) \quad \text{at } y=\eta_I, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_L}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=-1, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_U}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \hat{\phi}_U}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \hat{\phi}_L}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \hat{\phi}_L}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \hat{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty, \quad (18)$$

ここに  $L_U$ ,  $L_L$ ,  $L_I$  は次式で定義される線形作用素である.

$$L_U[\hat{\phi}_U, \hat{\eta}] = \left( -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{d\eta_I}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi}_U + \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial x \partial y} \frac{d\eta_I}{dx} \right) + \left( -v + \frac{\partial \Phi_U}{\partial x} \right) \frac{d}{dx} \right] \hat{\eta}, \quad (19)$$

$$L_L[\hat{\phi}_L, \hat{\eta}] = \left( -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{d\eta_I}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi}_L + \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x \partial y} \frac{d\eta_I}{dx} \right) + \left( -v + \frac{\partial \Phi_L}{\partial x} \right) \frac{d}{dx} \right] \hat{\eta}, \quad (20)$$

$$L_I[\hat{\phi}_U, \hat{\phi}_L, \hat{\eta}] = -\rho \left[ \left( -v + \frac{\partial \Phi_U}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right] \hat{\phi}_U + \left[ \left( -v + \frac{\partial \Phi_L}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_L}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right] \hat{\phi}_L \\ + \left\{ -\rho \left[ \left( -v + \frac{\partial \Phi_U}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi_U}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial y^2} \right] + \left( -v + \frac{\partial \Phi_L}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi_L}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial y^2} + 1 - \rho \right\} \hat{\eta}. \quad (21)$$

方程式系(11)-(18)は、 $\lambda$ を固有値とする固有値問題である。もし、 $\lambda$ が正の実部をもつような解があれば、その孤立波は不安定である。

後の議論の便宜上、孤立波の特性を定義しておこう。波高 $h(>0)$ 、上層流体の運動エネルギー $T_U$ 、下層流体の運動エネルギー $T_L$ 、(全)エネルギー $E$ 、総変位 $M$ は、

$$h \equiv \max |\eta_I|, \quad T_U = \frac{\rho}{2} \int \int_{\text{whole upper-fluid domain}} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_U}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (22)$$

$$T_L = \frac{1}{2} \int \int_{\text{whole lower-fluid domain}} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_L}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_L}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad E = T_U + T_L + \frac{1-\rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I^2 dx, \quad M = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I dx,$$

により定義される。

## 2. 漸近解析

**命題：**孤立波解 $(\Phi_U, \Phi_L, \eta_I)$ が分岐しないと仮定する。このとき安定性交換は、孤立波のエネルギー $E$ が伝播速さ $v$ の関数として、停留値( $dE/dv=0$ )となるたびに起こり、かつそのときにのみ起こる。正の実部をもつ固有値の解は、次の不等式を満たす側に存在する：

$$\sigma \frac{dE}{dv} > 0, \quad (23)$$

ただし、

$$\sigma = \frac{dM}{dv} \frac{d\Omega}{dv}, \quad \Omega = \frac{2}{v} \left( T_L - \frac{T_U}{D} \right) - \left( 1 + \frac{\rho}{D} \right) v M. \quad (24)$$

[命題終]

固有値問題(11)-(18)の解の $|\lambda| \rightarrow 0$ の漸近的振舞を調べることにより、本命題を証明することができる。紙面の都合上、その詳細については Kataoka (2006)を参照されたい。

## 3. 線形安定性の基準

2節で示した命題をもとにして、安定性交換に起因する界面孤立波の線形安定性を以下のようにしてまとめることができる。

<仮定>

孤立波解は分岐しない。

<安定性交換に起因する界面孤立波の安定性>

$\rho$ と $D$ の値を固定して、孤立波解を微小な波高 $h$ から大きな波高 $h$ へと順にたどっていく。最初に $dE/dv=0$ となるまでの孤立波は安定である。 $dE/dv=0$ の点を過ぎる

