

時間領域音響計算に用いる compact 差分と多段階積分法の最適化 (Optimization of Linear Multi- step Methods for Acoustic Wave Compu- tation)

岩津 玲磨 (Reima Iwatsu)*¹

鶴 秀生 (Hideo Tsuru)²

*¹Tokyo Denki University

²Nittobo Acoustic Engineering Corporation Ltd.

1 はじめに

音響のシミュレーションには時間領域または周波数領域において、有限差分法、有限要素法、境界要素法などの解析手法が用いられる。そのうち線形な音波の伝播のシミュレーションに関しては、従来から使われてきた FDTD 法⁽¹⁾が依然として広く用いられている。FDTD 法は、2 次中心差分 (ED2) と Leap Frog 法 (LF) によって、時間方向に staggered 配置された速度と圧力を安定に時間積分していく方法となっている。簡単に中庸な精度の解が得られるものの、高精度な解は得られない。

その一方で計算空力音響 (CAA) の分野では最近、Euler 方程式などをもとに、DRP⁽²⁾に代表される高解像度のスキームや、高精度 Compact 差分スキーム⁽³⁾と、圧縮性流体むけに開発されてきた総変動減少スキームを組み合わせて、4 次 Runge-Kutta 法 (RK4) で時間積分するような計算法⁽⁴⁾がしばしば採用されている。

そこで FDTD をもとに高精度な計算をする目的のもとに、線形多段階積分法 (LMM) を適用して、音響計算用の時間積分法の最適化をおこなった。最適化の方法は Tamm と Web による手法⁽²⁾を用いた。ここでは精度の保持に必要以上の段階数を導入することによって、そこから出てくる余分の係数の値を変数として、時間積分法のもつ実効角振動数に含まれる誤差を、対象とする振動数領域内で最小とするように、その値を定めた。時間積分に LMM を選択する理由は、時間方向に staggered 配置されている変数をそのまま Runge-Kutta 法で取り扱えないことによる。ここで扱う種類の LMM は、調べた範囲では過去の文献に取り扱われていない。ODE によく用いられる Adams-Moulton 法=Adams-Bushforth 法の予測子=修

正子対など⁽⁵⁾と異なり、時間方向に半メッシュずれた変数配置になっているため、過去の文献に取り上げられる機会がなかったものと思われる。

計算誤差は時間、空間両方の離散化から入ってくるので、空間方向にも近似度を上げ、不等間隔 4 次精度 compact 差分スキーム (CDuns4) を用いた。ただし本研究では、複雑形状の実用計算に容易に応用可能なように、ステンシルの広がりが最小であるようなスキームに限った。直交不等間隔格子を用いて複雑形状を表わす目的で、格子間隔比とこのスキームの波数に含まれる誤差の関係を調べた。差分スキームの実効波数は格子間隔が不均一なときに虚部成分をもつため、代表的な格子生成関数に対して格子間隔比と位相誤差の関係を調べて、これを目標値以下におさえるために必要な条件を求めた。

ベンチマーク・テストの結果では最適化された LMM は、従来法よりも 1 桁以上小さい誤差を示した。さらに、最適化された LMM が DRP や RK4 に対してどの程度の競争力をもつのかを調べた。

2 計算方法

2.1 不等間隔格子に対する staggered compact スキーム

1) 内点に対するスキーム

内点に対する staggered compact スキームとして最小ステンシル幅をもつ 4 次精度スキーム (CDuns4) のみを扱うことにする。

$$\alpha f'_{i-1} + f' + \beta f'_{i+1} = a(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) + \epsilon. \quad (1)$$

上式の係数は、格子間隔を用いて表わされる。精度は、滑らかな格子 $h_2 - h_1 = O(h^2)$ に対して 4 次、 $\epsilon \rightarrow O(h^4)$ 、滑らかでない格子に対して 3 次、 $\epsilon \rightarrow O(h^3)$ を示す。また、等間隔格子の場合 Padé タイプの公式と一致する。

2) 境界点に対するスキーム

FDTD の計算の仕組みを利用すると、境界点に対して 2 種類のスキームが必要となる。これらを便宜的に境界スキーム A, B と名づける。境界上で速度が定義されているものとする、圧力、速度に対してそれぞれ境界スキーム A, B が適用される。3 次精度境界スキーム A, B はそれぞれ、

$$f'_i + \beta f'_{i+1} = a(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) + b(f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) + \epsilon, \quad (2)$$

$$f'_i + \bar{\beta} f'_{i+1} = \bar{a}(f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}) + \bar{b}(f_{i+\frac{5}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}) + \bar{\epsilon}, \quad (3)$$

のように表わされる (図 1 参照)。等間隔格子に対しては、スキーム A, B はそれぞれ $\beta = -1$, $a = 2$, $b = -1$, $\bar{\beta} = 23$, $\bar{a} = 26$, $\bar{b} = -1$ となる。誤差の

主要項の係数はまったく同じ ($1/24$) だが, 左辺非対角項の係数の大きさが異なる. スキーム B の方が係数行列を解くときの条件が悪くなる. 以下の数値実験において, それは実際に誤差を大きくすることに反映される.

