

Some aspects of uniformization theory
in several complex variables

G. D. Mostow (Yale 大)

三谷賢治 記

Genus が 1 より大きく、compact な複素曲線 M を考えよう。すると、そこには、複素平面 $\mathbb{C}$ の中の単位球面 D から M の orbit map が存在する。

compact な Kähler 曲面 M と、 $\mathbb{C}^2$ の中の単位球体 B^2 に対して、同じ様なことは成り立ったろうか？

予想 (Yau 1979). compact な Kähler 曲面 M が、strict に負な断面曲率を持てば、 M は離散群 Γ による B^2 の商空間 B^2/Γ と双正則同型になるであろう。

この予想がなされた根拠と思われるものを、いくつか上げよう。

(I) 複素曲線 M を考えると、Gauss-Bonnet の定理から、

$$\int_M K_M dM = 2 - 2g$$

(ここで K_M は Gauss 曲率, g は Genus).
 が従う。よって, $K_M < 0$ ならば, $g > 1$ 。
 このとき, M は uniformization をもつ。

(II) (Frankel 予想) n 次元 Kähler 多様体 M
 が, 正の双正則断面曲率をもつならば, M は $\mathbb{CP}^n$
 と双正則同型である。

これは,

$n=2$ の場合, Aubin-Frankel によって 1941
 年に,

$n=3$ の場合, Mabuchi によって,

n : 一般では, Mori (Ann. of Math) 1979
 及び

Siu-Yau (Invent. Math) 1981

に解かれた。

(Mori は $T(M)$ が ample というより弱い条件
 が仮定していない。)

しかし、この予想は正しくなかった。

定理 (Mastow-Siu). Compact Kähler surface M で、strict に負な断面曲率をもち、しかし、その普遍被覆空間が B^2 と双正則同型でないものがある。

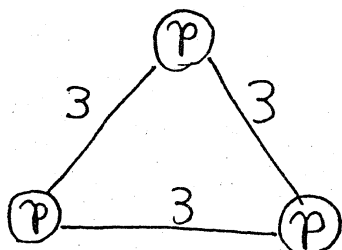
この M については、次のことも分かる。

(I) M は局所対称空間と可微分同相にはなない。

(II) M は正の index をもつ。

(III) M の複素構造は自明でない変形をもたない。さらに強く、 M は rigid である。(つまり、 M と基本群が同型であるような全ての K (大い) 複素多様体は M と双正則同型である。) (c.f. Kodaira J. Analyse Math. 1967 P207-215)。

以下 M の構成等を行なう。まず。
 $U(2,1)$ の部分群 $T(p, t)$ を作る。



$V = \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{C} e_i$ とし、この上の hermit 内積
 $\langle \cdot, \cdot \rangle = H$ と、

• $\langle e_i, e_i \rangle = 1$

• $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_3, e_1 \rangle = \frac{\varphi}{2 \sin(\pi/p)}$

$(\varphi = e^{\sqrt{-1} \pi t/3}) \quad (|t| < \frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ 。

T と定める。

$R_i: V \rightarrow V \quad (i=1, 2, 3)$ と、 $v \in V$ に対

して、

$$R_i(v) = v + (e^{2\pi\sqrt{-1}/p} - 1) \langle v, e_i \rangle e_i$$

と定める。

$1 \leq i, j \leq 3$ に対して、

$\Gamma_{i,j}$ を R_i と R_j で生成される群とし

$\Gamma (= T(p, t))$ を R_1, R_2, R_3 で生成され

群とする。

Claim

(1) $\circ R_i$ は H を不変にする, つまり
 $\langle R_i(v), R_i(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ 。

$\circ H$ の signature は $(2, 1)$ 。

$\circ$ 従って, $\Gamma \subset U(H) = U(2, 1)$ 。

(2) $3 \leq p \leq 5$ ならば, Γ_{ij} は order が
 $24(p/(3-p))^2$ の有限群である。

(注, $p \geq 5$ である場合は, Γ_{ij} は有限群ではない。この場合はある "Classical object" と関係がある。)

