

超函数の台と特異台の関係

東大 理 森 本 光 生

はじめに V を向きづけられた実解析的な様体とし, $\mathcal{O}_V$ で V 上の (佐藤のいめの) 超函数の芽の層, $\mathcal{A}_V$ で V 上の実解析的函数の芽の層を表わす, T^*V を, V 上の余接バンドルとみる.

$$S^*V = (T^*V - V)/\mathbb{R}^+$$

は V 上の余接球バンドルと呼ばれる. $(x, \xi) \in T^*V$, $(\xi \neq 0)$ の代表ある S^*V の点と $(x, i\xi\infty)$ と書く. S^*V から V の上への標準的な射影を π で記す.

我々の考察の土台となる層 C は S^*V 上の層として定義される. しかも次の系列の写像が標準的に構成され, 完全系列が得られる:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_V \xrightarrow{\beta} \pi_* C \longrightarrow 0$$

ここで α は 自然な埋蔵写像で, $\pi_* C$ は層 C の射影 π による順像である. (= の理論の詳細については, [4, 5, 6] を参照された.) V 上の超函数 f に対し, 層 C の断面 βf の台を f の (分解された) 特異台と呼び,

$$S.S. f = \text{supp } \beta f$$

と書く. 上の完全系より $S.S.f$ が空であれば f は実解析的である. 通常 Ω の特異台は $S.S.f$ の π による射影である.

超函数の芽の層 $\mathcal{B}$ が軟弱であることは良く知られているが, 柏原 [2] により層 $\mathcal{C}$ が軟弱であることも証明された. したがって 任意の形状の台をもつ超函数も, 任意の形状の特異台をもつ超函数も存在する. 然し, f の特異台の形は f の台のとりうま形を制限するし, 逆に f の台の形は特異台の形を規制する. このような台と特異台の相互依存性の例を示すのがこの記事の目的である.

最も簡単な場合として, V が連結であると,

$$S.S.f = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{supp } f = V \text{ 又は } \emptyset.$$

実際 仮定より f が実解析的であるからである. この事実とよく似た一般的な結果は, 河合-柏原の補題である. この補題は Holmgren の定理の証明に用いられたものである.

補題 ([6] の補題 8.5) (河合-柏原)

$f \in \mathcal{B}$ 且 $x_0 \in V$ の近傍 Ω で定義された超函数とする. $\varphi \in \Omega$ 上の実解析函数で, $d\varphi_{x_0} \neq 0$ とする. 今 f が次の2条件を満足すると仮定する:

$$(a) \quad S.S.f \not\supset (x_0, i(d\varphi_{x_0})\omega) \quad \text{または} \\ S.S.f \not\supset (x_0, -i(d\varphi_{x_0})\omega)$$

(b) $\text{supp } f \subset \{x \in \Omega; \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$
 のとき f は x_0 のある近傍でゼロである.

我々が証明するのは、ある種の超函数に対する“準解析性”
 (quasi-analyticity) の定理で、これは、超函数の台と
 特異台の相互依存関係を示す、河合-柏原の補題とは別の現象
 を記述している.

Schwartz 超函数に対しては、我々の定理に類似の定理は
 いくつか知られており、公理論的な場の量子論に応用されて
 いる。(Vladimirov の教科書 [7] の第 5 章を見らねば.)
 この書物の用語で説明すると、我々の定理は、領域 G の $B(G)$
 包にあり、河合-柏原の補題は $B_p(G)$ 包にある.

定理の定式化 定理を定式化するために記号をいくつか
 準備しよう. 今後、実解析的多様体 V は $n+1$ -次元実ユーク
 リッド空間 E の開集合とある. E の点 x は $(x_0, x_1, \dots, x_n)$
 で、 E の双対空間 E^* の点 ξ は $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ で表わす.
 $S^* = (E^* - \{0\})/\mathbb{R}^+$ とおく. $\xi \in E^*$, $\xi \neq 0$ に対し、 ξ の
 代表する S^* の点を $i\xi_\infty$ と書く. E^* の部分集合 A に対し、
 $iA_\infty = \{i\xi_\infty; \xi \in A, \xi \neq 0\}$
 と書く. このとき余接球バンドル S^*V は自然に積多様体

$V \times S^*$ と同一視できる:

$$S^* V \cong V \times S^* = V \times (E^\infty)^*$$

定理

f はユークリッド空間 E の原点の近傍 Ω で定義された超
関数とする, f が次の 2 条件を満足すると仮定する.

i) $S, S, f \ni (x, i\xi_\infty) \Rightarrow \xi_0 \neq 0.$

ii) $a > 0$ が存在して

$$\text{supp } f \ni x \Rightarrow x_0 \geq a|x|.$$

このとき, f は原点のある近傍でゼロである.