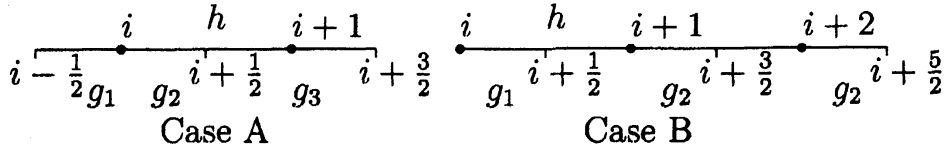


Fig. 1: Boundary at grid point i

3) 格子数と誤差

内点 4 次精度スキーム CDuns4 に境界 3 次精度スキーム A,B いずれかを組み合わせたスキームの誤差を, $y = x^8$, $y = \sin \pi x$, $0 \leq x \leq 1$ を試験関数として, 等間隔, 不等間隔 (hyperbolic) 格子の格子数を変えて求めた. スキーム A,B どちらも平均で 4 次精度を示すが, 誤差の大きさはスキーム B の方が大きい. また sine 波では 1 波長に 8 格子点あれば, 1 階導関数の誤差を 10^{-3} 程度にすることができる.

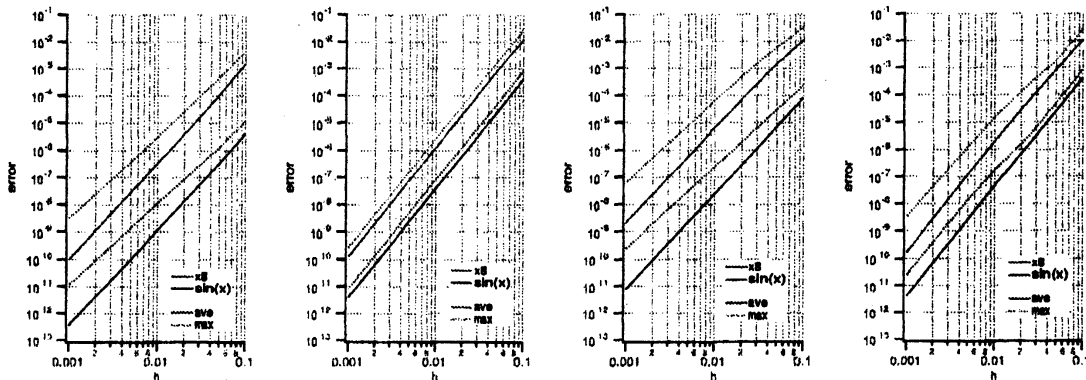


Fig. 2: Error vs h , Left : CDuns43A(even grid, hyperbolic grid), right : CDuns43B(even grid, hyperbolic grid)

つぎに同じ順番で空間誤差分布を図 3 に示す. 理論が示すとおり, 境界スキームの誤差が内部に深く浸透しないことがわかる.

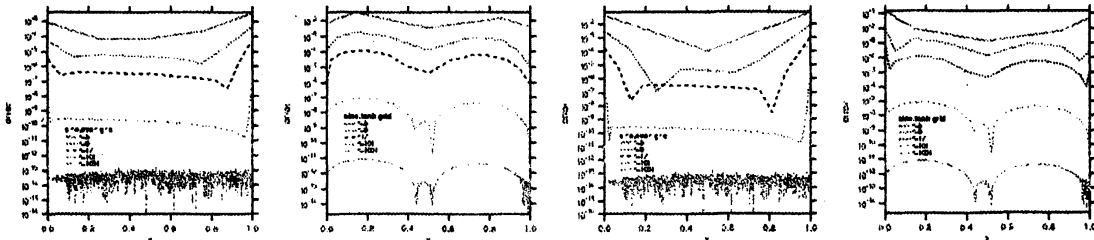


Fig. 3: Error distribution of CDuns4 + boundary scheme A (left) and B (right), Even grid and hyperbolic grid

4) 不等間隔格子上での CDuns4 の実効波数

等比数列格子 $x_{i+1} - x_i = r(x_i - x_{i-1})$, $x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}} = r(x_{i+\frac{1}{2}} - x_i)$ を例にとつて格子間隔比がスキームの実効波数 w' に及ぼす影響を調べた。それによると, $r \leq 1.02$ ならば波数 $\alpha\Delta x \leq 0.518$ の範囲で誤差を $|Re(w') - w| < 10^{-2}$, $|Im(w')| < 10^{-2}$ におさえることができる。図 4 左の 2 図は等比数列格子 ($r = 1, 1.02, \dots, 1.1$), 右 2 図は等間隔格子 ($x \leq x_i$) を等比数列格子 ($x \geq x_i$) に接続させたつなぎ目の点における実効波数を示す。

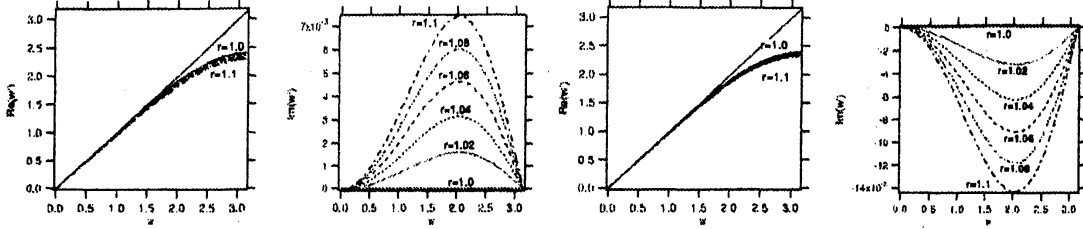


Fig. 4: Effective frequency of CDuns4 for non-uniform equi-ratio mesh;
Left: equi-ratio mesh, right: uniform mesh ($x \leq x_i$) connected to
equi-ratio mesh ($x \geq x_i$)

2.2 線形多段階積分法 (LMM) の最適化

最適化の手法には幾とおりの方法が考案されているが、基本的な考え方は、精度の保持に必要以上な数の変数を導入し、余分な自由度をパラメータとして変化させることによって、対象とする波数の範囲に対して数値積分スキームのもつ dissipation error と dispersion error を最小にしつつ、安定性の上限を最大化する点で一致する。ここでは、速度と圧力の定義点が時間方向に半格子ずらされている配置の特徴を生かしたまま LF を多段階に拡張し、Tam & Webb の方法⁽²⁾で 2,3 次精度の最適化 LMM を導いた。