$\mathbb{C}h^2$ の Model X を作る。

$\bullet V_- = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle < 0\}$

$\bullet X = V_- / \mathbb{C}^*$ とする。

(X は $\mathbb{C}P^2$ の部分集合である。)

X は $\mathbb{C}h^2$ と isometric で, その距離関数は,
 $\nu: V_- \rightarrow X$ を projection とすると,

$$d(V(v), V(w)) = \cosh^{-1} \left\{ \frac{|\langle v, w \rangle|}{[\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle]^{1/2}} \right\}$$

7*5とされる。

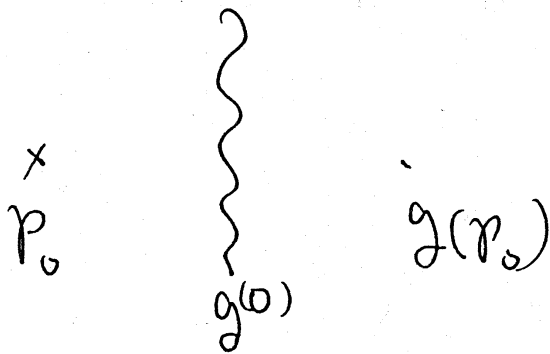
±7. $p_0 = V(e_1 + e_2 + e_3)$ とおく。

$g \in U(H)$ に $g \neq 1$. 次に g により $g^{(+)}$, $g^{(0)}$ を定める。

$$g^{(+)} = \{x \in X \mid d(x, p_0) = d(gx, p_0)\}$$

$$g^{(0)} = \{x \in X \mid d(x, p_0) = d(gx, p_0)\}.$$

$g^{(0)}$ は まるく (全測地性). 7*5 はない。



$g \in U(H)$ に $g \neq 1$. 明らかに,

$$g(g^{(0)}) = (g^{-1})^{(0)}, \text{ が成り立つ。}$$

$i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ に $g \neq 1$.

