

2次元写像と複素力学系

田中 昌昭 (川崎医福大), 阿部 利則 (岡大工), 川部 健 (岡大理)

(1995年5月22日受理)

目次

1 はじめに	259
2 大域的性質	260
3 複素解析性	263
4 一般化 Cauchy-Riemann 条件	266
5 複素解析的写像の大域的な性質	270
6 複素力学系の物理像	273
7 まとめ	279

1 はじめに

力学系の研究の中心課題は微分方程式

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

で記述される系の挙動を明らかにすることにある。ここで $\mathbf{X}$ は位相空間 $\mathbf{R}^n$ の中の或るベクトルである。(1) 式を解析的に解くことができれば問題ないが、我々が遭遇する多くの物理現象では (1) 式が解析解を持たない場合がほとんどである。そのような場合には、Poincaré によって導入された方法が威力を発揮し、多くの成果をあげてきた [1]。その方法とは (1) 式によって決定される $\mathbf{X}$ の軌道が位相空間内にとられた $n-1$ 次元のある超平面と交差する点の軌跡を調べることである。このような超平面を Poincaré 切断面といい、 $\mathbf{X}$ の軌跡が Poincaré 切断面と交差する点を $P_0, P_1, P_2, \dots$ とした場合、 P_n から P_{n+1} への変換は 1 つの連続的な写像とみなすことができる。これは Poincaré 写像と呼ばれ、(1) 式で記述されるもとの系の運動と位相的に同等な性質を持っている。そのため、Poincaré 写像を調べることにより、もとの系の力学的性質が解明できる。さらに、Poincaré 写像はもとの微分方程式よりも次元が 1 つ下がっているため、その解析も比較的容易に行える。

自由度の大きな系であっても、系の状態がある状態から別の状態に分岐する遷移点近傍では少数モードだけが励起され、本質的に少数自由度の力学系として記述される場合が多い。Poincaré の方法は、このような大自由度系から本質的に重要な少数自由度を抽出するための武器になる。このよう

な理由から低次元の写像，特に1次元写像や2次元写像が1970年代後半から精力的に研究され，多くのことが明らかにされてきた[1],[2],[3].

我々は複素変数の写像

$$Z \mapsto F(Z, C) \quad (2)$$

を取り扱う，いわゆる複素力学系の研究を行ってきた．ここで Z は複素変数で， C は複素パラメタである．言うまでもなく，写像(2)はGauss平面から実数平面上の点 (x, y) への変換

$$Z = x + iy \quad (3)$$

によって2次元写像に帰着できる．ところが複素写像によって記述される系の挙動は，通常の2次元写像のそれとは類似点はあるものの，次の章で示すようにdrasticな違いを見せるのである．

ここで”通常の”という修飾語は，これまでに多くの物理学者が2次元写像の性質を究明すべく提示してきたモデルを指し示している．そのようなモデルの多くは，背後に対応する物理現象が存在し，したがって物理的に意味のある2次元写像である．それに比べて，複素力学系の示す性質は物理学者の目からは奇異に映る．それゆえ，複素力学系を数学あるいはコンピュータの玩具とみなし，物理研究の対象から排除してきた感が拭えない．しかし，複素力学系も本質的には2次元写像なのである．本論文における主眼はここにある．

すなわち，

1. 複素力学系と通常の2次元写像を隔てるものは何か？
2. 複素力学系で記述され得るような物理現象は存在するのか？
3. もし，存在しないのであればそれは何故か？

が，我々が提起する問題である．

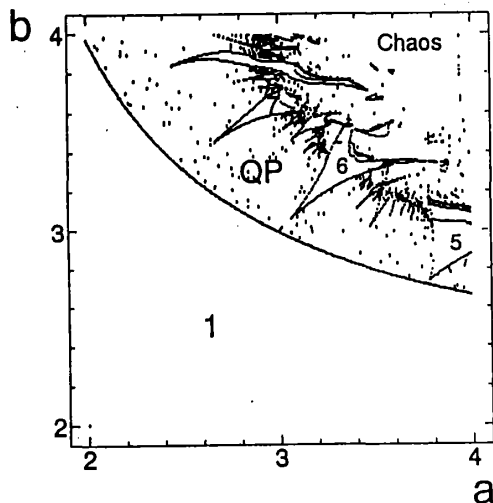
次章では，通常の2次元写像と複素力学系の大域的な性質の違いを分岐図を用いて明らかにする．§3では，与えられた2次元写像が複素力学系であるか否かを判定する条件について考察する．このような条件として，一般的にはCauchy-Riemannの条件が知られているが，Klein[4]による反例とMetzlerら[5]によるその解釈を紹介し，あわせてMetzlerらとは別の観点から行った我々の解析方法を述べる．続いて§4では，判定条件を任意の2次元写像に拡張した一般化Cauchy-Riemann条件を導く．§5では，一般化Cauchy-Riemann条件によって厳密に定義された複素力学系の大域的な性質を，Normal Forms理論，およびそれから帰結されるHopf半径のパラメタ依存性を用いて明らかにし，分岐図に現れる周期解領域の面積についてのスケーリング則を説明する．続く§6では，複素力学系から通常の2次元写像に連続的に変化する簡単なモデルを使って複素力学系の物理像について考察する．最後に，§7で本論文を要約し，今後に残された課題について言及する．

2 大域的性質

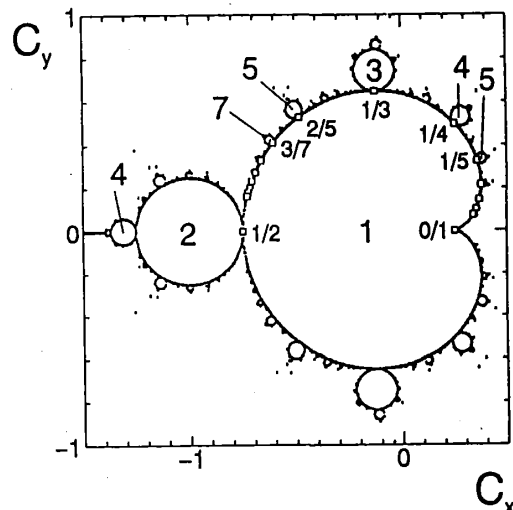
力学系の示す挙動の大域的な性質を調べるために，しばしば分岐図が用いられる．分岐図とは，系を制御するパラメタを変化させたとき，最終的にどのような軌道に吸引されていくかを図示したものである．ここで”最終的に吸引されていく軌道”と書いたが，これは位相空間の体積が運動とともに減少するような散逸系について言えることで，このような軌道はアトラクタと呼ばれている．

図 1: Bifurcation diagrams of a) Lauwerier's map and b) Quadratic map

a) Lauwerier's Map



b) Quadratic Map



我々が対象としているのは散逸系であることを断っておきたい。アトラクタには固定点，周期軌道，準周期軌道，そしてカオス軌道がある。そして分岐図は，パラメタ空間の領域を対応するアトラクタによって分けした図である。

図 1a. に通常の 2 次元写像の分岐図を示す。2 次元写像として Lauwerier の写像 [2]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n(1 - x_n - y_n) \\ y_{n+1} &= bx_n y_n \end{aligned} \quad (4)$$

を例として取り上げたが，好んで研究の対象とされる結合ロジスティック写像 [6],[7] や 2 次元写像ではないがサインサークル写像 [8] も本質的には同様の分岐図を示すことを指摘しておく。写像 (4) には a と b の 2 つの制御パラメタがあるので，パラメタ空間は 2 次元平面になる。このようにパラメタ空間が 2 次元の系を余次元 2 の系という [1]。もっともパラメタが 2 つあっても本質的にパラメタが 1 つの場合と同等な系は余次元 2 とは呼ばない。図 1a. から分かるように，写像 (4) は余次元 2 の系である。すなわち，パラメタを 1 次的に変化させた場合，その変化のさせ方に応じて異なった分岐が見られる。図 1a. において数字が記入された領域は，そのパラメタ領域に対応するアトラクタが周期軌道であることを表し，数字はその周期である。記号 QP は準周期軌道の領域であることを意味している。この分岐図を地図に例えて眺めて見よう。固定点領域の大陸（図中の 1 の領域）の上に準周期領域の海が広がり，その海の中には無数の周期領域の島が浮かんでいる。この島は Arnold の舌と呼ばれるもので，その島に付随する周期はある明確な規則にしたがって現れている。もっとも目立つものでは，図の右下から左上に向かって周期が 5, 6, 7, ... と増加している。また，図には数字を記入していないが，例えば周期 5 と 6 の間には周期 $5+6=11$ の島が存在する。これは周期加算則と呼ばれ [10],[9]，一般的には m -周期領域と n -周期領域の間に $(m+n)$ -周期領域が現れる。さて，Arnold の舌は図の右上に向かうにしたがって次第に重なりはじめ，やがてカオス領域が現れる。このとき，Arnold の舌の付け根の辺りには周期倍加現象が見られる。つまり， n -周期の舌は $n \cdot 2, n \cdot 2^2, n \cdot 2^3, \dots$ と周期が次第に倍加していき，最終的にはカオスに至る。これは代表的なカオスへのシナリオである Feigenbaum の周期倍分岐 (period-doubling bifurcation) である [11]。