2.2.1 移流方程式に対する線形多段階積分法 (LMM) の解析

1) 従来型 FDTD (Leap-Frog) 法 (M_1)

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = F^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^2}{24} f_{ttt}, \quad F = f_t \quad (4)$$

簡単のために $f = 0 (t < 0)$ と仮定して Laplace 変換をおこなうと, LF の実効角振動数 $\bar{\omega}$ は

$$-i \frac{i(e^{-i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t e^{-i\omega\Delta t/2}} \tilde{f} \approx \frac{d\tilde{f}}{dt} \equiv -i\bar{\omega}\tilde{f} \rightarrow \bar{\omega}\Delta t = 2\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right), \quad (5)$$

$$\text{Re}(\bar{\omega}\Delta t) = 2\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right), \quad \text{Im}(\bar{\omega}\Delta t) = 0 \quad (6)$$

と求まり, 実数となることがわかる. このことが, 従来型 FDTD が広く用いられてきた理由と推測される.

2) 2 段階法 (M_2)

つぎに M_1 を 2 段階に拡張し, そのとき時間ステップ $n + \frac{1}{2}$ と $n - \frac{1}{2}$ の数値流束の重み係数 b_0 を変数として変化させて, 時間積分法の性質を改善できないかどうか調べることにする. 時間積分法およびその実効角振動数は以下のようになる.

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = b_0 F^{n+\frac{1}{2}} + (1 - b_0) F^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t(b_0 - 1) f_{tt} \quad (7)$$

$$\bar{\omega}\Delta t = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}(\cos\theta + b_0(1 - \cos\theta) + i(b_0 - 1)\sin\theta)}{1 + 2b_0(b_0 - 1)(1 - \cos\theta)}, \quad \theta = \omega\Delta t \quad (8)$$

ここでは Tam & Webb による最適化法を採用した. 対象とする角振動数の範囲 η において, 時間積分法の実効角振動数の実部, 虚部に含まれる 2 乗誤差の加重平均の積分 E_1 を最小にするように b_0 の値を定める. 実部と虚部の重要さを表わす係数 σ の値は $0 < \sigma < 1$ である.

$$E_1 = \int_{-\eta}^{\eta} (\sigma \text{Re}(\bar{\omega}\Delta t - \omega\Delta t)^2 + (1 - \sigma) \text{Im}(\bar{\omega}\Delta t - \omega\Delta t)^2) d(\omega\Delta t) \quad (9)$$

$$\theta \sim 0, \quad 2\sin\frac{\theta}{2} \sim 2\left(\frac{\theta}{2} - \dots\right), \quad \cos\theta \sim 1 - \dots, \quad \sin\theta \sim \theta - \dots,$$

$$\bar{\theta} = \bar{\omega}\Delta t \quad \text{Re}(\bar{\theta}) \sim \theta, \quad \text{Im}(\bar{\theta}) \sim (b_0 - 1)\theta^2,$$

$$E_1 = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} = \frac{2}{15}(1 - \sigma)((1 - b_0)^2\epsilon^2 + 1)\epsilon^3$$

$$\frac{dE_1}{db_0} = 0 \rightarrow 2(b_0 - 1)\epsilon^2 = 0, \quad b_0 = 1 \quad (10)$$

$\theta = 0$ の近傍 $|\theta| \leq \epsilon$ で $b_0 = 1$ が E_1 を極小化する. すなわち, 角振動数が小さいときには従来法 (M_1) が最良であることがわかる.

3) 3 段階法 (M_3)

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = b_0 F^{n+\frac{1}{2}} + (2 - 2b_0) F^{n-\frac{1}{2}} + (b_0 - 1) F^{n-\frac{3}{2}} + \frac{\Delta t^2}{24} (24b_0 - 25) f_{ttt} \quad (11)$$

簡単のため ($f = 0, t < \Delta t$) と仮定して両辺を Laplace 変換し, M_3 の実効角振動数を求めると以下ようになる.

$$-i \frac{i(e^{-i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t \sum_{j=0}^2 b_j e^{-i\omega(\frac{1}{2}-j)\Delta t}} \tilde{f} \approx \frac{d\tilde{f}}{dt} \equiv -i\bar{\omega}\tilde{f} \rightarrow \bar{\theta} = \frac{2\sin(\frac{\theta}{2})}{\sum_{j=0}^2 b_j e^{ij\theta}} \quad (12)$$

ただし $\omega\Delta t = \theta$, $\bar{\omega}\Delta t = \bar{\theta}$ で, 係数 σ の値は文献 [2] に推薦されている値 ($\sigma = 0.36$) を用いた. b_0 の最適値を E_1 最小化によって決めたところ, つぎのような値, $b_0 = 1.00553341$ ($\eta = \pi/2, \sigma = 0.36$) が求まった. 積分誤差 E_1 の b_0 依存性を図 5(の左) に示す. b_0 のある値において実際に E_1 が最小となっていることが観察される. この値は対象とする角振動数の範囲によって, 表 1 のように $b_0 = 1$ のまわりで若干変化する. M_3 の実効角振動数が $0.9 \leq b_0 \leq 1.1$ の範囲でどのように変化するのかを, 実部, 虚部にわけて図 6 に示す. 最適化によって, ごくわずかな位相誤差を許容するかわりに, 全体的な偏差が少なくなっていることがわかる.