と、孤立波は1つの成長攪乱モードをもち、線形不安定となる。さらに続く  $dE/dv=0$  の点を過ぎると、過ぎた後の  $\sigma dE/dv$  の符号によって成長攪乱モードの数の増減が決まる。符号が正なら成長攪乱モードの数は1つ増加し、負ならば1つ減少する。

#### 4. 表面孤立波の安定性

まずは表面孤立波 ( $\rho=0$ ) の安定性を、3節で提示した安定性基準をもとにして調べよう。表面孤立波のエネルギー  $E$  を伝播速さ  $v$  の関数として示したものが、図2(a)の破線である。エネルギーの停留点  $dE/dv=0$  は最初、 $h=0.781$  で現れることがわかる。よって、安定性交換は最初  $h=0.781$  において起きる。続く  $E$  の停留点は、図2(a)の左下部にある長方形領域を拡大した図(図2(b))によると、 $h=0.830$  で現れる。この点を通過直後の  $\sigma dE/dv$  の符号は正であることから、 $h=0.830$  を超えると2つの成長攪乱モードをもつ。表面孤立波の線形安定性に関するこれらの結果は、いずれも過去の数値的研究(Tanaka 1986; Longuet-Higgins & Tanaka 1997)と完全に一致する。

#### 5. 界面孤立波の安定性

具体的な界面孤立波の安定性を調べよう。界面孤立波解の数値解法は、Turner & Vanden-Broeck (1988)に従った。過去の研究(Funakoshi & Oikawa 1986; Amick & Turner 1986)によると、界面孤立波の形状はパラメータ  $\rho$  と  $D$  に依存して大きく変わる。つまり  $\rho < D^2$  のときには上に凸となり、 $\rho > D^2$  のときには下に凸となる。5.1節で前者(上に凸)を、5.2節で後者(下に凸)を扱う。

##### 5.1 上に凸の孤立波

$D=1$  と  $D=10$  の場合を考える。

###### (i) $D=1$

図2(a)は、 $D=1$ における界面孤立波のエネルギー  $E$  を伝播速さ  $v$  の関数として示したものである。罰点(×)が最初の  $dE/dv=0$  の点、白丸(○)が2番目の  $dE/dv=0$  の点であり、○を通過直後の  $\sigma dE/dv$  の符号を括弧内( )に記した。この図より、 $\rho \leq 0.0006$  のときはエネルギーの停留点  $dE/dv=0$  が現れるが、 $\rho \geq 0.0007$  では現れない。この間の密度比  $0.0006 \leq \rho \leq 0.0007$  における  $E$  の分布の様子をより詳細に見るため、右上部の長方形領域を拡大した図を図2(c)に示した。これによると、 $\rho \leq 0.00062$  では  $dE/dv=0$  の点が現れ、 $\rho \geq 0.00064$  では現れない。とくに、 $\rho=0.0006$  と  $0.00062$  の場合においては2番目の停留点  $dE/dv=0$  も存在し、この点を通過直後の  $\sigma dE/dv$  の符号が負となっている。3節で示した安定性の基準によると、これらの孤立波は2番目の停留点において再安定化する、ということになる。(例えば  $\rho=0.0006$  の場合には、 $h=0.890$  で再安定化する)

この再安定化の事実を確認するため、固有値問題(11)-(18)を数値的に解いた結果を図3に示した。罰点(×)が  $\rho=0.0006$  の場合に得られた固有値  $\lambda$  を示したものである。 $\lambda$  は  $h=0.837$  を超えると正値をとり、孤立波は不安定となるが、 $h=0.89$  で再び  $\lambda=0$  に戻り、再安定化することがわかる。つまり前段落最後に述べた安定性の結果(3節の安定性基準をもとにした安定性の結果)と完全に一致する。