$$F_{ij} = \bigcap_{g \in \Gamma_{ij}} g^{(4)} \subset L.$$

$$F = F_{12} \cap F_{23} \cap F_{31} \text{ とする。}$$

又、 $g^{(0)} \cap F$ を $\mathcal{G}$ と書く。

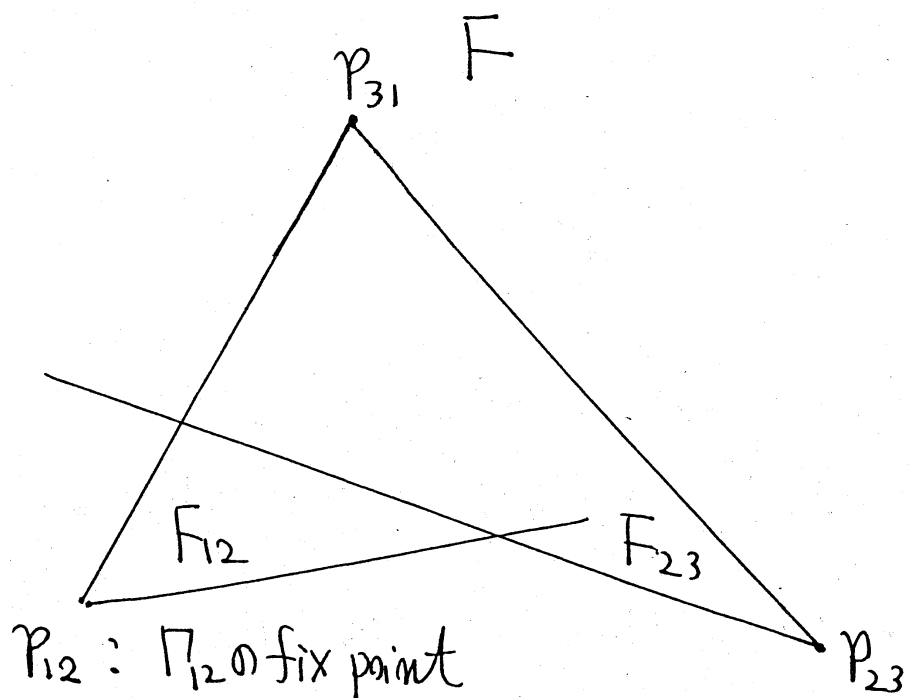
F は、次の24個の面を含む。

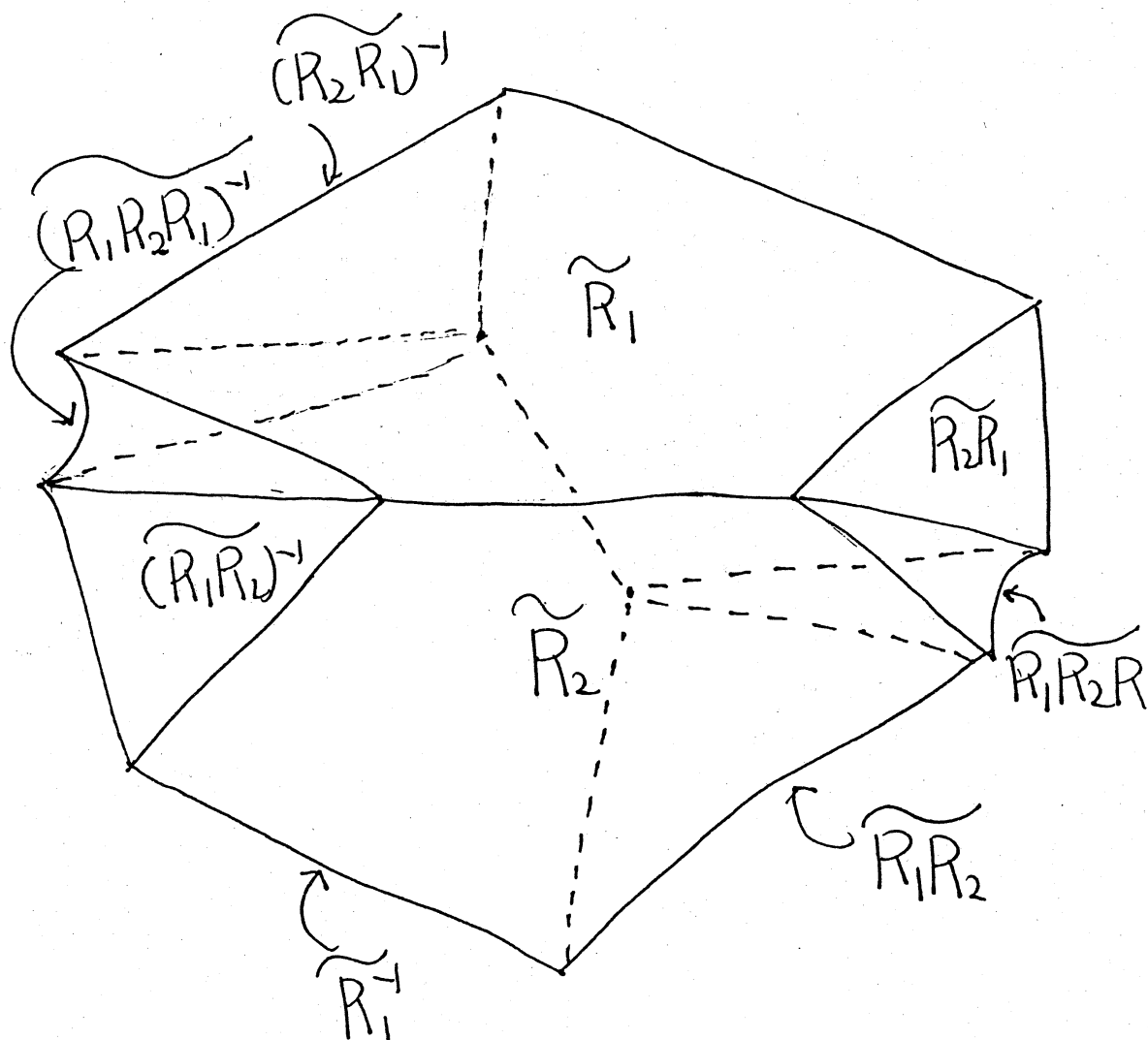
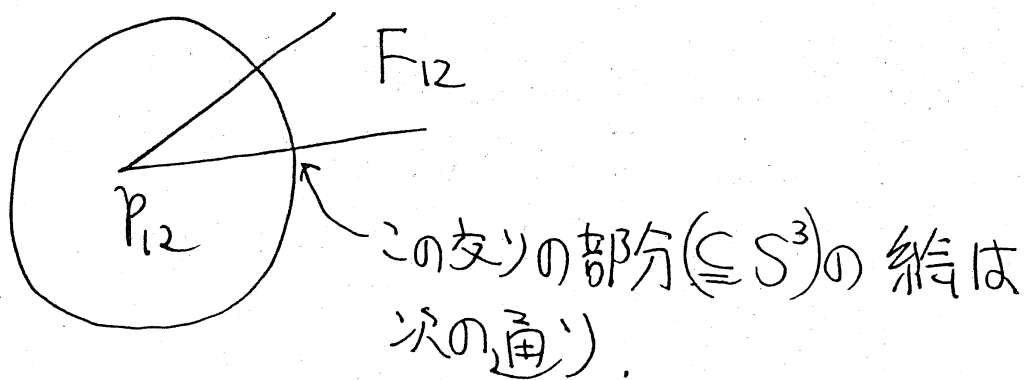
$$\circ \widetilde{R_i^\pm} \quad (i=1,2,3)$$