次に複素写像の分岐図を見てみよう。図 1b. は代表的な複素写像である Quadratic Map

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad (5)$$

の分岐図で、創始者の名にちなんでマンデルブロー集合 (Mandelbrot set) と呼ばれている。図 1a. と同様に、図中の数字は周期アトラクタの周期を表している。特筆すべきは、分岐図の構造に見られる自己相似性で、分岐図の一部を拡大することにより、もとの構造と同じ構造が際限なく繰り返されている。この性質はフラクタルと呼ばれ、コンピュータなくしては生まれ得なかった概念である。そして、今日では科学の様々な分野においてこのフラクタルが登場し、新しい解決方法を提供する道具として注目を集めている。複素写像の分岐図の第 2 の特徴として、準周期領域やカオス領域が見られないことが挙げられる。とはいっても、実際に準周期領域やカオス領域が存在しないわけではない。事実、実軸上では写像 (5) は有名な 1 次元写像であるロジスティック写像 [12] に帰着され、この写像はカオスを生み出すもっとも簡単な 1 次元写像として知られている。また、写像 (5) は特別なパラメタの値に対してジークルディスクと呼ばれる準周期軌道を生じる [13]。通常の 2 次元写像との相違点は、準周期領域やカオス領域が分岐図中で有限な測度を持って現れないという点である。

図 1b. のマンデルブロー集合は、ハート形をした cardioid (これは固定点領域である) の周りに無数の周期領域の円盤が張り付いており、そのまた円盤の周りにも無数の円盤が…といった具合に延々と同じ構造を繰り返している。そして、その外側は軌道が発散する領域になっている。2 次元写像との対応からいえば、この円盤は Arnold の舌である。そして、Arnold の舌は物理的には共鳴状態と解釈できる。つまり、異なる振動数を持った 2 つの振動子が非常に弱い相互作用を通して結合している場合、その振動数比が無理数であれば系は準周期運動を示すであろう。ところが、相互作用が増加して 2 つの振動子が同期すると、系の運動は周期運動になる。つまり、共鳴が起きているのである。このような状態をモードロッキングと呼んでいる。このような観点から見ると、複素写像は共鳴するか、さもなければ発散するといった、物理的に考えると極めて異常な性質を示すのである。

次に、周期加算則について見てみよう。2 次元写像と同様に、複素写像においても周期加算則が成立する。しかも、2 次元写像よりも明瞭である。cardioid に張り付いた円盤に注目してみる。cardioid の真上に (真下も同様) 周期 3 の円盤がある。そして cardioid に沿って左側に周期 3, 5, 7, … の周期列があり、右側には 3, 4, 5, … の周期列がある。この周期加算則のメカニズムは以下のように簡単に説明できる。まず、cardioid は次式で与えられる。

$$C = \frac{e^{i2\pi\Omega}}{2} \left(1 - \frac{e^{i2\pi\Omega}}{2} \right). \quad (6)$$

ここで Ω は $[0, 1)$ 区間の実数で cardioid 上の位置を表すパラメタである。図中の cardioid と円盤の接合部に描いた小さな四角は、その傍らにある有理数の Ω に対する C の位置を示している。図から明らかのように、有理数の分母と円盤の周期は一致している。2 つの有理数 $1/2$ と $1/3$ の間には有理数 $2/5$ があり、したがって対応する周期 2 の円盤と周期 3 の円盤の間に周期 5 の円盤が存在する。一般に、2 つの有理数 q/p と r/s の間には $(q+r)/(p+s)$ という有理数が存在するので、 p -周期領域と s -周期領域の間には $(p+s)$ -周期領域が現れることになる。すなわち、周期加算則は有理数のこのような性質が、写像を通して表面化しているだけなのである [9]。2 次元写像の場合も事情は全く同じである。ただ、複素写像の場合はこの関係が非常に整然としている。あまりに規則的なので、何か普遍的なスケーリング則があるのではないかと期待される。事実、スケーリング則は存在する [14]。先ほどの 3, 5, 7, … という周期列に注目してみよう。これは、2 つの有理数 $1/1$ と $1/2$ から生成され

表 1: 2次元写像と複素写像の特徴の類似点・相違点

写像	2次元写像	複素写像
準周期・カオス領域の測度 分岐 周期加算則 その他の特徴	有限 周期倍分岐 存在する Ruelle-Takens のシナリオ 実験による検証	0 周期 n 倍分岐 存在する 周期領域がフラクタル 発散領域を除いていたる ところモードロッキング

る有理数 $(k+1)/(2k+1)$, $k=1,2,3,\dots$ に対応する周期列で、我々は $(2k+1)$ -周期列と呼んでいる。この場合、周期領域の面積 $S(k)$ は k に対して $S(k) \sim k^{-4}$ という関係がある。同様に、周期列 $2,3,4,\dots$ は、2つの有理数 $0/1$ と $1/1$ から生成される有理数 $1/(k+1)$, $k=1,2,3,\dots$ に対応しており、その領域の面積は $S(k) \sim k^{-6}$ のようにスケールされる。我々はこれを k -周期列と呼んでいる。

最後に、2次元写像の周期倍分岐に対応する分岐について触れておく。複素写像では、周期倍分岐は一般化されて、周期 n 倍分岐 (period n -tupling bifurcation) となっている。すなわち、cardioid の $\Omega = m/n$ の点から n -周期の円盤が現れ、さらにその円盤の境界線上の $\Omega_{m/n} = m/n$ の点から n^2 -周期の円盤が現れ…といった具合に周期が $1 \rightarrow n \rightarrow n^2 \rightarrow n^3 \dots$ と次々に n 倍されていく分岐である。Cvitanović は1次元写像で行った繰り込み群の方法を複素写像に適用し、Feigenbaum の普遍定数 α, δ を各々の n に対して計算している [15]。つまり、周期倍分岐は周期 n 倍分岐の $n=2$ の特殊な場合と考えられる。

以上のように、この章では通常の2次元写像と複素写像の分岐図を通して、それらの大域的な性質の類似点および相違点を見てきた。表 1. にそれらをまとめておいたので参照されたい。この章を終えるにあたって次のことを指摘しておく。通常の2次元写像のモデルが示す数々の性質は実際の実験においても確認されている。特に、パラメタを図 1a. の左下から右上に変化させていった場合の系の分岐の様子は、固定点（定常状態）→準周期運動→モードロッキング（共鳴状態）→カオスという、Ruelle-Takens が描いたシナリオになっており [16]、多くの実験家がこれを検証している [3]。ところが、複素写像に特徴的な性質つまりフラクタルな境界線、準周期領域やカオス領域の測度がゼロ、周期 n 倍分岐などは、我々の知る限りでは実験において観測されていない。

3 複素解析性

前節で見てきたように、通常の2次元写像と複素写像では、その大域的な性質に大きな違いがある。複素写像も変換 (3) によって2次元写像に帰着できるので、この違いは2次元写像が複素写像的なものとそうでないものにグルーピングできることを示唆している。そのようなグルーピングの判定条件として Cauchy-Riemann の条件が思い出される。つまり、複素写像を変換 (3) によって2次元写像

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (7)$$

の形に書き表したとき, f, g は Cauchy-Riemann の関係式

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{\partial g}{\partial x}\end{aligned}\quad (8)$$

を満足している. 逆に, Cauchy-Riemann の関係式 (8) を満足する 2 次元写像は, 複素写像に表現できる. このような写像は複素解析的写像と呼ばれている. 事実, (5) 式で与えられる Quadratic Map を (3) 式によって 2 次元写像で表すと

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + c_1 \\ y_{n+1} &= x_n y_n + c_2\end{aligned}\quad (9)$$

となるが, これは Cauchy-Riemann の関係式を満たしている.

次に, 写像が複素解析的であることの意味を考えてみよう. 写像 (7) のヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\quad (10)$$

であるが, Cauchy-Riemann の関係式 (8) を考慮すると, これは動径方向の伸縮を伴う回転行列であることが分かる. つまり, 複素解析的写像は線形の範囲内ではあらゆる点を, その点で定まる伸縮率と回転角で伸縮回転させる写像だと言える. ただ, 例外的にヤコビ行列 J の各成分が 0 になるような点においてはこの限りではない. このような点は写像の特異点と呼ばれている. 複素解析的でない写像の場合でも, ヤコビ行列 J が伸縮回転を表すような点は存在し得る. しかし, 一般的にそのような点では, わずかにその点からずれると, もはやヤコビ行列が伸縮回転行列ではなくなるであろう. 特異点を除くいたるところでヤコビ行列が伸縮回転を表すというのが複素解析的な写像の特徴であり, また 2 次元写像に対する制約にもなっている.

Cauchy-Riemann の関係式を満たす 2 次元写像は複素解析的な写像であった. それならば, この関係式を満足しないような写像は通常の 2 次元写像が示すような性質を持っていると言ってよいだろうか. 答は否である. Klein は Cauchy-Riemann の関係式を満たさない

$$\begin{aligned}x'_{n+1} &= 2x'_n y'_n - y_n'^2 + c_1 - c_2/\sqrt{3} \\ y'_{n+1} &= 2x'_n y'_n - x_n'^2 + c_1 + c_2/\sqrt{3}\end{aligned}\quad (11)$$

という写像を考え, 分岐図が図 1b. のマンデルブロー集合とほぼ等価になることを数値計算によって示した [4]. そして, マンデルブロー集合を得るのに複素解析性は必ずしも必要ではないらしいと結論した.