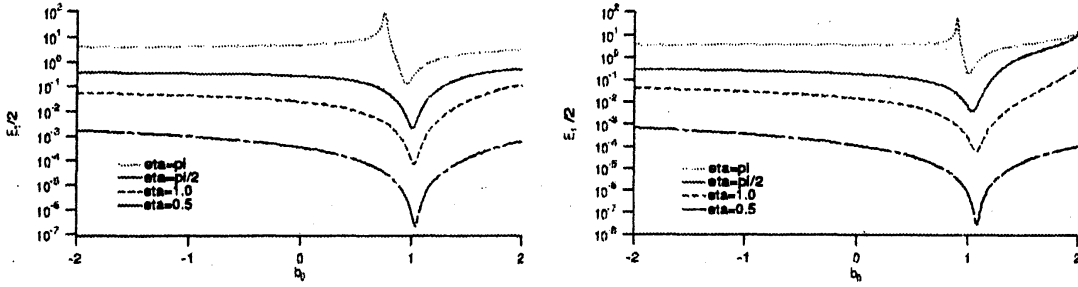


Fig. 5: b_0 dependency of integral deviation in $\bar{\theta}$ (left: M_3 , right: M_4)

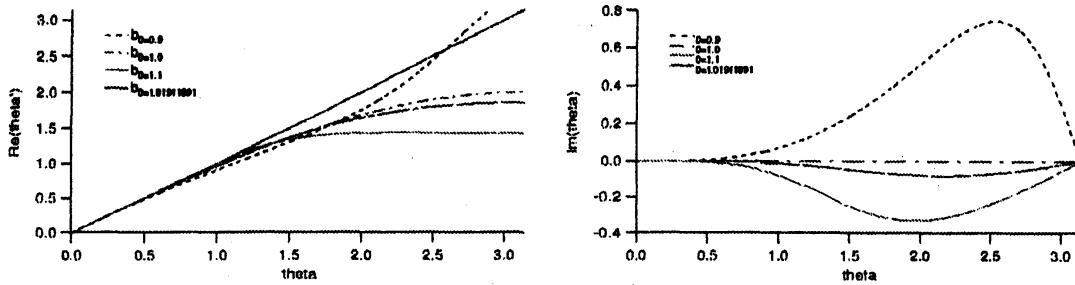


Fig. 6: b_0 dependency of real part and imaginary part of $\bar{\theta}$ (M_3)

Table 1: Influence of η on b_0

M_3	η	b_0	M_4	η	b_0
	π	0.950878859		π	c.a.1.0
	$\pi/2$	1.00553341		$\pi/2$	1.0380775
	1.0	1.01911891		1.0	1.07340406
	0.5	1.03340232		0.5	1.0843831

4) 4 段階法 (M_4)

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = \sum_{j=0}^3 b_j F^{n+\frac{1}{2}-j} + \frac{\Delta t^4}{12} (12b_0 - 13) f_{tttt}, \quad (13)$$

$$b_1 = -3b_0 + \frac{73}{24}, \quad b_2 = 3b_0 - \frac{37}{12}, \quad b_3 = \frac{25}{24} - b_0 \quad (14)$$

3 段階積分法と類似の手順によって, b_0 の最適値を E_1 最小化によって決めると $b_0 = 1.0380775$ ($\eta = \pi/2, \sigma = 0.36$) のような値が得られた. E_1 の b_0 依存性は図 5(の右), b_0 最適値の η 依存性は表 1, M_4 の実効角振動数は図 7 に示されている.

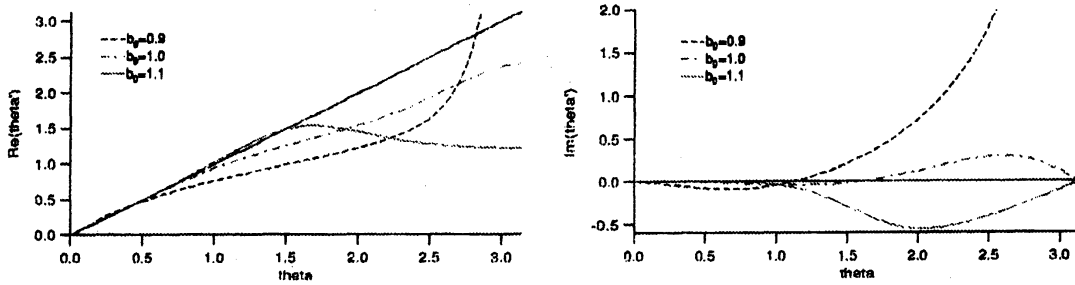


Fig. 7: b_0 dependency of real part and imaginary part of $\bar{\theta}$ (M_4)

5) 多段階法 (M_3, M_4) の安定性限界

Tam と Webb による最適化手法には, 安定性に関する考慮が含まれていない. そのために, 時間積分法の増幅率 r を計算して安定性の上限を求めた.

$$r = \frac{\tilde{f}^{n+1}}{\tilde{f}^n}, \quad r_{exact} = e^{-i\omega\Delta t}, \quad r_{M_s} = 1 - i\omega\Delta t \sum_{j=0}^{s-1} b_j e^{-i(\frac{1}{2}-j)\omega\Delta t} \quad (15)$$

$$\frac{r_{M_s}}{r_{exact}} = e^{i\omega\Delta t} - i\omega\Delta t \sum_{j=0}^s b_j e^{i(\frac{1}{2}+j)\omega\Delta t} = r(r) e^{-i\delta} \quad (16)$$

ここで $r(r)$ は増幅率比, δ は位相誤差を表わす⁽⁶⁾. 安定性の上限は $r(r) \leq 1$ で定義される. 減衰, 分散誤差上限の基準はそれぞれ $|r(r) - 1| \leq 10^{-3}$, $|\delta| \leq 10^{-3}$ と定めた. 図 8 によると, M_4 は $b_0 < 1.08$ であれば安定であるが, M_3 が $b_0 \simeq 1$ において不安定になるという結果を得た. これはあきらかに経験的事実に反する. したがって, 安定性を議論するためには, 移流方程式を 2 回組み合わせた波動方程式を対象として考えないと正しい結果に到達できない.