###### (ii) $D=10$

$D=10$ における界面孤立波 ( $\rho=0.05, 0.1, 0.15, 0.21$ ) のエネルギー  $E$  を伝播速さ  $v$  の

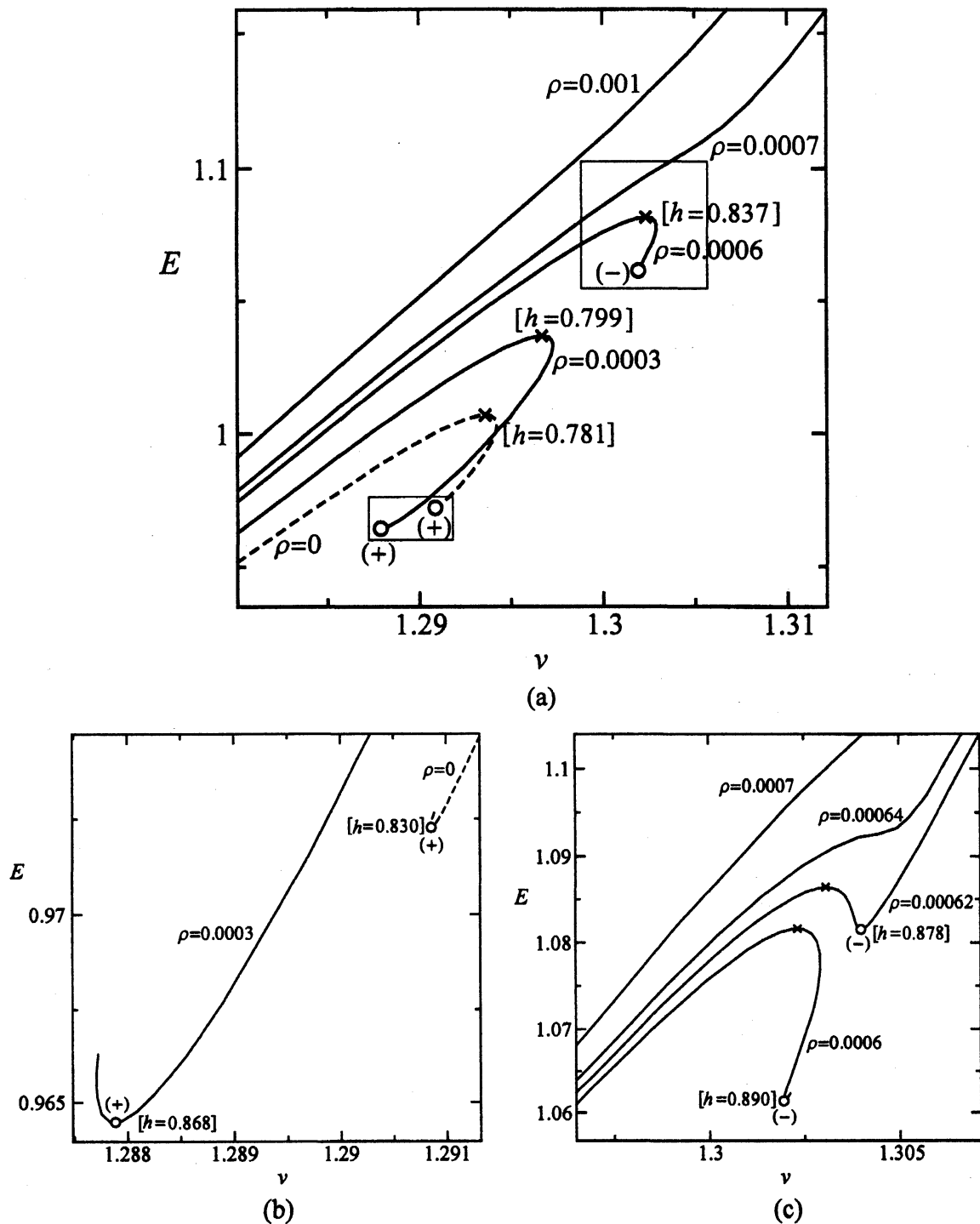


図2 表面孤立波[ $\rho=0$  (破線)]と界面孤立波[ $D=1$ ,  $\rho=0.0003$ ,  $0.0006$ ,  $0.0007$ ,  $0.001$  (実線)]に対するエネルギー  $E$  と伝播速さ  $v$  の関係. 罰点 ( $\times$ ) が最初の  $dE/dv=0$  の点を示し, 対応する波高  $h$  を括弧 [ ] 内に記した. 白丸 ( $\circ$ ) が2番目の  $dE/dv=0$  の点であり, この点を過ぎた直後の  $\sigma dE/dv$  の符号を合わせて括弧内 ( ) に示した. (a) 全体図. (b) 左下の長方形領域の拡大図. (c) 右上長方形領域の拡大図で,  $\rho=0.00062$ ,  $0.00064$  の図を加えたもの. (b) と (c) の図には, 2番目の  $dE/dv=0$  の点における波高  $h$  も合わせて括弧 [ ] 内に記した.