これに対して Metzler らは, 線形変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 1 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad (12)$$

によって Quadratic Map (9) が Klein の写像 (11) に変換されることを示した [5]. このように, Quadratic Map から線形変換によって移される 2 次元写像を, 彼らは Quadratic Map に共役な写像と呼び, これらの写像が生み出すマンデルブロー集合やジュリア集合がもとの写像のものと本質的に同等であることを示した. さらに, 彼らは一般の 2 次形式の 2 次元写像が Quadratic Map に共役であるための条件を与えた.

Metzler らの変換 (12) は、写像 (9) と (11) のパラメタ c_1, c_2 の関係に注目したものである。さらに、彼らの議論は 2 次形式の写像に限定されていた。そこで、一般の 2 次元写像に対して (12) 式に相当する変換を求めるにはどうすればよいかが問題となる。これに対して我々が行った解析方法を以下に述べる。

(2) 式で与えられる任意の複素解析的な写像を考える。この写像の不動点を Z_f とし、その点を原点とするような新しい座標系 $\zeta \equiv Z - Z_f$ でこの写像を書き直すと

$$\zeta \mapsto \left. \frac{dF}{dZ} \right|_{Z_f} \zeta + N.L.T. \quad (13)$$

となる。ここで $N.L.T.$ は非線形項である。この写像を複素変数への変換式 (3) によって (7) 式のように 2 次元写像で表現すると、 $\zeta = \xi + i\eta$ とおくことにより

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto J_f \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + N.L.T. \quad (14)$$

となる。ここで J_f は固定点 $Z_f = x_f + iy_f$ におけるヤコビ行列で、写像 (14) は複素解析的な写像であるから伸縮回転行列である。したがってその固有値 λ は複素数で、 $|\lambda|$ が伸縮率を表し、 $\arg \lambda$ が回転角を表す。一方、これを複素表現 (13) で見ると、線形の範囲で ζ は $dF/dZ|_{Z_f}$ 倍されているので、 ζ は Gauss 平面上で動系方向に $|dF/dZ|_{Z_f}|$ 倍され、角度 $\arg dF/dZ|_{Z_f}$ だけ回転する。したがって

$$\lambda = \left. \frac{dF}{dZ} \right|_{Z_f} \quad (15)$$

と考えてよい。

次に、上で述べた写像に共役な 2 次元写像

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= f'(x'_n, y'_n) \\ y'_{n+1} &= g'(x'_n, y'_n) \end{aligned} \quad (16)$$

を考える。ここで、共役な写像の定義から (x', y') は (x, y) から線形変換 T によって

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (17)$$

のように関係づけられる。この写像の固定点 (x'_f, y'_f) が原点となるような新しい座標 $\xi' \equiv x' - x'_f, \eta' \equiv y' - y'_f$ で (16) 式を書き換えると

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \mapsto J'_f \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} + N.L.T. \quad (18)$$

となる。ここで J'_f は固定点 (x'_f, y'_f) における写像 (16) のヤコビ行列で、 J_f とは $J'_f = TJ_fT^{-1}$ という関係がある。線形変換によって固有値は不変であるから、 J'_f の固有値は関係式 (15) の λ に一致する。また、固定点は式 (17) によって変換されるので、(15) 式は

$$\lambda = \left. \frac{dF}{dZ} \right|_{T^{-1} \begin{pmatrix} x'_f \\ y'_f \end{pmatrix}} \quad (19)$$

と書くことができる。これが変換 T を決定する方程式である。Klein の写像 (11) を例にとって (19) 式から変換 T を求めてみよう。この場合

$$J'_f = \begin{pmatrix} 2y'_f & 2x'_f - 2y'_f \\ 2y'_f - 2x'_f & 2x'_f \end{pmatrix} \quad (20)$$

で、その固有値は $\lambda = x'_f + y'_f + i\sqrt{3}(-x'_f + y'_f)$ である。一方、 $F(Z) = Z^2 + C$ であるから (15) 式は $\lambda = 2Z_f = 2(x_f + iy_f)$ となる。 λ に対するこの 2 つの表式を比較することによって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (21)$$

という関係が得られる。これは Metzler らの変換 (12) に一致する。

我々の方法によれば、与えられた 2 次元写像が複素解析的な写像に共役であるならば、原理的には (19) 式によって、Cauchy-Riemann の関係式を満たす 2 次元写像へ変換する線形変換 T を求めることができる。これは、Metzler らがパラメタの関係から変換 T を決定したことに比べ、はるかにシステマティックである。そればかりか、2 次形式の写像だけでなく、一般の写像に対してこの方法は適用できる。しかし、その 2 次元写像が複素解析的な写像に共役であるか否かを判定する問題は相変わらず未解決なままである。この問題に関して Klein は彼の論文の中で「恐らく一般化された Cauchy-Riemann の条件が定式化され得るだろう」と述べている [4]。次節において、我々はその一般化された Cauchy-Riemann の条件を導く。

4 一般化 Cauchy-Riemann 条件

この節では、与えられた任意の 2 次元写像

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (22)$$

が複素解析的な写像に共役であるかどうかを判定する一般的な条件を導出する。

2 次元写像を複素表現する場合には、通常、(3) 式が用いられる。ここでは、(3) 式を一般化して

$$Z = \alpha x + \beta y \quad (23)$$

という変換によって実数平面上での 2 次元写像を複素表現することを考える。ここで、 α, β は複素数である。 $\alpha = 1, \beta = i$ の場合、この変換は (3) 式に一致する。変換 (23) を用いて 2 次元写像 (22) を複素表現すれば

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \\ &= \alpha f(x_n, y_n) + \beta g(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。(23) 式から x, y は Z およびその共役複素数 Z^* で表されるので、形式的に (24) 式は Z および Z^* の関数とみなすことができる。今、それを $F(Z, Z^*)$ として

$$F(Z, Z^*) = \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \quad (25)$$

とする。

まず最初に関数 $F(Z, Z^*)$ が微分可能であるための条件について調べる。 $F(Z, Z^*)$ が極限值

$$\lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{F(Z + \Delta Z, Z^* + \Delta Z^*) - F(Z, Z^*)}{\Delta Z} \quad (26)$$

を持つとき、 $F(Z, Z^*)$ は Z で微分可能であるという。極限值 (26) は (25) 式を用いて、

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{F(Z + \Delta Z, Z^* + \Delta Z^*) - F(Z, Z^*)}{\Delta Z} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x + \Delta x, y + \Delta y) - \alpha f(x, y)}{\alpha \Delta x + \beta \Delta y} + \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\beta g(x + \Delta x, y + \Delta y) - \beta g(x, y)}{\alpha \Delta x + \beta \Delta y} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。このとき、 $\Delta Z \rightarrow 0$ の極限のとりかたには様々な方法があるが、 $F(Z, Z^*)$ が Z で微分可能であるためにはどの方向から 0 に近づけても (26) 式で与えられる極限值は常に同じ値になる必要がある。 $\Delta Z \rightarrow 0$ の極限のとりかたとして、次の 2 つの場合を考える。

(1) $\Delta y = 0$ として $\Delta x \rightarrow 0$ とする場合。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x + \Delta x, y) - \alpha f(x, y)}{\alpha \Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\beta g(x + \Delta x, y) - \beta g(x, y)}{\alpha \Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial g}{\partial x} \quad (28)$$

ここで、 $\beta/\alpha \equiv \gamma$ とおいた。

(2) $\Delta x = 0$ として $\Delta y \rightarrow 0$ とする場合。

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x, y + \Delta y) - \alpha f(x, y)}{\beta \Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\beta g(x, y + \Delta y) - \beta g(x, y)}{\beta \Delta y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (29)$$

$F(Z, Z^*)$ が Z で微分可能であるためには、これらが一致しなければならないので

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (30)$$

を得る。この関係式は、さらに

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma + \gamma^*) \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad (31)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\gamma \gamma^* \frac{\partial g}{\partial x} \quad (32)$$

のように書き換えることができる。複素数への変換が (3) 式で与えられる場合は、 $\gamma = i$ であるから (31), (32) 式は Cauchy-Riemann の関係式 (8) に帰着される。したがって、(30) 式あるいは (31), (32) 式は一般化された Cauchy-Riemann の関係式だと考えられる。

次に、(25) 式で与えられる $F(Z, Z^*)$ が微分可能であれば、 $F(Z, Z^*)$ は Z のみの関数であることを示す。固定点を $Z_f = \alpha x_f + \beta y_f$ とし、原点を固定点にとるような新しい座標系 $\zeta = \alpha \xi + \beta \eta$ で写像を書き換えると (24), (25) 式より

$$\zeta_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\zeta_n \frac{\partial}{\partial Z_f} + \zeta_n^* \frac{\partial}{\partial Z_f^*} \right)^k F(Z_f, Z_f^*) \quad (33)$$