結果の復習 定理の証明に用いる道具の準備をする. 今 n
と別のユークリッド空間 $\tilde{E}$, $\dim \tilde{E} = m+1$ を考える.
 $\tilde{E}$ の双対空間 $\tilde{E}^*$ で表わす, $y \in \tilde{E}$ と $\eta \in \tilde{E}^*$ の座標をと
て $(y_0, y_1, \dots, y_m)$, $(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m)$ で表わ
す. $\tilde{E}$ にミンコフスキー内積

$$(y, y) = y_0^2 - y_1^2 - \dots - y_m^2$$

を等号とする. $\tilde{E}$ の正の光錐を Γ_m で表わす:

$$\Gamma_m = \{ y \in \tilde{E} ; y_0 > 0, (y, y) > 0 \}.$$

さらに,

$$\square_m(\eta) = \eta_0^2 - \eta_1^2 - \dots - \eta_m^2$$

とある Ω が一般に $\tilde{E}$ の開集合を表わす.

例1に、河合-柏原の補題をリタダちに導かれる2つの命題を示す。

命題1 も1 $\tilde{E}$ の開集合 $\tilde{\Omega}$ が時間的線分 l と l のまわり
の2重錐 D_l :

$$D_l = (l + \Gamma_m) \cap (l - \Gamma_m)$$

を含むとする。

このとき

$$S. S. u \subset \tilde{\Omega} \times i\{\eta; \square_m(\eta) \geq 0\}^\infty$$

である。 $\tilde{\Omega}$ 上の超函数 u が、 l の近傍で
ゼロであれば、 u は2重錐 D_l の中でゼロである。

H は $\tilde{E}$ の空間的な超平面とし、 $\omega \in H$ の開集合とする。
 ω に底をもち2重錐 D_ω とは、次のように定義される:

$$D_\omega = \{y \in \tilde{E}; ((y - \Gamma_m) \cup (y + \Gamma_m)) \cap H \subset \omega\}$$

命題2 $\tilde{E}$ の開集合 $\tilde{\Omega}$ が ω を底にもち2重錐 D_ω を含
むと仮定する。

$$S. S. u \subset \tilde{\Omega} \times i\{\eta; \square_m(\eta) \leq 0\}^\infty$$

なる $\tilde{\Omega}$ 上の超函数 u が、 ω の $\tilde{E}$ における近傍でゼロであるな
らば、2重錐 D_ω の中でゼロである。

次に微分作用素

$$\square_m \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial y_m^2}$$

を考える. $\tilde{\Omega}$ 上の超函数 u が微分方程式

$$\square_m \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0 \quad (\tilde{\Omega} \text{ 上})$$

を満足していることを仮定する. このとき, 微分方程式の超函数解の正則性に関する佐藤の基本定理 [5, 6] によれば, u の特異台 S, S, u は

$$S, S, u \subset \tilde{\Omega} \times i \{ \eta; \square_m(\eta) = 0 \}^\infty$$

をみたす. このような特異台をもつ u に対しては, 命題 1 と 2 が成立することは注意しておく.

これから $m = n+1$ とし, $\tilde{E} = E \times \mathbb{R}$ と考える.

$$(y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = (x_0, x_1, \dots, x_n, t)$$

$$(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}) = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \tau)$$

と置く. $E = E \times \{0\} \subset \tilde{E}$ と考える. u は $\tilde{\Omega}$ 上の超函数で $\tilde{\Omega} \text{ 上 } \square_m \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0$ を満足するものと仮定すると, u の $\Omega = \hat{\Omega} \cap E \text{ 上への制限 } u(x, 0)$ は定義でき, Ω 上の超函数 $v(\tau)$,

$$S, S, u(x, 0) \subset \Omega \times i \{ \xi; \square_n(\xi) \geq 0 \}^\infty$$

をみたす. 逆に, 次の Cauchy 問題を考える:

$$(*) \quad \begin{cases} \square_{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = \mu_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \mu_1(x) \end{cases}$$

ここで Cauchy 問題 μ_0 と μ_1 は E の開集合 Ω 上の超函数である。微分作用素 $\square_{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$ は t に関して双曲型ではないから、上の Cauchy 問題は任意に初期データを与えたとき、常に可解ではない。次の河合 [3, 3 bis] の定理は、可解性のために一つの十分条件を与えている:

命題 3 も (2) の超函数 μ_0, μ_1 が

S. S. $\mu_i \in \Omega \times \{ \xi; \square_n(\xi) > 0 \}^\infty, i=1, 2$ を満足すれば、上のコーシー問題は局所的に可解、しかも解は一意的である。

実際、 $\square_{n+1}(\xi, \tau) = \square_n(\xi) - \tau^2$ であるから、 $\square_n(\xi) > 0$ なら、 τ に関する 2 次方程式 $\square_n(\xi, \tau) = 0$ は、2 つの相異なる実根をもつ。故に、 $\square_{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$ は、 $I = \Omega \times \{ \xi; \square_n(\xi) > 0 \}^\infty$ とおくと、 I - 双曲型である。したがって、命題 3 は河合の定理の特殊な場合である。

定理の証明.