$$\circ \widetilde{(R_i R_j)^\pm} \quad ((i,j) = (1,2), (2,3), (3,1), (2,1), (3,2), (1,3))$$

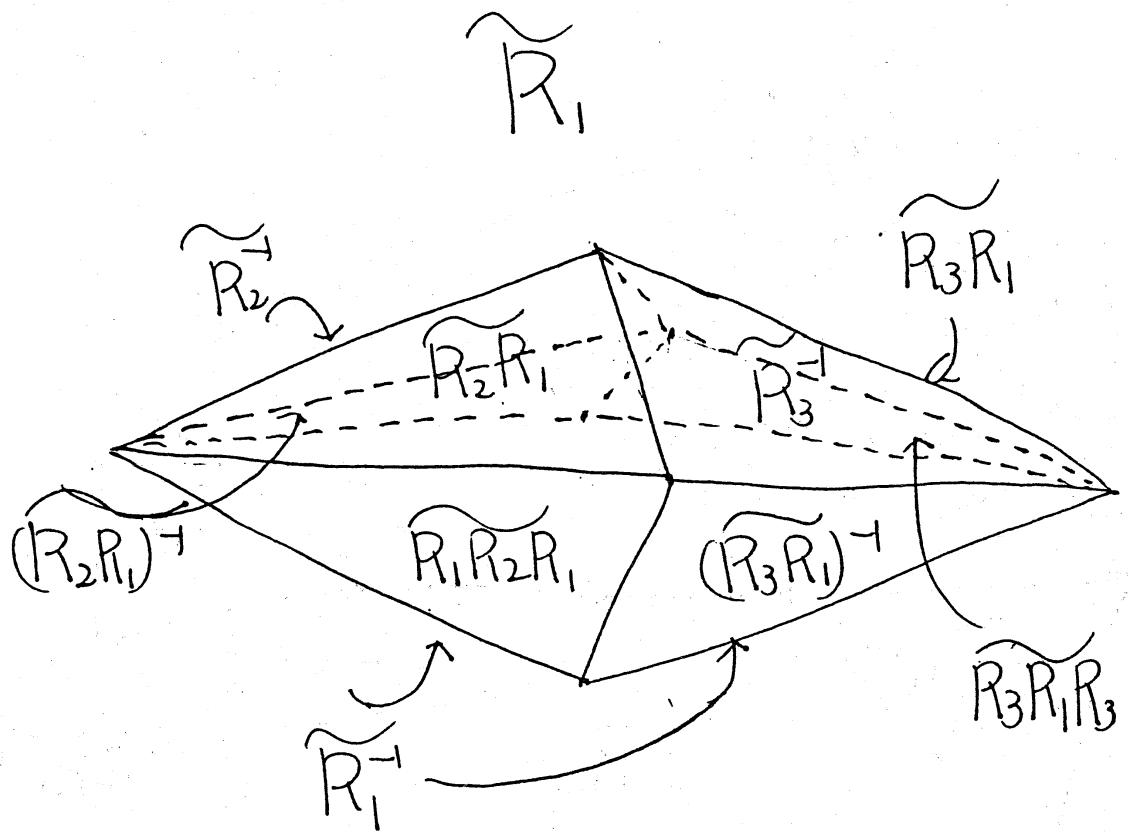
$$\circ \widetilde{(R_i R_j R_i)^\pm} \quad ((i,j) = (1,2), (2,3), (3,1)).$$