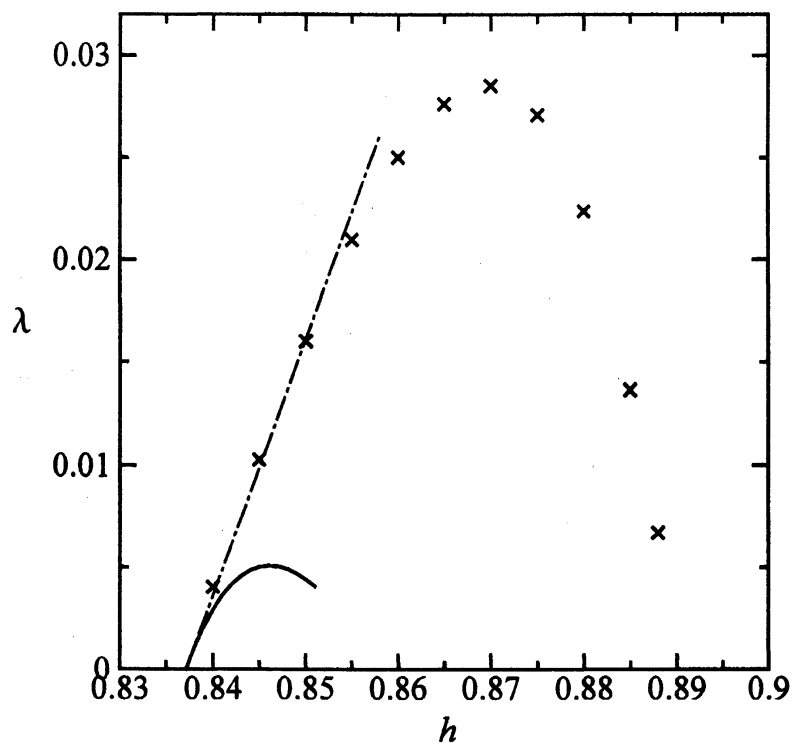


図 3 界面孤立波( $D=1$ ,  $\rho=0.0006$ )に対する不安定モードの成長率 $\lambda$ と波高 $h$ との関係. 点 (×) が数値結果. 実線は理論解( ), 一点鎖線は臨界波高 $h=0.837$ における理論解の接線.