必要ならば、ゼロの近傍 Ω を縮小して正数 $M > 0$ が見付

177,

$$S.S. f \supset (x, i \infty)$$

$$\Rightarrow M^2 \xi_0^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_n^2 > 0$$

と(2)より, 座標のスケールをとりかえれば(正数 α も適当に変更(2), 条件 i) ii) のかわりに, 次の条件 i')

と ii) をはじめから仮定してよい.

$$i') S.S. f \subset \Omega \times i \{ \xi \} \cap_n (\xi) > 0 \} \infty.$$

以下 荒木[1]に続いて, 命題1, 2, 3を用いて議論をすすめる.(論文[1]の存在は, 荒木 ≠ 澤氏に教えていただいた.)

Cauchy 問題 (*) を 初期条件

$$\mu_0 = f, \quad \mu_1 = 0$$

とあって解く. $\varepsilon \in +$ 十分小さい正数とすると,

$$\widehat{\Omega} = \{ (x, t) ; |x| < \varepsilon, (t) < \varepsilon \}$$

において, Cauchy 問題 (*) の解(超函数解) $\mu(x, t)$ が存在する(命題3) $\Rightarrow \varepsilon$ は f に依存して定まることに注意する.

f の台は $\{x; x_0 \geq a|x_1|\}$ に含まれている(条件ii) $\Rightarrow$ とに注意する. 解 μ は f により一意的に定まるから μ は次の2つの時間的線分 l_1, l_2 の近傍でゼロになる:

$$l_1 = \{ (x_0, r, 0, \dots, 0) ; -ar - 2s < x_0 < ar \}$$

$$l_2 = \{(x_0, -r, 0, \dots, 0); -ar - 2s < x_0 < ar\}$$

命題1より, μ は l_1 のまわりの2重錐 D_{l_1} と l_2 のまわりの2重錐 D_{l_2} の内部でゼロである。(図1を見よ.) 故に μ は

$$\omega \equiv D_{l_1} \cap D_{l_2} \cap \{x; x_0 = -s\}$$

の近傍でゼロである. 図2より ω は

$$d \equiv \{x; x_0 = -s, x_1^2 + \dots + x_n^2 + t^2 < (s+ra)^2 - r^2\}$$

を含む. μ はとくに d の近傍でゼロであるから, 命題2により, μ は d の底とする2重錐 D_d の中でゼロである. D_d は

$$-s < x_0 < \sqrt{(s+ra)^2 - r^2} - s, x_1 = \dots = x_n = t = 0$$

なる線分を含む. s は正数 r, s が

$$(s+ra)^2 - r^2 - s^2 = r(2as - (1-a^2)r) > 0$$

つまり,

$$(*) \quad 2as - (1-a^2)r > 0$$

なりかぎり, μ は E の原点でゼロとなる. $(*)$ を満足し

つ, 正数 r, s はいくらでも小さくできるから, 証明は完結した.