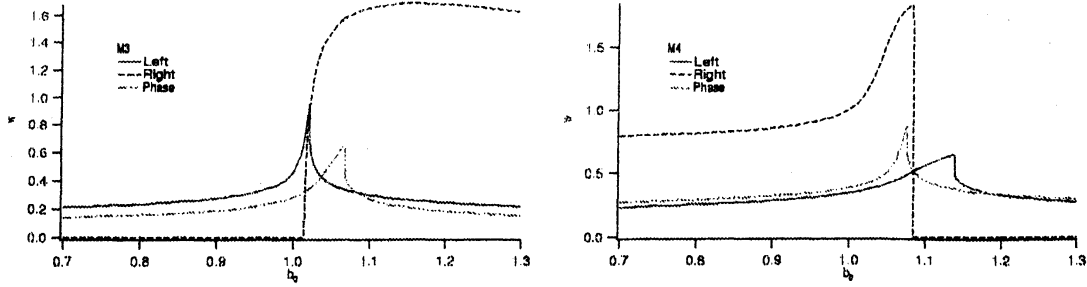


Fig. 8: Accuracy limit of amplification (red), stability limit (blue) and accuracy limit of phase error (green) vs b_0 (Left : M_3 , right : M_4), w denotes $\omega\Delta t$

2.3 波動方程式に対する線形多段階積分法の安定性解析

1) 従来型 FDTD (Leap-Frog) 法 ($M_1 \cdot M_1$)

説明のために 1 次元の場合を考える. 圧力 p に対する波動方程式に中間変数 u を導入して, 以下のように連立方程式を解く. したがって, 時間空間とも対称スキームで積分していることになる.

$$p_{tt} = c_0^2 p_{xx} \rightarrow \begin{cases} u_t = -\frac{1}{\rho_0} p_x \\ p_t = -\rho_0 c_0^2 u_x \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} \\ \frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} = -\rho_0 c_0^2 \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \end{cases} \rightarrow \frac{p_j^{n+1} - 2p_j^n + p_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c_0^2 \frac{p_{j+1}^n - 2p_j^n + p_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (18)$$

2) 線形多段階積分法 ($M_q^2 \equiv M_{r+s-1}^2 = M_s \cdot M_r$)

発展方程式 $f_{tt} = H(f)$ を積分するとき, 中間変数 g を介して $f_t = F(g)$, $g_t = G(f)$ のようにして解く. 各位の積分に多段階積分法 M_s, M_r を用いる. その結果は, $f_{tt} = H$ を 2 階の方程式に対する多段階積分法 M_{s+r-1}^2 で積分したことと同じになる.

$$f^{n+1} = f^n + \Delta t \sum_{j=0}^{s-1} b_j F^{n+\frac{1}{2}-j} + \epsilon, \quad (19)$$

$$g^{n+\frac{1}{2}} = g^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \sum_{k=0}^{r-1} c_k G^{n-k} + \epsilon', \quad (20)$$

$$f^{n+1} = 2f^n - f^{n-1} + \Delta t^2 \sum_{l=0}^{q-1} d_l H^{n-l} + \epsilon''. \quad (21)$$

ただし $H(f), F(g), G(f)$ は $H \equiv FG = GF$ をみたし, $q = s + r - 1$, $d_l = \sum_{j=0}^l b_{l-j} c_j$ である.

M_3, M_4 の組みあわせに対する M_q^2 の段数と誤差の主要項を表 2 に示す.

Table 2: 2-parameter family of $M_q^2 = M_s \cdot M_r$.

s	r	q	ϵ''
3	3	5	$\Delta t^2(b_0 + c_0 - \frac{25}{12})f^{IV}$
4	4	7	$\Delta t^3(b_0 + c_0 - \frac{13}{6})f^V$

3) 波動方程式に対する線形多段階積分法 (LMM) の解析

M_s, M_r の組み合わせ ($M_q^2 \equiv M_{s+r-1}^2 = M_s \cdot M_r$) に対する実効角振動数は以下ようになる.

$$\frac{r_{M_{q-1}^2}}{r_{exact}} = 2e^{i\omega\Delta t} - e^{i2\omega\Delta t} - (\omega\Delta t)^2 \sum_{l=0}^{q-1} d_l e^{i(l+1)\omega\Delta t} = r_{(r)} e^{-i\delta} \quad (22)$$

$$q = s + r - 1, d_l = \sum_{j=0}^l b_{l-j} c_j, b_j = c_j \quad (23)$$

安定性, 減衰, 分散誤差上限の基準を $r_{(r)} \leq 1$, $|r_{(r)} - 1| \leq 10^{-3}$, $|\delta| \leq 10^{-3}$ のように設定して, それらの b_0 依存性を調べると図 9 のようになる. 安定領域で減衰, 分散誤差上限を大きくするような b_0 の範囲は, $M_3 \cdot M_3$ に対しておおよそ $1.005 \leq b_0 \leq 1.043$, $\omega\Delta t \leq 0.4$, $M_4 \cdot M_4$ に対して $1.02 \leq b_0 \leq 1.676$, $\omega\Delta t \leq 0.4$ となる. したがって, 上で導出した b_0 の最適値は安定領域に入っていることが示された.

