

確率微分方程式に対する各種の近似法

立命館大学理工 山田 俊雄 (Toshio Yamada)

こゝでは各種の近似法のなかから Picard 近似と講演者によって定式化された確率微分方程式における Newton 法について議論しよう。

1. Picard 近似について

$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ を通常のパイルタ-付の確率空間とする。
確率微分方程式

$$(1.1) \quad \begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt \\ X_0 = \xi. \end{cases}$$

ここで B_t は $\mathcal{F}_t$ -Brown 運動,

についての解の存在と一意性については, σ 及び b に

Lipschitz 条件を仮定して, K・Ito ([1]) が 1942 年の証明を与えた. K・Ito の方法は Picard 近似によるもので, その証明の中で 解と Picard 近似の誤差評価が具体

的に与えられている。最近 L. Schwartz ([5]) は (1.1) の一般化である semi-martingale 方程式についても係数の Lipschitz 条件を置くと、極めて速いスピードで Picard 近似が解に収束することを注意している。この L. Schwartz のコメントにも触れながら、まず Lipschitz 条件の下での Picard 近似をとりあげる。記号を簡単にするため 1 次元の場合のべるが、結果を多次元へ、適当な修正を経て拡張できる。

1. A. Lipschitz 条件の下での Picard 近似
次の条件を σ, b に仮定²。

(条件 L) ある $K > 0$ が存在して

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K |x - y|, \quad \forall (t, x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^2.$$

(条件 A) ある $L > 0$ が存在して

$$|\sigma(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq L(1 + x^2)$$

$$\forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^1.$$

さて 初期条件に $E[|\xi|^2] < \infty$ を仮定して (1.1) の Picard 近似列を次のように作る。

$$X_t^{(0)} \equiv \xi,$$

$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$1 < T < \infty$ を任意に選んで固定する.

$$E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{(1)} - X_s^{(0)}|^2 \right] = M < \infty \quad \text{は おく} n$$

今この M を用いて $\max(8, 2T) = C_T$ とおく

Lemma

$$E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2 \right] \leq M \frac{(C_T K^2)^n t^n}{n!}$$

$$0 \leq t \leq T \quad \square$$

を帰納法を用いて 係数 Lipschitz 条件と (A) の下で示せる.

$$\text{以上より} \quad \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \right] < \infty$$

$$\text{また} \quad P \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{2^n} \right)$$

$$\leq M \frac{(C_T K^2)^n T^n 4^n}{n!} \quad \text{で右辺は収束列}$$

Borel - Cantelli のレマで $X_t^{(n)}$ は $[0, T]$ で一様収束し極限の過程 X_t が (1.1) の解で一貫性を保障されている.

$$\text{さて} \quad E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right)^{1/2} = \|Y\|_{S^2} \quad \text{と書いて L. Schwartz}$$

の記号とコメントに従って誤差評価をまとめておこう.

$$Y_{\cdot}^t = Y_{t \wedge \cdot} \quad \text{とおく.}$$

$$\begin{aligned}
\| (X_\cdot - X_\cdot^{(n)})^t \|_{S^2} &= \left\{ E \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - X_s^{(n)}|^2 \right) \right\}^{1/2} \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left\{ E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}|^2 \right] \right\}^{1/2} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \| (X_\cdot^{(k+1)} - X_\cdot^{(k)})^t \|_{S^2} \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{M(C_T K^2)^k}{k!} t^k \right)^{1/2} \\
&= \text{よって } e(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} \right)^{1/2} \quad \text{と定義} \\
\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} \right)^{1/2} &\leq \left(\frac{x^n}{n!} \right)^{1/2} e(x) \quad \text{の注意}
\end{aligned}$$

Theorem 1.1. (条件 L, A の下で)

(1.1) の解 X と Picard 近似 $X^{(n)}$ について

$$\| (X_\cdot - X_\cdot^{(n)})^t \|_{S^2} \leq M^{1/2} \left\{ \frac{(C_T K^2 t)^n}{n!} \right\}^{1/2} e(C_T K^2 t)$$

$0 \leq t \leq T$ である。

I B. 非 Lipschitz の下での Picard 近似.