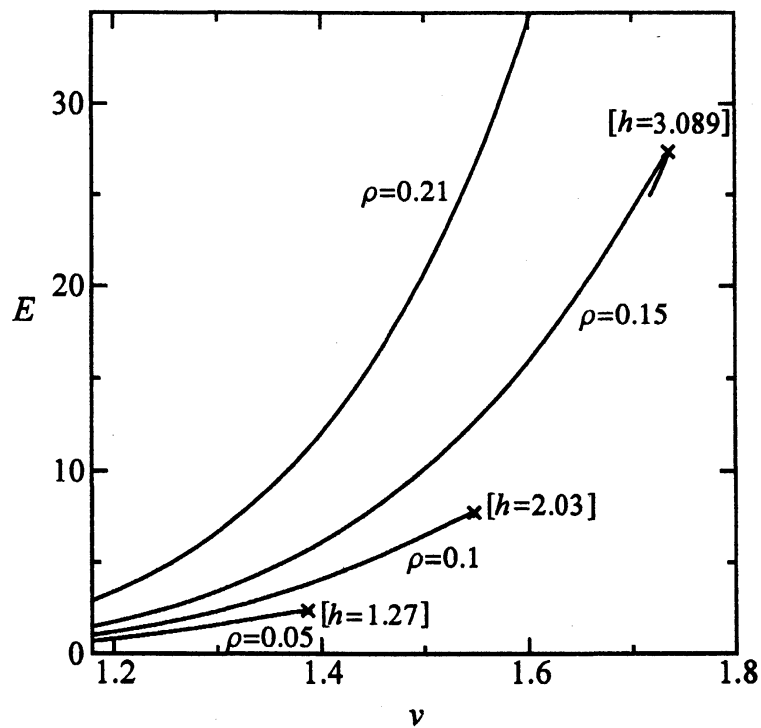


図 4 界面孤立波( $D=10$ ,  $\rho=0.05, 0.1, 0.15, 0.21$ )に対するエネルギー $E$ と伝播速さ $v$ の関係. 点 (×) が $dE/dv=0$ の点を示し, 対応する波高 $h$ を括弧[ ]内に記した.

関数として図 4 に示した.  $\rho \leq 0.19$  ではエネルギーの停留点  $dE/dv=0$  が現れるが,  $\rho \geq 0.21$  では現れなかった. つまり  $\rho \leq 0.19$  の孤立波は, 最初の停留点  $dE/dv=0$  において安定性交換が起き,  $\rho \geq 0.21$  の孤立波は常に安定性交換が起きない. とくに  $\rho = 0.15$  の場合,  $h = 3.089$  において安定性交換が起きることになる.

一方,  $\rho = 0.15$  の場合について, 固有値問題(11)-(18)を数値的に解いて得られた固有値  $\lambda$  を図 5 に示した.  $h = 3.089$  において安定性交換が起きるという上の結果とよく一致していることがわかる. 図 6 には,  $\rho = 0.15$  の孤立波の界面形状を, 波高が  $h = 2.80, 2.90, 3.00$  の 3 ケースについて示した. いずれも安定性交換が起きる波高  $h = 3.089$  よりも小さい場合である. それにもかかわらず,  $h \geq 2.90$  において孤立波の界面がせりだした形となっている. せりだした部分では軽い上層流体が重い下層流体の下にもぐりこむので, 局所的に不安定なはずである. この不安定性は, 安定性交換とは異なる種類の不安定性であると予想される. つまり, 固有値  $\lambda$  が零でない虚部をもつ場合である. この種の不安定性に関しては, 今後, 数値的に詳しく調べる必要がある.

## 5.2 下に凸の孤立波

下に凸の孤立波は, 調べた範囲ではすべてそのエネルギー  $E$  が停留値をとらなかった. つまり安定性交換が起きないようである.

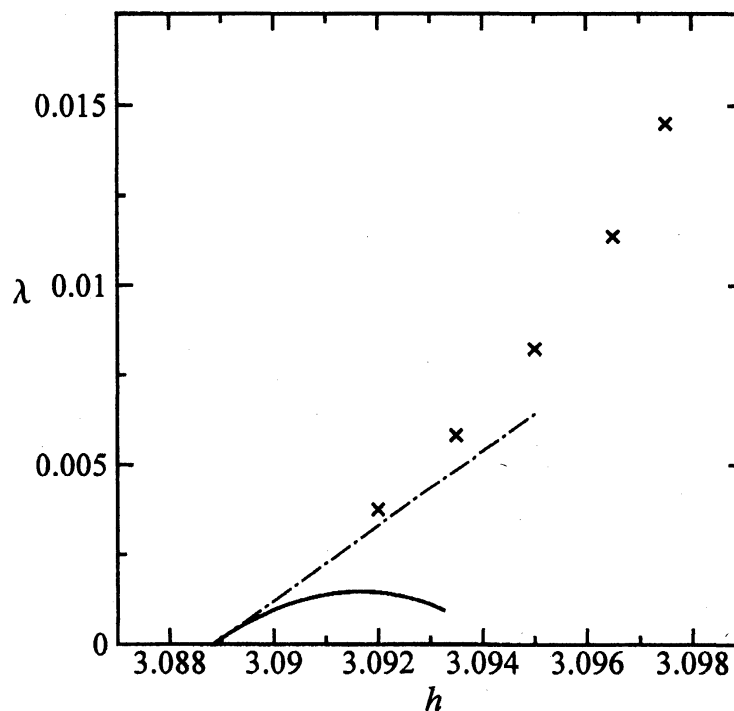


図 5 界面孤立波( $D=10, \rho=0.15$ )に対する不安定モードの成長率  $\lambda$  と波高  $h$  との関係. 罰点 (×) が数値結果. 実線は理論解( ), 一点鎖線は臨界波高  $h = 3.089$  における理論解の接線.