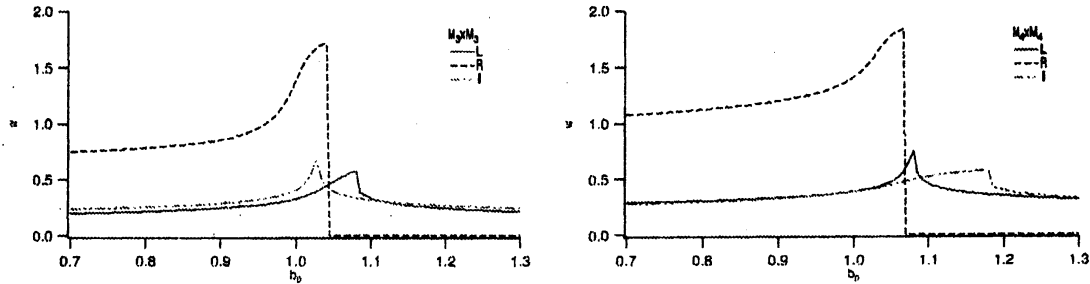


Fig. 9: Accuracy limit of amplification (red), stability limit (blue) and accuracy limit of phase error (green) vs b_0

3 数値計算結果

3.1 1次元ベンチマーク問題

移流方程式の初期値問題

$$f_t + f_x = 0, \quad (24)$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \exp\left(-\ln(2) \left(\frac{x}{3}\right)^2\right), \quad -20 \leq x \leq 450, \quad \Delta x = 1.0 \quad (25)$$

の解⁽⁴⁾を各種スキームを用いて計算して、 $t = 400$ において厳密解と図10に比較した。DRPは文献⁽²⁾の係数を用いた。RK4CKはCarpenterとKennedyによる5段階4次精度最適化Runge-Kutta法⁽⁷⁾で、最小ステンスルをもつ4次精度regular compactスキームと組みあわせて使用した。従来法(FDTD)はCourant数1.0で最良の結果を示し、波形をほとんど変えず、群速度がわずかに0.3%小さい。DRPはCourant数0.25以下で安定であった。最適化RK4はCourant数1.98まで安定に積分できた。従来法のE2をCDs4に置換するだけで改善がみられた。2種類の最適化された多段階積分法を比べると、 M_3 の方が M_4 より良かった。 M_3 で計算された解はCourant数0.2以下で厳密解とほとんど一致する。

数値解と厳密解の偏差の2乗和 dev_2 をCourant数0.1において最小とした b_0 の値は $M_3 \cdot M_3, b_0 = 1.0101515$ $M_4 \cdot M_4, b_0 = 1.0405254$ であった。最適化によって得られた値 $M_{3opt}, b_0 = 1.00553341, M_{4opt}, b_0 = 1.0380775$ より若干小さめであった(図11)。

dev_2 をCourant数に対してプロットしたのが図12である。RK4の偏差がほぼ一定で広い安定領域が目立っている。従来法(FDTD)はCourant数1をこくわずに超える約1.008まで安定である。LMMの安定限界はCourant数0.83程度である。しかしLMMはFDTDよりも1-3桁誤差が小さい。注目されることは、Courant数0.2以下で $M_3 \cdot M_3$ がRK4, DRPよりも正確な点である。

3.2 球による3次元波面反射

音源(S点)から1(m)の点に中心(O点)がある半径 $a = 0.2$ (m)の球からの波面反射を従来法とLMMで計算して得られた数値解を厳密解と比較した⁽⁸⁾。緒元は以下のとおりである。

平均格子間隔: x, y, z 方向 $\Delta x = 0.02$ (m)

等間隔格子の場合: $\Delta x = 0.02$ (m)

不等間隔格子の場合: $\Delta x_{min} = 0.0083$ (m)

格子点数: 101^3

時間刻み: $\Delta t = 0.01$ (msec) (固定)

音の振動数: 500 (Hz), 1000 (Hz), 2000 (Hz)