確率微分方程式に於ても常微分方程式の場合と同じような非 Lipschitz 条件でも 解の存在と一意性が保障される場合がいくつか知られている. このとき Picard 近似は解に収束するのだろうか? これについては, まだ決定的な結果は得られていないが, いくつかの結果がある. そのなかで典型的

ものまでとりあげる. 本質的には係数 n Osgood 条件を仮定する場合である. ([7] 参照)

(条件 B) $L > 0$ が存在して

$$|\sigma(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq L(1+x^2)$$

$$\forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^1$$

且つ

$$\begin{aligned} & |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 + |b(t, x) - b(t, y)|^2 \\ & \leq K(|x-y|^2) \quad \text{ここで} \end{aligned}$$

K は $[0, \infty)$ で定義され $K(0)=0$, 連続, 単調増加
Concave 且つ $\int_{0+} \frac{du}{K(u)} = \infty$.

Theorem 1.2 (条件 B) の下で $1 < T < \infty$ を固定すると Picard 近似列 $X^{(n)}$ は (1.1) の解 X に収束する. 即ち

$$\|X^{(n)} - X\|_{S^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

なお条件 B の下で (1.1) の解の存在と一意性は保障されている.

Remark 1. S. Kawabata ([2]) は上の定理を改良して

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 + |b(t, x) - b(t, y)|^2 \leq \frac{K(|x-y|^2)}{t^\alpha}$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad \int_{0+} \frac{du}{K(u)} = \infty \quad \text{の下で}$$

Picard 近似を論じている。

Remark 2.

方程式 $dX_t = \sqrt{X_t(1-X_t)} dB_t$ に対し解の存在と一意性は保障されているが、Picard 近似列が解に収束するか否かは不明である。

2. 確率微分方程式に関する Newton 法

ここでは Newton 法を確率微分方程式に適用する試みをのべる。詳しくは [11] を参照して下さい。

$$(2.1) \quad \begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt \\ X_0 = x \end{cases}$$

に対応して常微分方程式

$$(2.2) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

を考える。(2.2) に対しては Chaplygin-Vidossich 法 とは

$$(2.3) \quad \begin{cases} u_{n+1}' = f(t, u_n(t)) + f_x(t, u_n(t))(u_{n+1}(t) - u_n(t)) \\ u_{n+1}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

という準線形近似である。この近似は Chaplygin によって

提案されるものである。Vidossich [12] は適当な関数空間を設定し, operator F を

$$F(x(t)) = x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{とおく,}$$

(2.3) の近似は F についての Kantorovich [10] の意味での Newton 法近似であることを示した。

さて (2.1) に対して Chaplygin-Vidossich 近似のアナロジーを試みよう。ごく自然 n 次の近似を考えることができる。

$$(2.4) \quad X_t^{(0)} = \xi$$

$$\begin{aligned} X_t^{(n+1)} = & \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds \\ & + \int_0^t \sigma_x(s, X_s^{(n)}) (X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}) dB_s \\ & + \int_0^t b_x(s, X_s^{(n)}) (X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}) ds \end{aligned}$$

以下で係数に適當な仮定を置き, 関数空間をうまく設定すると (2.4) の方法は operator F ,

$$F(Z.)(t) = Z_t - Z_0 - \int_0^t \sigma(s, Z_s) dB_s - \int_0^t b(s, Z_s) ds$$

についての Newton 法であることを示そう。

$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ を通常のフィルタ-付確率空間で B_t は $\mathcal{F}_t$ -Brown 運動とする。

係数 σ 及び b について, 次の仮定をおく。

(条件 2. A)

$\sigma(t, x)$ 及び $b(t, x)$ は 2 変数 $x \in \mathbb{R}^n$ について連続.

$$D_x \sigma(t, x) = \sigma_x(t, x), \quad D_x b(t, x) = b_x(t, x)$$

がともに存在して, いずれも $x \in \mathbb{R}^n$ について連続.