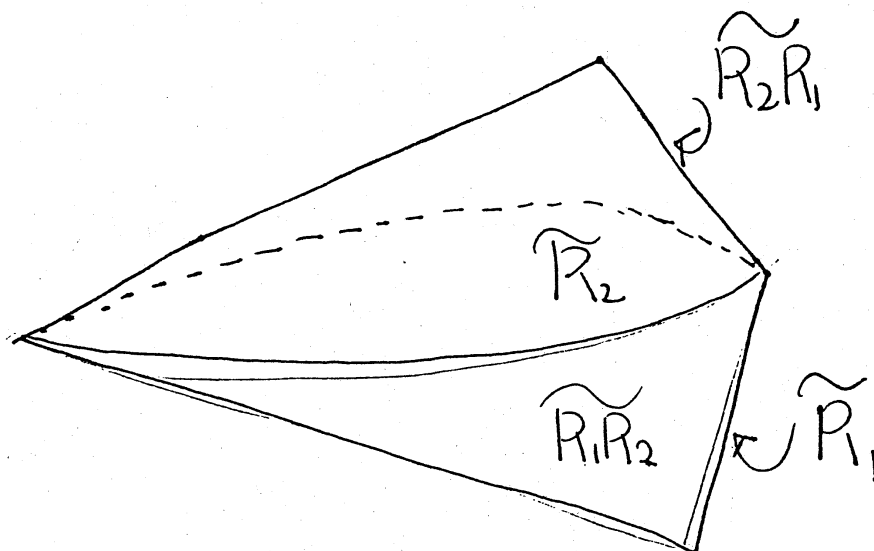
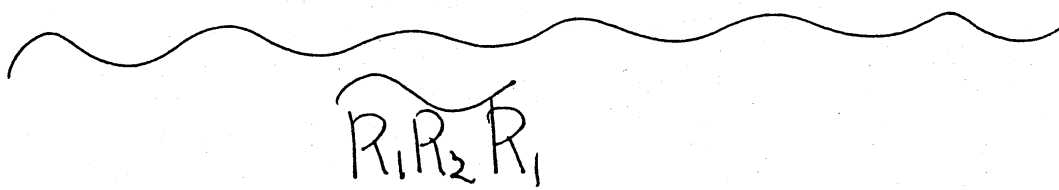
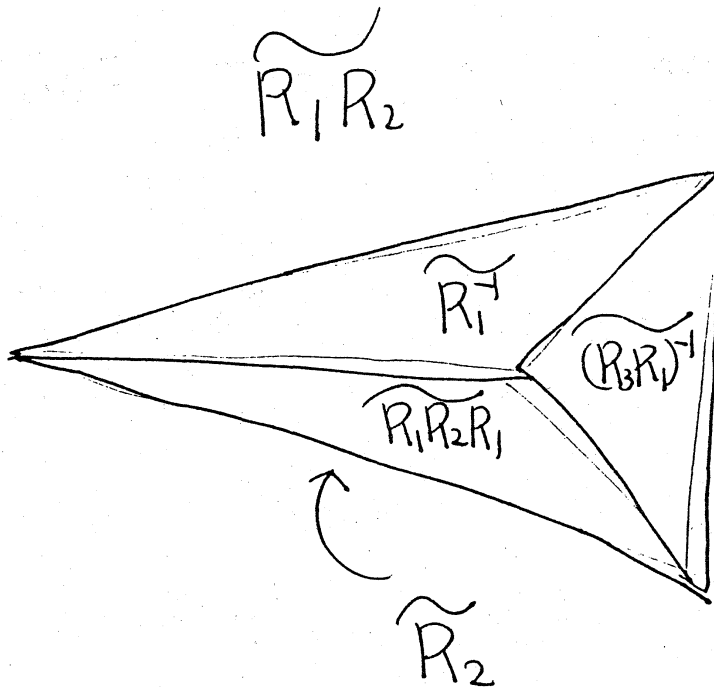
$$(R_i R_j R_i = R_j R_i R_j \text{ ではない}).$$