となる。ここで、 $F(Z_f, Z_f^*)$ の Z_f^* による偏微分は (25) 式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z_f^*} F(Z_f, Z_f^*) &= \frac{\partial}{\partial Z_f^*} \{ \alpha f(x_f, y_f) + \beta g(x_f, y_f) \} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left(-\beta \frac{\partial}{\partial x_f} + \alpha \frac{\partial}{\partial y_f} \right) \{ \alpha f(x_f, y_f) + \beta g(x_f, y_f) \} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\Delta} \left\{ \frac{\partial g(x_f, y_f)}{\partial y_f} - \frac{\partial f(x_f, y_f)}{\partial x_f} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f(x_f, y_f)}{\partial y_f} - \gamma \frac{\partial g(x_f, y_f)}{\partial x_f} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。ここで $\Delta = \alpha\beta^* - \alpha^*\beta$ と略記した。 $F(Z, Z^*)$ が微分可能であれば Cauchy-Riemann の関係式 (30) から上式は 0 になる。 (34) 式の右辺は一般に固定点 x_f, y_f の関数であるが、Cauchy-Riemann の条件式は関数 $F(Z, Z^*)$ の定義されたすべての Z すなわち x, y に対して成立しているの、 x_f, y_f の値によらず常に 0 である。したがって、すべての $k \geq 1$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z_f^*} \right)^k F(Z_f, Z_f^*) = 0 \quad (35)$$

となり、写像 (33) は ζ^* の項を含まない。したがって $F(Z, Z^*)$ は Z のみの関数である。

以上から、一般化 Cauchy-Riemann の条件式 (30) あるいは (31), (32) を満たすような変換 (23) があれば、その 2 次元写像は複素解析的な写像に共役であると結論できる。これが、与えられた 2 次元写像が複素解析的な写像に共役であるかどうかを判定するための一般的な条件である。

一般化 Cauchy-Riemann の条件式 (30) を用いて、Klein の写像 (11) をもう一度調べてみよう。この場合、(30) 式は

$$2(1 + \gamma + \gamma^2)(x - y) = 0 \quad (36)$$

となる。これが恒等的に成立するためには、 $\gamma = \exp(i2\pi/3), \exp(i4\pi/3)$ であればよい。今、 $\gamma = \exp(i2\pi/3)$ として $\alpha = \exp(-i\pi/3)$ のように選べば、変換 (23) は $Z = \exp(-i\pi/3)x + \exp(i\pi/3)y$ となり、これは先に求めた変換 (21) に一致する。

この方法に従えば、前節で求めたよりもはるかに簡単に変換を得ることができる。さらに、この方法で求めた変換によって、対象とする 2 次元写像が複素解析的な写像と共役であることが保証される。しかし、前節では変換を一意に求めることができたが、ここでは α と β の比 γ しか定まらないので変換は無数にあることになる。これは、条件式 (30) が複素表現された写像に対する微分可能性の要請から得られたもので、対応する複素写像の形を特定していないことに起因している。一方、前節では写像形を $F(Z) = Z^2 + C$ のように特定していたので変換を一意に求めることができたのである。

(30) 式を用いて前節の (15) 式を厳密に証明しておこう。計算を簡単にするため

$$\Phi = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_f} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_f}, \Psi = \alpha \frac{\partial f}{\partial y_f} + \beta \frac{\partial g}{\partial y_f}$$

を導入する。我々のゴールは (15) 式で与えられる λ が、ヤコビ行列 DF_f の固有値であることを示すことである。まず (15) 式は

$$\begin{aligned} F(Z_f) &= \alpha f(x_f, y_f) + \beta g(x_f, y_f) \\ \frac{d}{dZ_f} &= \frac{1}{\Delta} \left(\beta^* \frac{\partial}{\partial x_f} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial y_f} \right) \end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{dF(Z_f)}{dZ_f} \\
 &= \frac{1}{\Delta} \left(\beta^* \frac{\partial}{\partial x_f} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial y_f} \right) (\alpha f + \beta g) \\
 &= \frac{1}{\Delta} (\beta^* \Phi - \alpha^* \Psi)
 \end{aligned} \tag{37}$$

と変形できる。また、一般化 Cauchy-Riemann の条件 (30) は $\alpha\Psi = \beta\Phi$ と書き表すことができる。これを用いると、(37) 式より

$$\begin{aligned}
 \lambda + \lambda^* &= \frac{1}{\Delta} (\beta^* \Phi - \alpha^* \Psi + \beta \Phi^* - \alpha \Psi^*) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x_f} + \frac{\partial g}{\partial x_f} \\
 &= \text{Tr} DF_f
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda\lambda^* &= -\frac{1}{\Delta^2} (\beta^* \Phi - \alpha^* \Psi)(\beta \Phi^* - \alpha \Psi^*) \\
 &= -\frac{1}{\Delta^2} (\alpha^* \alpha \Psi \Psi^* - \alpha^* \beta \Phi^* \Psi - \alpha \beta^* \Phi \Psi^* + \beta \beta^* \Phi \Phi^*) \\
 &= -\frac{1}{\Delta} (\Phi^* \Psi - \Phi \Psi^*) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x_f} \frac{\partial g}{\partial y_f} - \frac{\partial f}{\partial y_f} \frac{\partial g}{\partial x_f} \\
 &= \text{Det} DF_f
 \end{aligned} \tag{39}$$

が得られるので、 λ はヤコビ行列 DF_f の固有値であると言える。

§2 で見てきたように、通常の 2 次元写像と複素力学系の分岐図には drastic な違いがあった。複素力学系も成分表示すれば 2 次元写像に還元できるので、それらを区別する判定条件は何かが問題となる。一般的には Cauchy-Riemann の条件式がその criterion とされており、その条件式を満足するような 2 次元写像が複素解析的な写像とみなされている。しかし、Klein の例のように Cauchy-Riemann の条件を満たしていなくても、Metzler らが示したように線形変換によって Quadratic Map に変換され、本質的に複素力学系と同等な 2 次元写像もある。我々は、この節で Cauchy-Riemann の条件式を一般化し、その一般化された Cauchy-Riemann の条件式を満たす 2 次元写像は、Metzler らが言う複素力学系に共役な 2 次元写像であることを示した。

一般化された Cauchy-Riemann の条件式は複素写像の微分可能性から導出されたものである。逆に、与えられた 2 次元写像が複素表現されたとき、微分可能な写像、即ち複素解析的な写像であるかどうかを判定するのが一般化 Cauchy-Riemann の条件式である。つまり、2 次元写像を複素表現するには任意性があり、その中で特に (3) 式を用いる必然性などないはずである。Cauchy-Riemann の条件式 (8) は (3) 式の変換を前提としたものであるから、それをもって与えられた 2 次元写像に対する複素解析性の criterion とするのは適切ではない。したがって、我々は一般化された Cauchy-Riemann の条件式を満たす 2 次元写像を複素解析的な写像と呼ぶことにする。この意味で Klein の写像も複素解析的な写像である。

この節を終えるにあたって、与えられた任意の 2 次元写像を複素表現する場合に、それが複素解析的な写像であるかどうかが見通しのよくなるような変換方法を示しておこう。(31),(32) 式を γ に

いて解くことにより

$$\gamma = \frac{g_y - f_x \pm \sqrt{(g_y - f_x)^2 + 4f_y g_x}}{2g_x} \quad (40)$$

を得る. ここで $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$, $g_x = \partial g / \partial x$, $g_y = \partial g / \partial y$ と略記した. もしこの式で与えられる γ が定数であれば, 一般化 Cauchy-Riemann の条件式が成立するので, この 2 次元写像は複素解析的であり, その複素表現は

$$\zeta \mapsto \lambda \zeta + \phi(\zeta) \quad (41)$$

となる. ここで $\phi(\zeta)$ は ζ のみの非線形項である. 逆に, (40) 式で与えられる γ が定数でなく, x, y の関数であれば, この 2 次元写像は複素解析的ではない. しかし, (40) 式を固定点 (x_f, y_f) で評価した γ を用いてこの 2 次元写像を複素表現すれば, (34) 式から少なくとも ζ^* の係数は 0 になるので

$$\zeta \mapsto \lambda \zeta + \phi(\zeta, \zeta^*) \quad (42)$$

という形に表すことができる. (41), (42) 式で与えられる複素写像は, 数ある 2 次元写像の複素表現の中でもっとも見通しのよいものである. なぜなら, 写像が ζ^* を含むかどうかだけで, 形式的に複素解析的な写像か否かを判別することができるからである.

5 複素解析的写像の大域的な性質

§2 で見てきたように複素解析的写像の分岐図は, 準周期領域やカオス領域の測度がゼロになる, 自己相似的なフラクタル構造が見られ周期領域の面積にスケーリング則が成立するなど, 通常の 2 次元写像すなわち複素解析的でない写像とは異なる特徴を示す. この節では, 系が示すローカルな分岐を用いてこれらの特徴を明らかにしていく.

一般的な複素解析的な写像を

$$Z \mapsto F(Z, C) \quad (43)$$

とする. ここで C は系を制御する複素パラメタである. 写像 (43) の固定点 Z_f は $Z_f = F(Z_f, C)$ を解くことによって C の関数として与えられる. 固定点 Z_f が原点になるような新しい座標系 $\zeta \equiv Z - Z_f$ で写像 (43) を書き換えると

$$\zeta \mapsto \frac{dF(Z_f, C)}{dZ_f} \zeta + \phi(\zeta) \quad (44)$$

となる. ここで $\phi(\zeta)$ は ζ についての非線形項である.