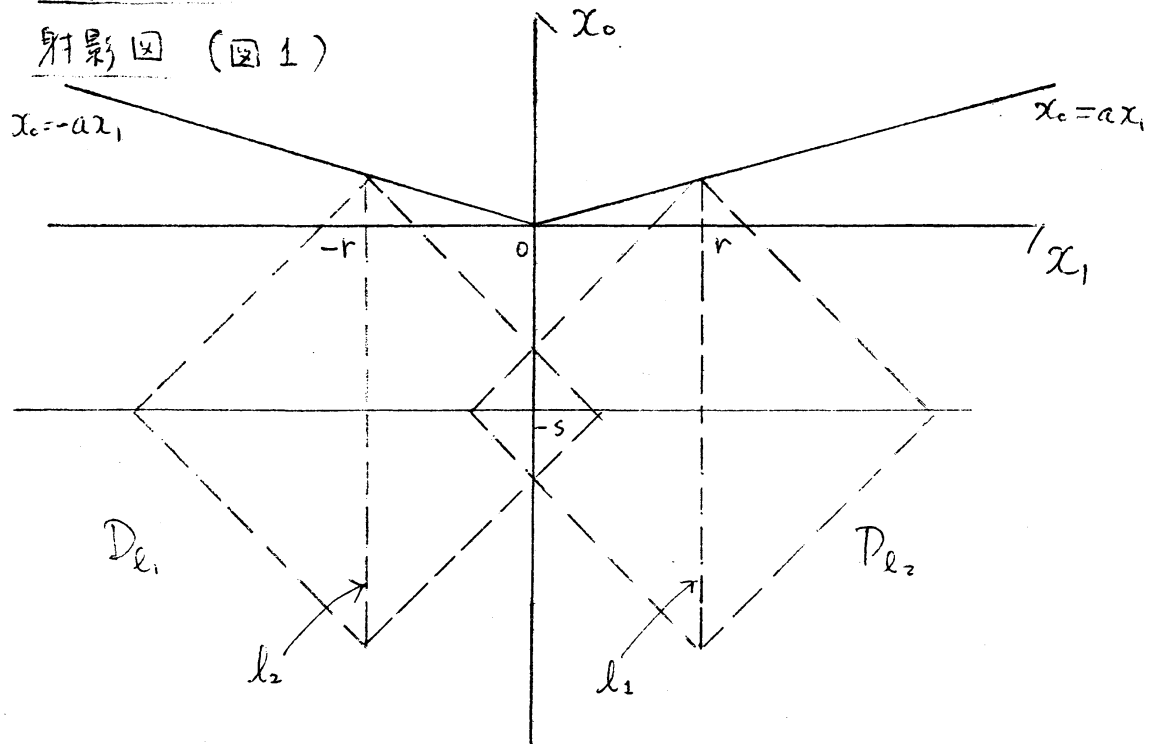
注意 定理では, ある正数 a に対し 閉集合

$$F_a = \{x \in \Omega; x_0 \geq a|x_1|\}$$

が f の台を含むと仮定した. この条件は次のように弱められ

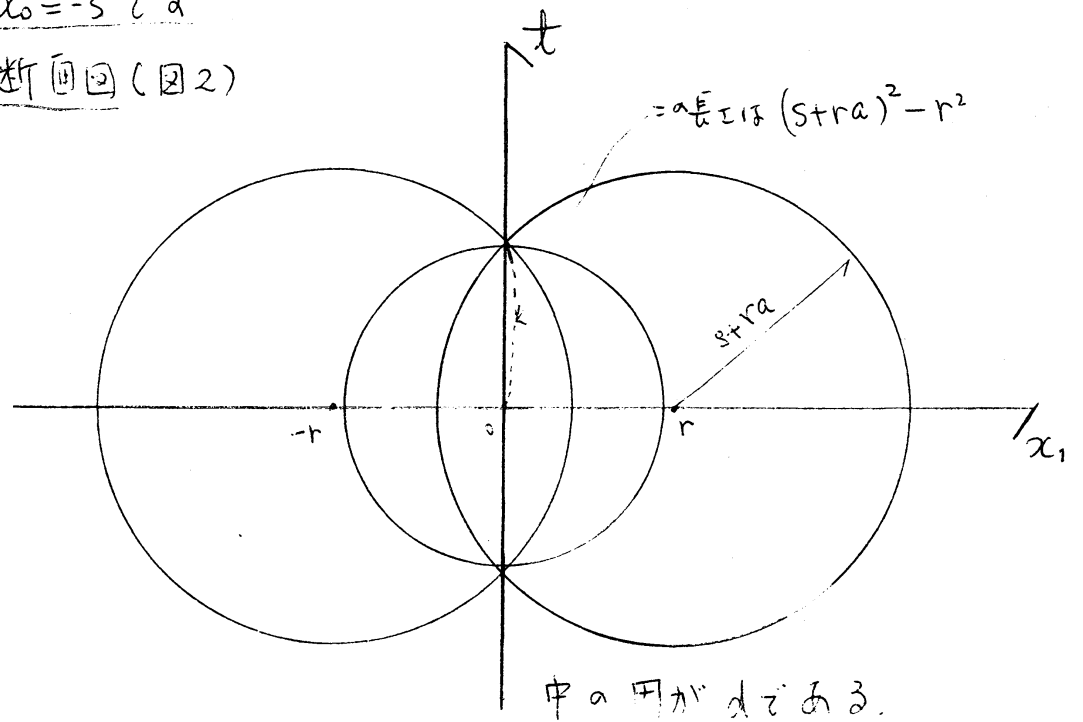
x_0, x_1 平面 $\wedge a$

射影図 (図1)