定数 $K > 0, M > 0$ が存在して,

$$|\sigma(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

$$|\sigma_x(t, x)| \leq M, \quad |b_x(t, x)| \leq M$$

$$\forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \quad \blacksquare$$

条件 (2. A) の下で (2.1) に対して解の存在と道二つの一意性が保障される. (条件 2. A) より Lipschitz 条件が導びかれるのでこれは明らか. (2.1) の解を (X_t, B_t) と記す. さて $0 < T < \infty$ を任意に選んで固定する.

$$\mathcal{L}_T = \left\{ \varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ は } \mathcal{F}_t\text{-適合, } t \mapsto \varphi(t, \omega) \text{ は連続で } E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \omega)|^2 \right] < \infty \right\}$$

$\varphi \in \mathcal{L}_T$ に対して

$$\|\varphi\|_{S^2} = \|\varphi\| = \left\{ E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, \omega)|^2 \right] \right\}^{1/2} \text{ と定める.}$$

t を固定して $\|\varphi(t, \cdot, \omega)\| = \|\varphi\|_t$ とおく.

$Z \in \mathcal{L}_T$ に対して

$$F(Z)(t) = Z_t(\omega) - Z_0(\omega) - \int_0^t \sigma(s, Z_s(\omega)) dB_s \\ - \int_0^t b(s, Z_s(\omega)) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

とおく。直ちに、

Lemma 2.1 F は $\mathcal{L}_T \rightarrow \mathcal{L}_T$ である。■ を得る。

次に F について Gateaux 微分を考えよう。

Lemma 2.2 $Z \in \mathcal{L}_T$ を固定する。

$\forall h \in \mathcal{L}_T$ に対して

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u} \{ F(Z+uh) - F(Z) \} \quad \text{が } \mathcal{L}_T \text{ でのノルム収}$$

束の意味で存在する。

この極限を $dF(Z;h) = dF(Z;h)(t)$ で表すと

$dF(Z) : \mathcal{L}_T \rightarrow \mathcal{L}_T$ であって

$$dF(Z;h)(t) = h(t, \omega) - h(0, \omega)$$

$$- \int_0^t \sigma_x(s, Z_s) h(s, \omega) dB_s - \int_0^t b_x(s, Z_s) h(s, \omega) ds$$

である。■

Z に於ける Gateaux 微分 $dF(Z)$ について、その逆写像の存在を確かめよう。

Lemma 2.3. $Z \in \mathcal{L}_T$ を固定する.

$\forall \varphi \in \mathcal{L}_T$, $\varphi(0, \omega) = 0$ に対して

$\varphi(t, \omega) = dF(Z; h)(t)$ をみたす $h \in \mathcal{L}_T$,

$h(0, \omega) = 0$ が一意的に存在する.

この h を $dF^{-1}(Z)(\varphi) = h$ で表す. ■

(証明)

$$\begin{aligned} \varphi(t, \omega) &= h(t, \omega) - \int_0^t \sigma_x(s, Z_s) h(s, \omega) dB_s \\ &\quad - \int_0^t b_x(s, Z_s) h(s, \omega) ds \end{aligned}$$

は線形確率微分方程式で拡散項, drift 項はともに Lipschitz 条件をみたすので $h(t, \omega)$ が存在して, 一意である. ■

さて F に対する L. A. Kantorovich [10] の意味での Newton 近似列は.

$$\begin{cases} X_t^{(0)} = \bar{x} \\ X_t^{(n+1)} = X_t^{(n)} - dF^{-1}(X_t^{(n)})(F(X_t^{(n)}))(t) \end{cases}$$

で与えられるが, これを書き換えると

$$dF(X_t^{(n)}; X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}) = -F(X_t^{(n)})$$

$$\text{左辺} = X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} - \int_0^t \sigma_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}) dB_s$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t b_x(s, X_s^{(n)}) (X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}) ds \\
& = \text{右辺} = -X_t^{(n)} + \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s \\
& \quad + \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds
\end{aligned}$$