今

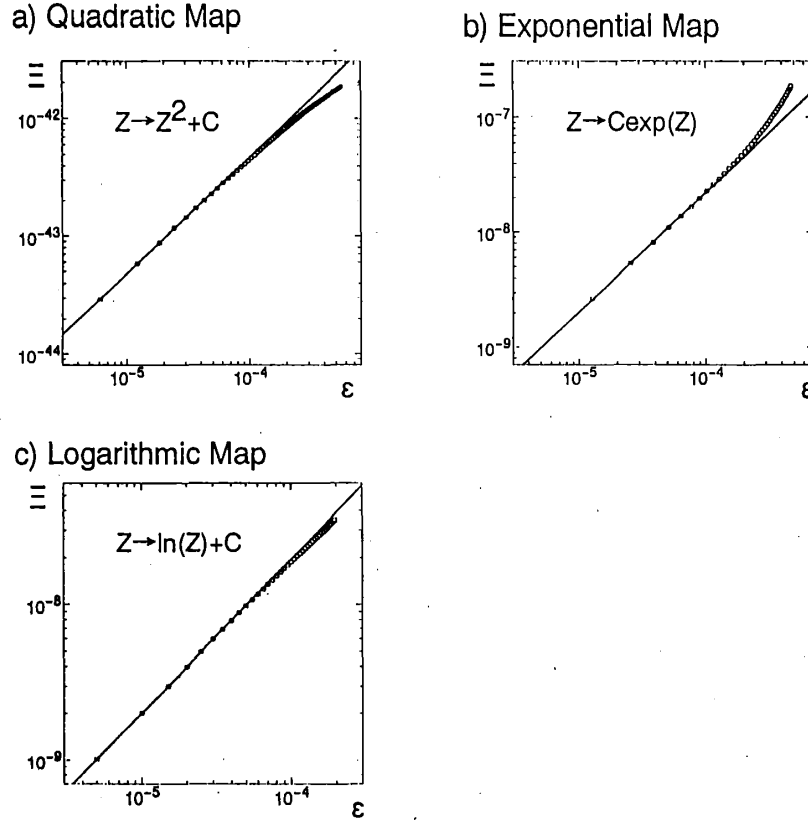
$$\frac{dF(Z_f, C)}{dZ_f} = (1 + \varepsilon) \exp(i2\pi\Omega) \quad (45)$$

とすることによって, 系の複素パラメタ C を 2 つの実数パラメタ ε, Ω に変換することができる. 分岐図の大域的な性質を明らかにすることは複素パラメタ C の構造を調べることであるが, $C \mapsto (\varepsilon, \Omega)$ の変換によって, 写像

$$\zeta \mapsto T_\varepsilon(\zeta) \equiv (1 + \varepsilon) \exp(i2\pi\Omega) \zeta + \phi(\zeta) \quad (46)$$

の ε, Ω に対する挙動を調べる問題に帰着できる. 以下では Normal Forms 理論に基づいて写像 (46) の性質を調べる.

図 2: Parameter Dependence of Hopf Radius for a) Quadratic map, b) Exponential map, and for c) Logarithmic map



写像 (46) において, $\varepsilon = 0$ 即ち固定点 Z_f が不安定化する臨界点では, Ω がある有理数 $\Omega_0 = q/p$ のとき, ある変換 $\eta = h(\zeta)$ によって

$$h \circ T_0 \circ h^{-1}(\eta) = \lambda_0 \eta + O(\eta^{p+1}) \quad (47)$$

という標準形に還元できることが Poincaré-Dulac の定理 [17] から知られている. ここで $\lambda_0 = \exp(i2\pi\Omega_0)$ である. (47) 式を用いると T_ε の p 回写像は, ε の 1 次までの近似で

$$T_\varepsilon^p(\zeta) \sim \zeta + pB\zeta^{p+1} + p\varepsilon\zeta \quad (48)$$

となる. ここで B は λ_0 のある関数である. 固定点 Z_f が $\varepsilon = 0$ で不安定化して, p -周期解が現れるとき, これはスーパークリティカルなモードロッキングを伴う Hopf 分岐で, $T_\varepsilon^p(\zeta) = \zeta$ であるから, その Hopf 半径 r_H は

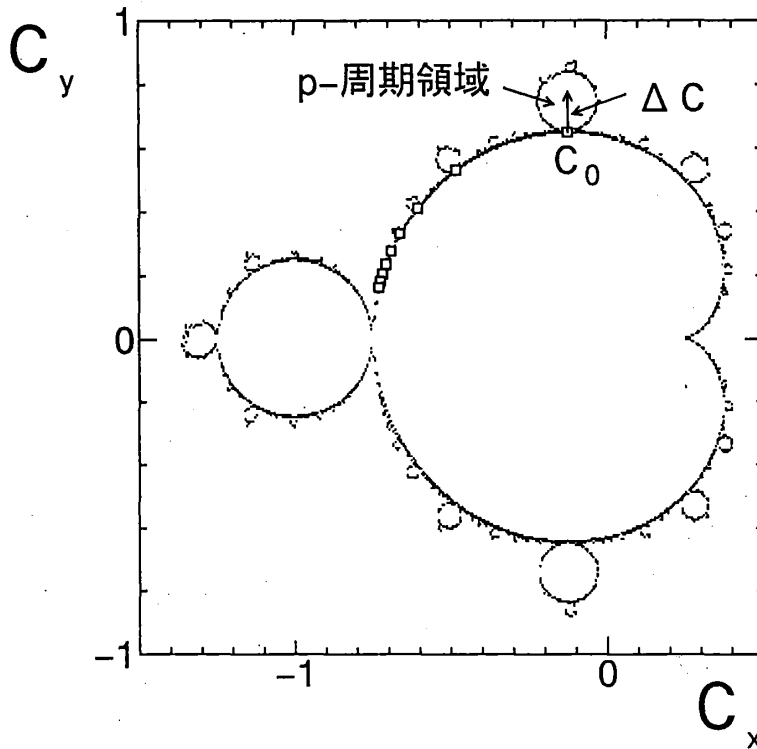
$$r_H \sim \varepsilon^{1/p} \quad (49)$$

という ε -依存性を示す. これは, Hopf 半径が $\sqrt{\varepsilon}$ となる通常の Hopf 分岐とは著しい違いで, 複素力学形に特徴的な性質である. この違いは標準形 (47) にあり, 複素解析的でない写像の場合は, (47) 式に対応する標準形が

$$h \circ T_0 \circ h^{-1}(\eta) = \lambda_0 \eta + O(\eta^2 \eta^*) \quad (50)$$

となるので, Hopf 半径が $\sqrt{\varepsilon}$ という ε -依存性を示していたのである [2]. 具体的な 3 つの写像 (a) Quadratic Map, (b) 指数写像 [18], (c) 対数写像 [19] に対してこれを数値計算で確かめたのが図

図 3: Bifurcation diagram of Quadratic map.



2. である。図では、縦軸に p -周期点の積 $\prod_{i=1}^p \zeta_i$ の大きさを、横軸に ε を両対数目盛でプロットしている。グラフの勾配から Quadratic Map, 指数写像, 対数写像に対してそれぞれ $0.988 \pm 0.002, 1.035 \pm 0.008, 0.989 \pm 0.002$ が得られ, Hopf 半径の増大則 (49) を裏付けている。我々は、この Hopf 半径の増大則を重要な性質であると考えており、事実、これによって以下に示すように、準周期領域の測度がゼロであることおよび周期領域の面積についてのスケーリング則を説明できる。

p -周期解の安定性の条件は

$$\left| \frac{dT_\varepsilon^p}{d\zeta} \right| < 1 \quad (51)$$

で与えられる。(48) 式を用いると、これは

$$|1 + p(p+1)B\zeta^p + p\varepsilon| < 1 \quad (52)$$

となる。Hopf 半径の関係式 (49) を用いると、これは更に $0 < \varepsilon p^2 < 2$ となる。つまり、 p -周期解が安定であるような ε の最大値 ε_{max} は周期 p の逆 2 乗に比例して減少する。すなわち

$$\varepsilon_{max} \sim p^{-2} \quad (53)$$

となる。

次に、 ε と実際のパラメタ C との関係を見てみよう。図 3. に Quadratic Map の分岐図を示している。この図で、図中に記入された C_0 は $\varepsilon = 0, \Omega = \Omega_0 = q/p$ に対応している点である。今、 $\Omega = \Omega_0$ に保ったまま ε を 0 から増大させていく場合を考える。ある ε に対する C の C_0 からの変位を ΔC とす

表 2: The map-dependent terms

Map	$Z \mapsto F(Z, C)$	Z^*	$ \frac{dZ^*}{dZ} $	$ \frac{\partial F}{\partial C} $	$\frac{\partial F}{\partial C} _{Z_0^*}$	Z_1^*
対数写像	$Z \mapsto \ln Z + C$	$e^{-i2\pi\Omega}$	2π	1	1	$-e^{-i2\pi\Omega_0}$
指数写像	$Z \mapsto Ce^Z$	$e^{i2\pi\Omega}$	2π	$e^{\cos \pi\Omega}$	$e^{i2\pi\Omega_0}/C_0$	$e^{i2\pi\Omega_0}$
Quadratic Map	$Z \mapsto Z^2 + C$	$\frac{1}{2}e^{i2\pi\Omega}$	π	1	1	$\frac{1}{2}e^{i2\pi\Omega_0}$

ると, ΔC と ε の間には

$$\Delta C = \frac{1 - e^{i2\pi\Omega_0}}{\frac{\partial F}{\partial C}|_{Z_f^{(0)}}} Z_f^{(1)} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (54)$$

という関係が成立する. ここで $Z_f^{(0)}, Z_f^{(1)}$ は固定点を $Z_f(\varepsilon) = Z_f^{(0)} + Z_f^{(1)}\varepsilon + \dots$ のように ε のべきに展開したときの係数で $\partial F/\partial C|_{Z_f^{(0)}}$ とともに写像によって決まる定数である.