次に3種類のfaceは次のような形をしている。(面に書いた記号はその面で交わっている他のfaceを指す)。





定理 勝手な $(\mathcal{P}, \tau)$ に対して, F は条件 (CD 1) を満たす。

(CD 1) とはおおよそ次のような意味である。
 $\tau \in \cup \tau_i$, τ は F の 余次元が 1 の face, とすると, $\tau(\tau) = \tau^{-1}$ 。

定義 e を F の 余次元 2 の face とする。
 このとき,

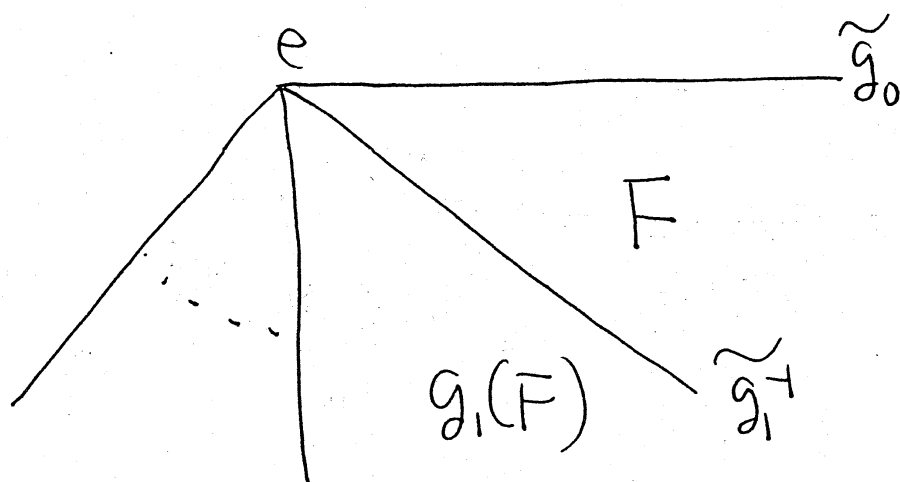
e での circuit は good.

$$\Leftrightarrow \left(\text{Int}(\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n(F)) \cap F \right) \neq \emptyset$$

$$\tau_i(e) = e$$

なる勝手な $\tau_1, \dots, \tau_n$ に対して,

$$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n(F) = F.$$



定理

・全ての全次元2のfaceで circuit が good

$\Leftrightarrow \Gamma$ は $SU(2,1)$ の離散部分群。

・このとき, F は mod $\text{Aut } F$ で Γ の基本領域である。

($\text{Aut } F$ は 1 または $2\pi/3$ で後者のときは番号の cyclic な入れ替え $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ に対応する。)