$x_0 = -s \vee a$

断面図 (図2)



る:

定理の i) を ii') でおまかえても定理は正しい。

ii') 任意の $\delta > 0$ に対し,

$$\Gamma(\text{supp } f) \cap \{x; (x_0 - \delta)^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < \delta^2\} \neq \emptyset.$$

系 $\dim E = n+1 \geq 2$ とする. E の原点の近傍 Ω 上の超函数 f が次の 2 条件を満足あるとしよう:

i) $E \ni y, y \neq 0$ が存在して,

$$\text{s.t. } f \in (\mathcal{X}, i\xi\infty) \Rightarrow \langle y, \xi \rangle \neq 0.$$

ii) $\xi, \eta \in E^*$ 互に一次独立なベクトルが存在して,

$$\text{supp } f \ni x \Rightarrow \langle x, \xi \rangle \geq 0 \text{ か } \langle x, \eta \rangle \geq 0.$$

このとき f は原点の近傍でゼロである。

証明

E に座標をとり,

$$y = (1, 0, \dots, 0)$$

とすれば, このとき 系の条件 i) は定理の条件 1) と一致する. 定理の証明と同じに, $\mathcal{X}$ の座標のスケールをとりかえて,

$$i') \text{ s.t. } f \in \mathcal{X} \times \{\xi; \square_n(\xi) = 0\}$$

とすれば,

E のミニユフスキー内積

$$(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n$$

这不変にある一次変換 T (ローレンツ変換) により, 原点の近傍は別の近傍に同相にうつり, T に共役な変換により, $\square_n(\xi)$ は保存される. E のゼロでないベクトルは, ローレンツ変換により, $(\text{mod } \mathbb{R}^+)$ で

$$(1, 0, 0, \dots, 0) \quad (\text{時間的ベクトル})$$

$$(1, 1, 0, \dots, 0) \quad (\text{光的ベクトル})$$

$$(0, 1, 0, \dots, 0) \quad (\text{空間的ベクトル})$$

のうちいづれか一つにうつる.

今ベクトル ξ は η が時間的でないとする. どちらでも同じであるから, ξ が光的または空間的とする. つまり

$$\square_n(\xi) \leq 0$$

と仮定する. 今 (i') を仮定しているから,

$$x \in \Omega \text{ に対し } (x, i\xi\infty) \notin S. S. f.$$

他方, 条件 (i) より,

$$\text{supp } f \ni x \Rightarrow \langle x, \xi \rangle \geq 0$$

故に, 河合松原の補題が適用でき, 系の結論が成立する.

ξ と η が共に時間的と仮定する. $\eta \neq 0$ とし, $\xi = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ もまた時間的である. ローレンツ変換により, $(\text{mod } \mathbb{R}^+)$ で

$$\frac{1}{2}(\xi + \eta) = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\xi = (1, a, 0, \dots, 0)$$

$$\eta = (1, -a, 0, \dots, 0) \quad (a > 0)$$

とできる. 二座標をとると系の条件(i)は定理の条件(ii)と一致する. 故に系が証明された.

さらに 系の条件(i)を満足するよう超函数 u の台は $\{x \in \Omega; \langle x, \xi \rangle \geq 0, \langle x, \eta \rangle \geq 0\}$ と一致し $u = 0$ として系は主張してゐる. 超函数 $u = 0$ の性質は Vladimirov の教科書では quasi-analyticity と呼んでゐる.

我々の定理, 河合-柏原の補題等は, 領域の正則包 (holomorphic hull) の詳細な性質と密接にむすびつてゐる. これは, 双対コホモロジーの消滅定理の形で表現出来るであろう.

文献

- [1] Araki, H. A generalization of Borchers' theorem, Helv. Acta Phys. 36 (1963), 132-139.
- [2] Kashiwara, M. C^∞ flabbiness と Radon 変換
数理解析講究録 114 佐藤の超函数とその応用, (1970)
1-4.
- [3] Kawai, T. Construction of elementary

solutions for I-hyperbolic operators and solutions with small singularities. Proc Japan Acad. 46 (1970), 912 - 916.

[3 bis] Kawai, T. Construction of local elementary solutions with real analytic coefficients, I. Publ. R.I.M.S (出版予定)

[4] Morimoto, M. Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA 17 (1970) 215 - 239.

[5] Sato, M. Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations Proc. Intern. Congress Math. Nice (1970) (出版予定) 数理研講究録114 (1970), 105-123.

[6] Sato, M - Kashiwara, M. 超函数の構造 数学の天才 15 (1970) 9-71.

[7] Vladimirov, Methods of the theory of functions of several Complex Variables 1966, MIT Press.