この関係式 (54) を用いて準周期領域の測度が 0 になることを示そう. 準周期解を周期無限大の周期解と考えると (53) 式から $p \rightarrow \infty$ で $\varepsilon_{max} \rightarrow 0$ となる. したがって, (54) 式から $\Delta C_{max} \rightarrow 0$ となり, 準周期領域の測度がゼロであることが示された.

最後に (54) 式を用いて, 2 節で示した周期領域の面積についてのスケーリング則を導く. p -周期領域の面積を S_p とすると, 自己相似的なフラクタル性から

$$\begin{aligned} S_p &\sim |\Delta C_{max}|^2 \\ &\sim \left| \frac{1 - e^{i2\pi\Omega_0}}{\frac{\partial F}{\partial C}|_{Z_f^{(0)}}} Z_f^{(1)} \right|^2 \varepsilon_{max}^2 \end{aligned} \quad (55)$$

と見積もることができる. この式の中で写像に依存する部分は 3 つの具体的な写像に対して表 2. にまとめておいた. 表 2. と (53) 式から

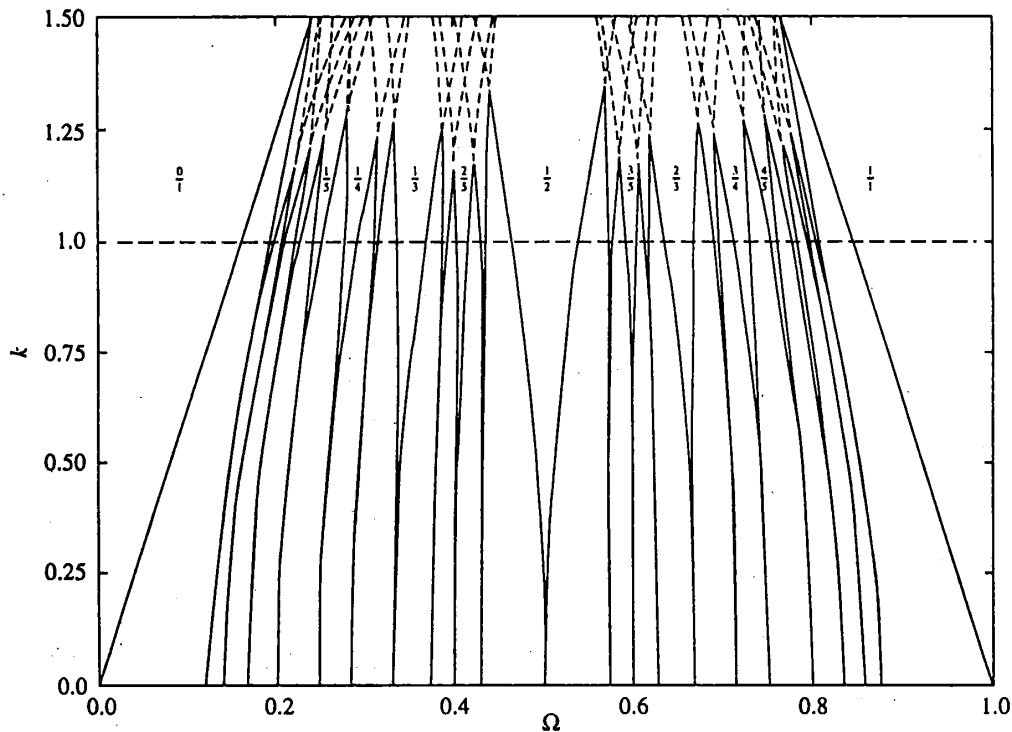
$$S(p) \sim \begin{cases} p^{-6} & k\text{-周期列} \\ p^{-4} & (2k+1)\text{-周期列} \end{cases} \quad (56)$$

となり, §2 で示したスケーリング則が得られる [14].

6 複素力学系の物理像

これまで見てきたように, 複素力学系の描き出す世界はとても物理的とは思われない. なぜなら, パラメタのゆらぎを考えた場合, あらゆるパラメタに対して系は発散するか, さもなければモードロッキング状態の周期解しか生み出さないからである. 物理的にはモードロッキング状態は共鳴現象と考えられるので, 物理的に意味のない発散解はとりあえず考えないでおくことにしても, あらゆるパラメタ領域で, まるで凍りついたかのように共鳴し続けるなどという描像はおよそ物理現象を記述するモデルとはいいい難い. では, 複素力学系は単なる数学の玩具で, 物理現象とは無縁の産物なのであろうか.

図 4: Bifurcation diagram of sin circle map. From Jensen et al.[8].



しかし、我々はこれとよく似た描像を既に知っている。しかも、準周期崩壊のカオスへのルートを描述するもっとも簡単なモデルにおいて凍りついたモードロッキング状態が現れる。図 4. はこのようなモデルの代表格ともいえるサインサークルマップ [8]

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= f(\theta_n) \\ &\equiv \theta_n + \Omega + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \pmod{1}\end{aligned}\quad (57)$$

の分岐図である。図の縦軸は非線形性を表すパラメタ K で、横軸は非線形項がない場合の振動数 Ω である。物理的には振り子のような振動子に周期的な外力を加えた系の挙動を描述するモデルで、 K は外力の大きさを表し、 Ω は振動子の固有振動数と外力の振動数の比を表している。本質的には、図 4. は §2 で取り上げた Lauwerier の 2 次元写像の分岐図と同等である。つまり、非線形項がない ($K = 0$) 場合は有理数の Ω に対してのみ共鳴が生じ、ほとんどの Ω に対しては準周期運動を行っている。非線形性の増大とともに Arnold の舌が広がり、有限の Ω の幅にわたって共鳴状態が発生する。これがモードロッキングである。さらに非線形性が増大し、やがて K が 1 に達すると、 Ω のいたるところでモードロッキング状態となり、準周期領域は Cantor 的に存在するのみで、その測度は 0 になる。この状況は、我々がこれまで記述してきた複素力学系の描像に酷似してはいないだろうか。以下ではこの類似性に着目して複素力学系の物理像を捉えてみよう。

サインサークルマップ (57) において $K = 1$ は、ちょうど写像が可逆から不可逆に変わる臨界点になっている。 $K < 1$ では写像は可逆であるため不規則な運動は現れず、周期解と準周期解しか生じない。一方、 $K > 1$ になると写像は不可逆となり、折り畳みと引き伸ばしの効果によってカオスが出現する。このように写像が可逆から不可逆に変わる臨界点は、サインサークルマップのように 1 次元

写像の場合は、写像 $f(\theta)$ の傾きがある θ に対して 0 になるという条件から求めることができる。即ち、

$$\frac{df}{d\theta} = 1 + K \sin(2\pi\theta) = 0 \quad (58)$$

となるような θ が存在するための条件から $K = 1$ が臨界点になっていることが分かる。この描像の類推から複素力学系を眺めると、 $K = 1$ に対応するのが一般化された Cauchy-Riemann の条件式ではないだろうかと推測される。事実、一般化された Cauchy-Riemann の条件式を満たさない 2 次元写像、つまり、複素解析的でない通常の 2 次元写像で、物理現象を記述するモデルとしてこれまで研究されてきた写像は準周期運動もカオスも生じる。それに対して、一般化された Cauchy-Riemann の条件式を満たす 2 次元写像、つまり、複素力学系は、ちょうどサインサークルマップにおける $K = 1$ の状況のように凍りついたモードロッキング状態を呈している。このアイデアを確認するために、次のようなモデルを考える。

$$\zeta \mapsto \lambda\zeta + (1-a)\zeta^2 + a\zeta|\zeta|^2. \quad (59)$$

ここで a は実数パラメタで、 $a = 0$ の場合がちょうど複素力学系に対応している。 a を 0 から連続的に変化させることによって複素力学系から通常の 2 次元写像へ変化する様子を見ることができる。図 5. の (a)~(d) は、それぞれ $a = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ に対して数値計算を行った結果得られた分岐図である。 $a = 0.0$ では完全なマンデルブロー集合であったのが、 a の増大に伴って分岐図は次第に変形し、 $a = 0.6$ に至っては固定点境界線の外側に §2 で見た Lauwerier の 2 次元写像と同じ構造が現れる。 a の増大、即ち複素解析性が壊れるにつれて分岐図に現れる特徴をまとめると以下ようになる。