この定理の条件は17個の $(\mathcal{P}_i)$ について満たされる。

(これらの内のいくつかは $SU(2,1)$ の non-arithmetic lattice になる)。



離散部分群にならない場合も考える。

まず、3つの頂点 p_{12}, p_{31}, p_{23} のどれかと交わっているような余次元2の face e について、そこでの

circuit は全ての (P, t) に対して good である。3 頂点のどれとも交わらない、余次元 2 の face は次の 6 つである。

$$I_1 = (R_2 R_3 R_1)^2 \text{ の fix p.t. } \circ$$

$$I_2 = (R_1 R_2 R_3)^2 \quad \text{,} \quad \circ$$

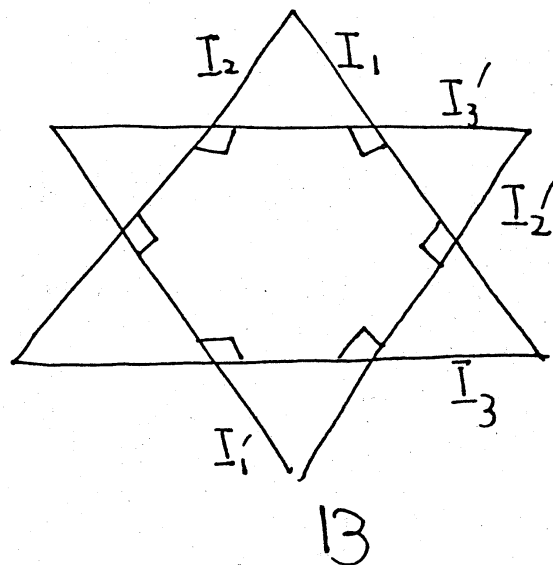
$$I_3 = (R_3 R_1 R_2)^2 \quad \text{,} \quad \circ$$

$$I_1' = (R_1 R_3 R_2) \quad \text{,} \quad \circ$$

$$I_2' = (R_3 R_2 R_1)^2 \quad \text{,} \quad \circ$$

$$I_3' = (R_2 R_1 R_3)^2 \quad \text{,} \quad \circ$$

これらの交わり方は、



これらの回りで,

$g_1 \cdots g_m(F) \cap F \neq \emptyset \Rightarrow g_1 \cdots g_m(F) \neq F$
 ではないが, かわりに,

$g_1 \cdots g_m(F) \cap F \neq \emptyset \Rightarrow (g_1 \cdots g_m)^m(F) = F$
 となるようにすることが出来る (t.e. $\emptyset$ と F .)

すると, Γ が作用する複素多様体 Y と,
 Y から $\mathbb{C}h^2$ への Γ -不変な正則写像 f
 で

- 群 Γ の Y への作用は properly disconti.
- $\Gamma \cdot f^{-1}(I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I'_1 \cup I'_2 \cup I'_3)$ の外
 で f は双正則。
- $\Gamma \cdot (I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I'_1 \cup I'_2 \cup I'_3)$ の上で
 f は local に
 $(z_1, z_2) \rightarrow (z_1^{m_1}, z_2^{m_2})$ の形を
 している。

なる条件をみたすものかといえる。

Y に負曲率計量を入れる。

I_1, I_2, I_3 の回りの circuit は good
 I'_1, I'_2, I'_3 の回りの circuit は bad,
 である場合を考える。

このとき, $f^{-1}(I'_1 \cup I'_2 \cup I'_3)$ の外では,
 f により $\mathbb{C}h^2$ の metric から induce
 される metric を Y に入れ,

$f^{-1}(I'_1 \cup I'_2 \cup I'_3)$ の近傍では, それ
 と, 領域 $\{(z, w) \mid |z|^{2m} + |w|^2 < 1\}$
 の Bergman 計量をたし合わせた metric
 を入れる。こうして得られた Y の
 metric は負曲率で, Y/Γ が求
 めるものである。(これの普遍
 被覆が Ball B^2 ではないこと
 は特性類を計算すること
 で示す。)

G.D. Mostow, Pacific J. Math. 86 171-276

G.D. Mostow - Y.T. Siu, Ann. of Math.
 112, 321-360