厳密解は、無限級数を加算する順序と数値誤差の入り方、項数に十分注意

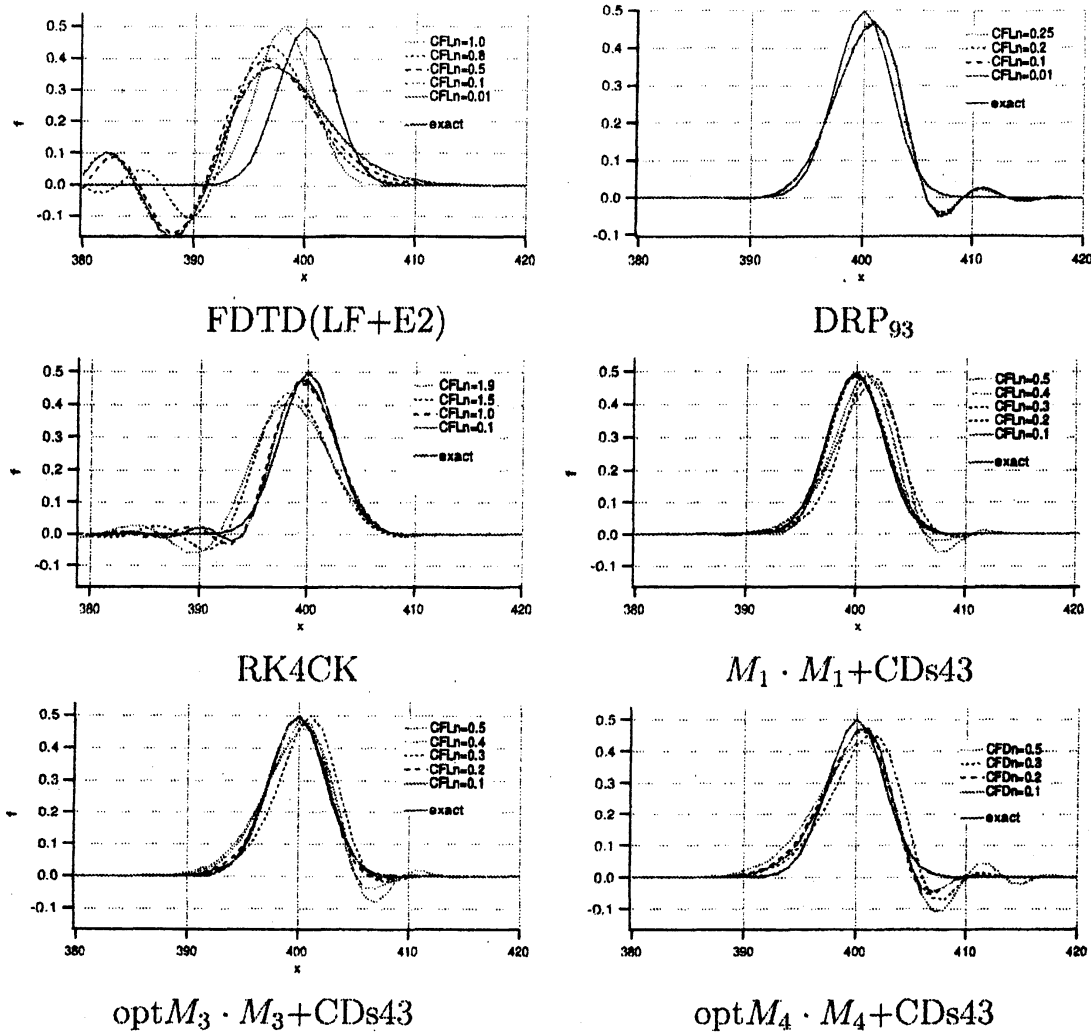


Fig. 10: Comparison of FDTD, DRP, RK4CK, $\text{opt}M_3 \cdot M_3$ and $\text{opt}M_4 \cdot M_4$

を払いながら以下の表式を数値計算した.

$$p = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) h_n^{(1)}(kr_>) [j_n(kr_<) - a'_n h_n^{(1)}(kr_<)] \quad (26)$$

$$\theta : \text{angle between OS and OP}, \quad (27)$$

$$\text{coefficient } a'_n = j'_n(ka)/h_n^{(1)'}(ka), \quad (28)$$

$$r_> : \text{larger of } r_{OS} \text{ and } r_{OP}, \quad r_< : \text{smaller of } r_{OS} \text{ and } r_{OP} \quad (29)$$

P_n : Legendre 関数, $h_n^{(1)}$: 球 Hankel 関数, j_n : 球 Bessel 関数, P : 観測点.

代表的な結果を図 13 に周波数領域において表示した. 図 13(右上) より従来型 FDTD と今回の方法 LMM では最大 1.5dB 程度の差があること, 下左右の図を比較することによって, LMM では FDTD と比べると音源の

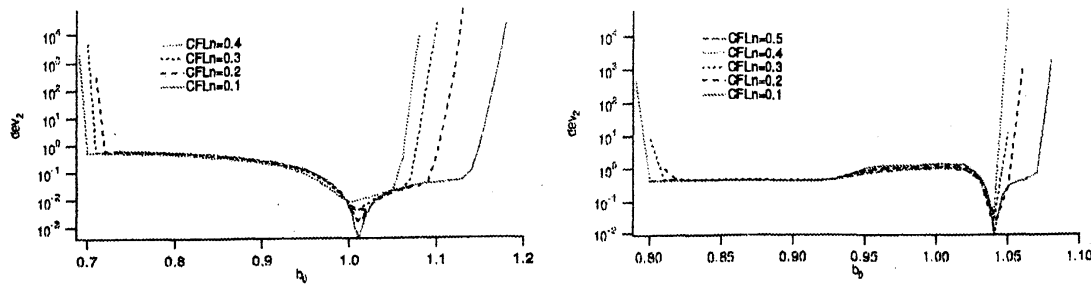


Fig. 11: $dev_2 = \sum |f_n - f_{exact}|^2$ vs b_0

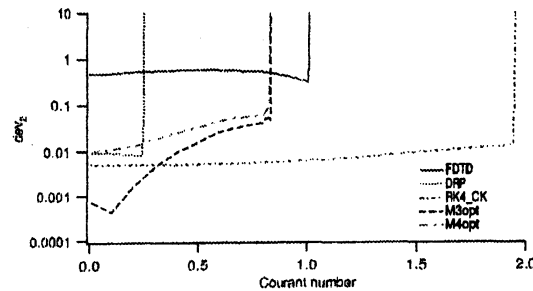


Fig. 12: Courant number vs. dev_2

近傍、球の裏側などで厳密解との差が1-2dB小さくなっていることが指摘できる。このことから現実に近い3次元計算でも、従来法よりもLMMとcompact差分を組み合わせた方法では改善がみられることがわかった。

4 おわりに

結果を要約すると、

- 1) 4次精度 staggered compact スキームと最適化3段階法 (M_{3opt}) は、従来型FDTD法より1次元のベンチマーク問題に対して1-2桁少ない誤差を示した。
- 2) 移流方程式に対する最適化多段階法は、波動方程式に対しても安定領域および最適と考えられる領域にある。
- 3) 本計算法はCourant数0.2以下でDRPおよび最小ステンシル幅の4次精度 compact スキームと組み合わせたRK4CKより正確である。
- 4) 本計算法は既存のFDTD codeの改良に適している。

ところで、移流方程式をLMMによって、続けて2回時間を進めると、波動方程式を1回時間積分したと同じことになる ($M_{p+q-1}^2 = M_p \cdot M_q$)。そこで、移流方程式の時間積分に対して最適化されたLMMは、波動方程式の時間積分に対しても最適解を与えるのかという疑問が生じる。また、ある程度 p, q の値が大きくなると、波動方程式にLMMを用いる方が