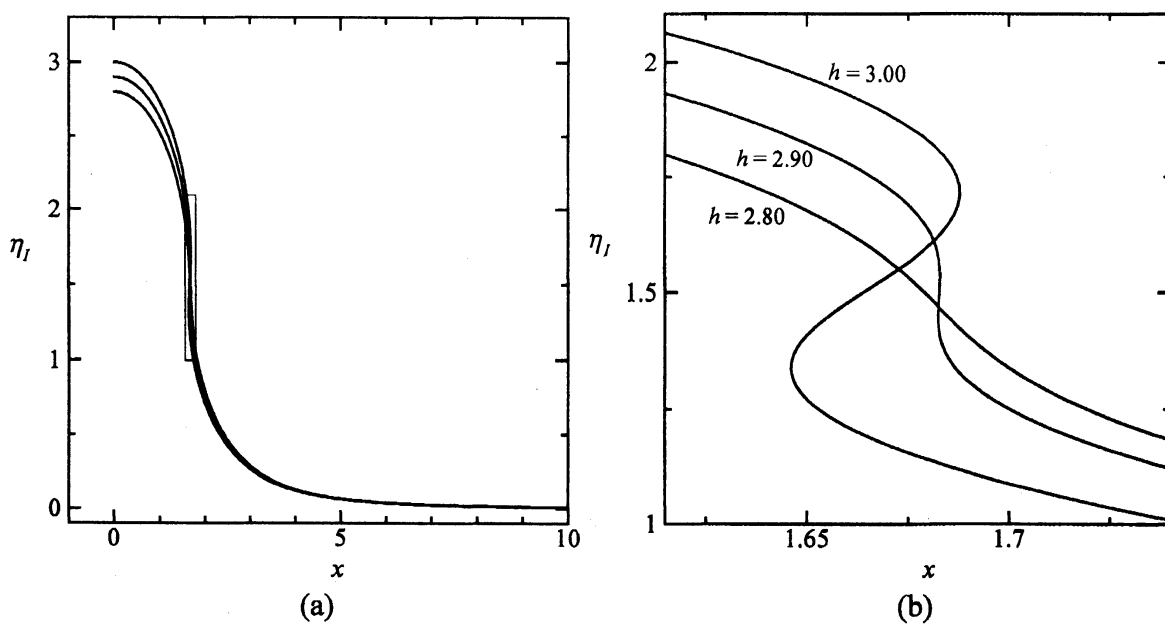


図6 界面孤立波( $D=10$ ,  $\rho=0.15$ ,  $h=2.80, 2.90, 3.00$ )の界面形状. (a) 全体図. (b) 長方形領域の拡大図.

#### 参考文献

- Amick, C. J. & Turner, R. E. L. 1986 A global theory of internal solitary waves in two-fluid systems. *Trans. Am. Math. Soc.* **298**, 431-484.
- Funakoshi, M. & Oikawa, M. 1986 Long internal waves of large amplitude in a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Jpn.* **55**, 128-144.
- Kataoka, T. 2006 The stability of finite-amplitude interfacial solitary waves. *Fluid Dyn. Res.* accepted for publication.
- Longuet-Higgins, M. S. & Tanaka, M. 1997 On the crest instabilities of steep surface waves. *J. Fluid Mech.* **336**, 51-68.
- Tanaka, M. 1986 The stability of solitary waves. *Phys. Fluids* **29**, 650-655.
- Turner, R. E. L. & Vanden-Broeck, J. -M. 1988 Broadening of interfacial solitary waves. *Phys. Fluids*, **31**, 2486-2490.