である。これは (2.4) で考えた近似列そのものである。

Newton 法の解への収束をのびる前 \$n-1\$ の評価式を挙げておく。

Lemma 2.4 ある定数 \$L > 0\$ が存在して

$$\begin{aligned}
\|dF^{-1}(z)(\varphi)\|_t^2 & \leq 3 \|\varphi\|_t^2 e^{Lt} \\
0 \leq t \leq T, \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}_T.
\end{aligned}$$

Theorem 2.1 (局所的収束) 条件 2.A の下で,

$$\delta \leq 120 \delta M^2 e^{L\delta} = \alpha < 1 \quad \text{となるように選ぶ.}$$

このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\sup_{0 \leq t \leq \delta} |X_t^{(n)} - X_t|^2) = 0$ である。

誤差評価として

$$\|X^{(n)} - X\|_\delta \leq \frac{\alpha^{\frac{n}{2}}}{1 - \sqrt{\alpha}} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\delta$$

が成り立つ。 ■

Theorem (大域的収束)

条件 2・A に加えて 与えられた定数 $N > 0$ が存在して,

$|\sigma(t, x)| \leq N$, $|b(t, x)| \leq N$, $\forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^1$ とある.

このとき 任意の $0 < T < \infty$ を固定すると.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)} - X_t|^2 \right] = 0 \text{ が}$$

$$\sup_n E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n)}|^2 \right] < \infty \text{ が成り立つとき,}$$

且つそのときに限る成り立つ. ■

Remark. Y. Ouknine は最近 Newton 法近似の大域的収束についての上の結果を改良し 誤差評価を次のように与えることに成功したようである. (Preprint)

$$\|X^{(n)} - X\|_{S^2} \leq \text{Const} \left\{ \frac{(\text{Const} \cdot t)^{n+1}}{(n+1)!} \right\}^{1/2}$$

■

REFERENCES

(Picard Approximation)

1. K. Ito, *Differential Equations Determining Markoff Processes* (Translated from the original Japanese. First Publication in *Pan-Japan Math. Coll.No.1077 (1942)*), Kiyoshi Ito Selected Papers (D.W.Strook and S.R.S.Varadhan, eds.), Springer-Verlag, 1987, pp. 42-75.
2. S.Kawabata, *On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations*, Stochastics and Stoch. Rep. 30 (1990), 69-84.
3. G.S.Ladde and S.Seikala, *Existence, Uniqueness, and upper estimates for solutions of Mac-shane type stochastic differential systems*, Stochastic Analysis Appl. 4 (1986), 409-429.
4. P.A.Meyer, *Sur la méthode de L.Schwartz pour les e.d.s.*, Séminaire de Probabilités 25 (1991), 108-112.
5. L.Schwartz, *La convergence de la série de Picard pour les e.d.s.*, Séminaire de Probabilités 23 (1989), 343-354.
6. C. Tudor, *Approximaera succesiva a soltilor equatilor Ito cu doi parametri*, St. Cerc. Mat. 36 (1984), 50-61.
7. T. Yamada, *On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. 21 (1981), 501-515.

(Newton's method)

8. A.T.Bharucha-Reid and M.J.Christensen, *Approximate solution of random integral equations ; General methods*, Math. Comput. in Simul. 26 (1984), 321-328.
9. A.T. Bharucha-Reid and Kannan, *Newton's method for random operator equations*, Nonlinear Anal. 4 (1980), 231-240.
10. L.A.Kantorovitch and G.P. Akilov, *Functional Analysis 2nd Ed.*, Pergamon Press, Oxford and New York, 1982.
11. S. Kawabata and T. Yamada, *On Newton's method for stochastic differential equations*, Séminaire de Probabilités 25 (1990), 121-137.
12. G. Vidossich, *Chaplygin's method is Newton's method*, J.Math.Anal.Appl. 66 (1978), 188-206.
13. Y.Ouknine, *Approximation de Newton pour les équation différentielles stochastiques*, preprint.