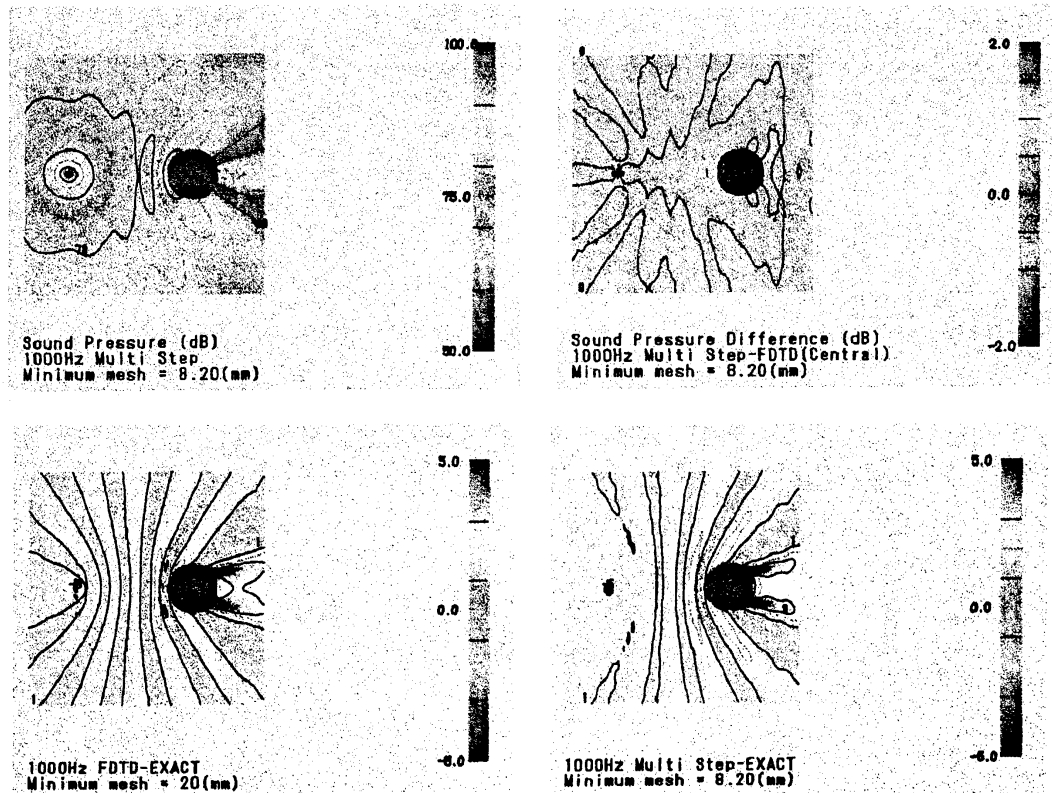


Fig. 13: Sound pressure distribution in the frequency domain at 1000 (Hz) and difference in p between FDTD and present ($M_3 \cdot M_3 + \text{CDuns4}$ with $b_0 = 1.04$) (upper), Δp (deviation from the exact solution) shown in (dB) for FDTD + CDuns4 and present method (lower)

計算時の容量が少なくすむ。このように中間変数 v を使用する方法と、速度を使わずに p (または ρ) についての波動方程式を直接解く方法のどちらが有利かについては不明である。さらに安定性限界と空間スキームの実効波数を最適化する際 考慮に入れる必要がでてくる。

そこで今後の課題として、

- 1) 波動方程式に対する線形多段階積分法 (LMM) の最適化
- 2) staggered compact スキームの最適化 (anisotropy, eigen values, 境界条件)
- 3) 空間スキームの実効波数を考慮にいった最適化法を検討する予定としている。

検討の結果として、時間発展の実効角振動数を多項式で近似する Runge-Kutta 法 (RK) ほどの広い絶対安定領域は望めないが、DRP 的な波数の再

現性をもつスキームと組み合わせたときに、ある程度の Courant 数の範囲においては既存の 4 次精度 Runge-Kutta 法よりは正確な時間積分法をみつけることが可能であると予想される。このような最適化された LMM は、Runge-Kutta 法よりは memory を使うが、flux の計算に時間のかかるような場合には RK よりも速く計算が可能である。

参考文献

- (1) Yee, K.S. "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Transactions on Antennas and propagation, vol.AP-14 no.3, pp.802-807, 1966.
- (2) Tam, C.K.W. and Webb, J.C. "Dispersion-relation-preserving schemes for computational acoustics," J. Comput. Phys. vol.107, pp.262-281, 1993.
- (3) Lele, S.K., "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution," J. Comput. Phys., vol.103, pp.16-42, 1992.
- (4) Hardin, J.C. *et al.* (Eds.) "ICASE/LaRC Workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics," NASA CP-3300, 1995.
- (5) Shampine, L.F. "Numerical solution of ordinary differential equations," Chapman & Hall (New York), pp.187-198, 1994.
- (6) Fu, F.Q., Hussaini, M.Y. and Manthey, J.L. "Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics," J. Comput. Phys., vol.124, pp.177-191, 1996.
- (7) Carpenter, M.K. and Kennedy, C.A., "Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes," NASA TM 109112, 1994.
- (8) 1. Iwatsu, R., Tsuru, H. and Hirose, K., "Application of optimized compact finite difference schemes on uneven grid to the computation of acoustic wave propagation," *proc. The Thirteenth International Congress on Sound and Vibration*, CD-ROM(SS38-3, 8 pages) Vienna, Austria, July 2-6, 2006.