1. マンデルブロー集合の左右対象な 2 つの円盤のうち右側の円盤が発散領域に喰われ、急速に消滅していく。
2. 左側の円盤およびその周囲に張り付いた無数の円盤は比較的元の構造を保っているものの、境界が滑らかになっていきフラクタルな微細構造が失われ、固定点領域との付け根のあたりが次第にやせ細り楔型に変形する。
3. 左側の円盤の固定点境界の外側に準周期領域が現れ、 a の増大に伴って次第にその領域が広がっていく。
4. 上で述べた楔型の領域（これは Arnold の舌である）は外に向かって広がっている準周期領域の海の中で次第にその裾野を広げて重なりはじめカオス領域が現れる。

このように複素解析性の破れによる大域的な構造の変化は明白であり、サインサークルマップと類推から $a = 0$ が何らかの意味で臨界点であると考えられる。サインサークルマップの場合は、パラメタ K が臨界点 1 に近づくにしたがって

$$\Omega_{n+1} - \Omega_n \sim \delta^{-n} \quad (60)$$

というスケーリング則が成立した [20]。同様に 2 次元写像の場合もパラメタ a が臨界点 0 に近づくにしたがって、なんらかのスケーリング則が成立しないだろうか。前節で見てきたように複素解析的な写像では、固定点が不安定化して p -周期解が現れるとき、その Hopf 半径は

$$r_H \sim \varepsilon^{1/p} \quad (61)$$

図 5: Bifurcation diagram of $\zeta \mapsto \lambda\zeta + (1-a)\zeta^2 + a\zeta|\zeta|^2$.

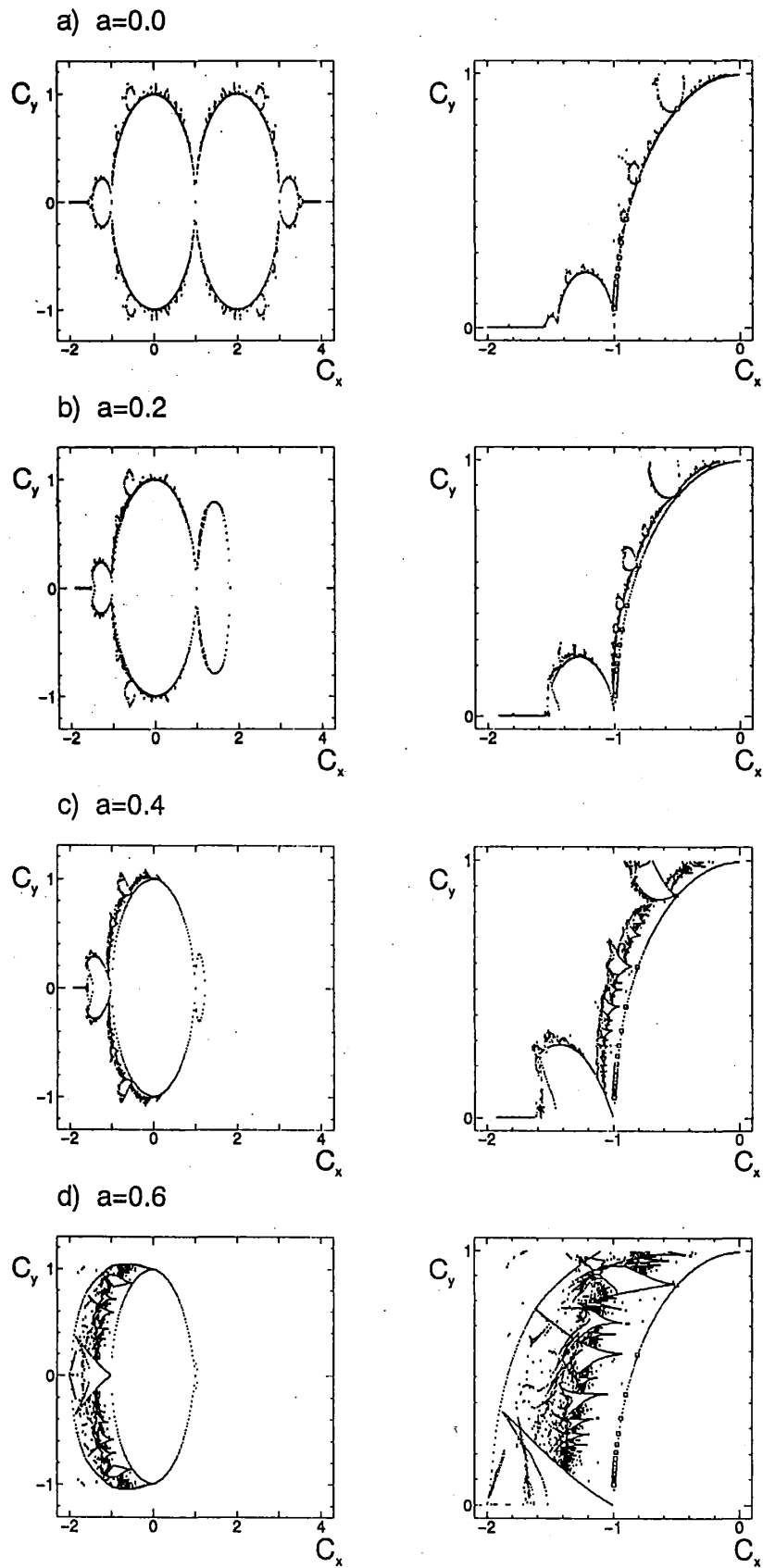
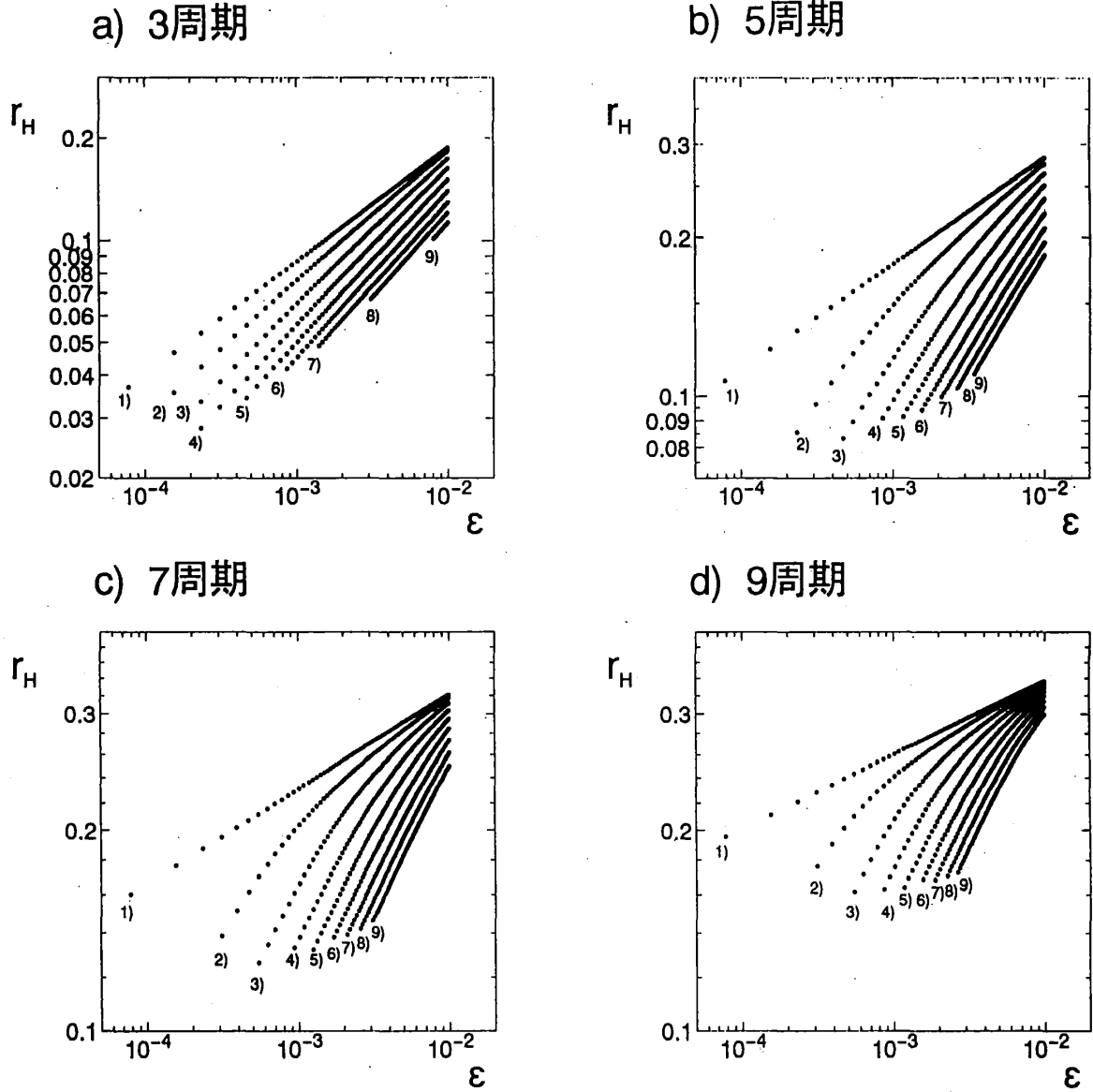


図 6: Parameter Dependence of Hopf Radius.



というべき則に従っていた。一方、複素解析的でない2次元写像では

$$r_H \sim \varepsilon^{1/2} \quad (62)$$

であった。そこで、複素解析性の破れを表すパラメタ a を0から連続的に変化させた場合の Hopf 半径のべき則を

$$r_H \sim \varepsilon^{\delta(a)} \quad (63)$$

のように表現すると、 $\delta(a)$ はどのような変化を示すであろうか。これを調べるために、様々な a の値に対して r_H と ε の関係を描いたのが図 6. である。この図に用いた具体的な a の値を表 3. に示す。この図で下にいくほど a は大きい。 $a=0$ の場合は $\ln r_H$ と $\ln \varepsilon$ の関係が直線で表される。この直線の傾きは $1/p$ になっており、(61) 式が成立している。ところが、 $a \neq 0$ の場合はもはや直線にはならず、(63) 式は成立しない。このとき、 ε の増大に伴い曲線の傾きは小さくなっている。周期 p が大きくなるにしたがってこの傾向は顕著になる。ある程度 a が大きくなると、 $\ln r_H$ と $\ln \varepsilon$ の関係が再び

表 3: 図 6. に用いた複素解析性の破れを表すパラメタ a の値

NO	3 周期	5 周期	7 周期	9 周期
1)	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
2)	8.000000e-002	2.880000e-002	1.469388e-002	8.888889e-003
3)	1.800000e-001	6.480000e-002	3.306122e-002	2.000000e-002
4)	2.800000e-001	1.008000e-001	5.142857e-002	3.111111e-002
5)	3.800000e-001	1.368000e-001	6.979592e-002	4.222222e-002
6)	4.800000e-001	1.728000e-001	8.816327e-002	5.333333e-002
7)	5.800000e-001	2.088000e-001	1.065306e-001	6.444444e-002
8)	6.800000e-001	2.448000e-001	1.248980e-001	7.555556e-002
9)	7.800000e-001	2.808000e-001	1.432653e-001	8.666667e-002

直線となり, そのときの傾きがほぼ $1/2$ になり, (62) 式が成立する. ベキ則 (63) が成立しないような a の範囲をもう少し詳しく調べてみるために 7-周期解の場合の $a = 0.03306 \dots$ に対する曲線の傾きを ε に対してプロットしたのが図 7. である. ε の増加に伴ってベキ δ が $1/2$ から $1/p = 1/7$ に単調に減少していることが分かるが, この性質は以下の議論によって説明することができる.

まず, モデル (59) を

$$\zeta \mapsto (\lambda + a|\zeta|^2)\zeta + (1-a)\zeta^2 \quad (64)$$

のように変形し, $\lambda = \exp(i2\pi\Omega) - \varepsilon$, $|\zeta|^2 = r_H^2$ とすることにより

$$\zeta \mapsto [\exp(i2\pi\Omega) - \varepsilon']\zeta + (1-a)\zeta^2 \quad (65)$$

を得る. ここで $\varepsilon' = \varepsilon - ar_H^2$ である. この写像は, r_H をパラメタと考えた場合, 見かけ上複素解析的な写像であり, したがって Hopf 半径は (61) 式に従うので

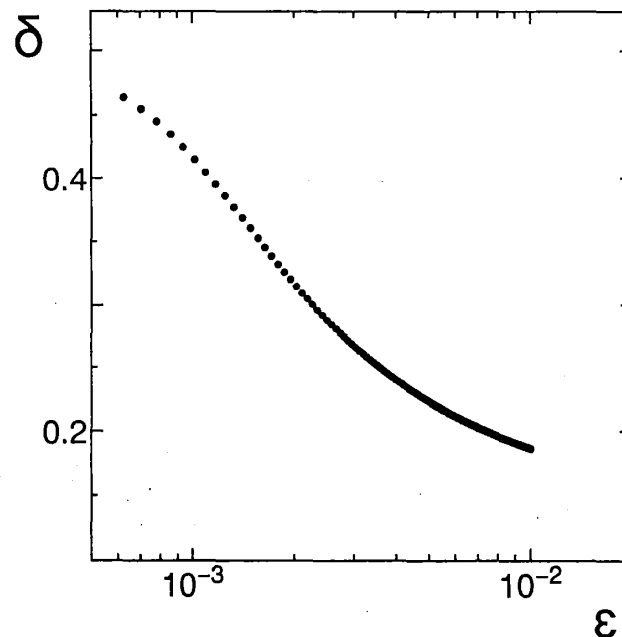
$$r_H \sim (\varepsilon - ar_H^2)^{1/p} \quad (66)$$

となる. この関係式から $\varepsilon \gg ar_H^2$ つまり ε が大きいところでは $r_H \sim \varepsilon^{1/p}$ となる. 一方, (66) 式の比例係数を A とし, この式を r_H について解くと

$$\left(\frac{r_H}{A}\right)^p + ar_H^2 = \varepsilon \quad (67)$$

を得るが, ε が小さいところ, つまり r_H が小さいところでは $p > 2$ の場合, 上式の左辺第 1 項が無視できるので $r_H \sim \varepsilon^{1/2}$ となる.

このように, 臨界点に近づくにしたがって p -周期解の Hopf 半径は徐々に $1/2$ から $1/p$ に変化するが, (63) 式のようなベキ則がそのまま保たれるのではなく, 不安定化パラメタ ε が 2 つの領域に分かれ, 一方がベキ $1/2$ で変化し, 他方が $1/p$ で変化するという 2 重構造になっており, 次第に後者が支配的になって, 最終的に (61) 式で表される変化が出現する.

図 7: ε -dependence of δ .

7 まとめ

通常の2次元写像と複素写像の分岐図に見られる大域的な構造の類似点と相違点に端を発し、それらの違いは何に由来するのかを調べてきた。2次元写像は、代表的なカオスへのシナリオである準周期崩壊ルートを説明するモデルとして精力的に研究され、その構造がほぼ解明されてきた。一方、複素力学系は、周期加算則のように共通して見られる性質がある反面、準周期解領域やカオス領域の測度がゼロ、分岐図の構造が自己相似的なフラクタルを示すなど通常の2次元写像の分岐図に見られない特異な性質があり、それらの性質が物理現象を説明するものとはほど遠いためか、あまり物理学者の研究対象とはならなかった。

しかし、複素力学系も成分表示すれば2次元写像であるから、両者を区別するものは何かということが問題になる。一般的にはCauchy-Riemannの条件式がそのcriterionとされているが、それを満足していなくても複素力学系と等価な分岐図を示す例がKlein等によって示された。それに対して、我々は一般化されたCauchy-Riemannの条件式を導き、それによって複素解析的な写像を厳密に定義した。一般化されたCauchy-Riemannの条件式は複素表現された2次元写像に対する微分可能性の要請から導かれたもので、幾何学的には写像が定義された任意の点においてそのヤコビ行列が伸縮回転を表す特殊なものであった。さらに、この条件式を用いると与えられた任意の2次元写像が複素解析的な写像であるか否かの判定が可能であるばかりでなく、たとえ複素解析的な写像でなくとも写像の複素表現での対角化が自然に行え、見通しのよい写像を得ることができた。

また、複素力学系の分岐図に見られるグローバルな性質をローカルな分岐現象を調べることによって明らかにした。固定点がスーパークリティカルなHopf分岐によって不安定化し p -周期解が現れるとき、そのHopf半径は系のコントロールパラメタ ε に対して $\varepsilon^{1/p}$ で増加することをNormal Forms理論によって示し、このローカルな性質から準周期解領域の測度がゼロになること及び周期解領域の面積についてのスケーリング則を説明することができた。

このように、複素力学系と通常の2次元写像の区別を与えるcriterionを明らかにし、複素力学系

の示すグローバルな性質をある程度説明することができたが、物理的な観点からの複素力学系の意味は明白ではない。これに対して、我々はサインサークルマップとの類推から1つの仮説をたてた。それは、サインサークルマップにおける臨界点での状況と複素力学系の示す状況が酷似していることから、複素力学系が通常の物理的な2次元写像のある臨界点を表しているのではないかということである。そして、サインサークルマップにおいて写像が可逆から不可逆に転移する条件式(58)に対応しているのが一般化されたCauchy-Riemannの条件式ではないかと推測している。もし、複素力学系を臨界点として持つような2次元写像が存在すれば、我々が示したように、臨界点に近づくにしたがってHopf半径のパラメタ依存性が $\varepsilon^{1/2}$ から $\varepsilon^{1/p}$ に変化するであろう。

我々が複素力学系を研究している目的には2つある。1つは、複素力学系が2次元写像を理解する上でのガイドラインにならないだろうかというものである。たとえばCvitanovićが示したように周期倍分岐は複素力学系から見た場合、周期 n 倍分岐の $n=2$ の特別な場合であった。このように複素力学系で現象を見ることにより、一般的な概念で現象を捉えることができる場合がある。一般的な概念で現象を捉えるという意味では若干ニュアンスが違うが、周期加算則もこの好例である。複素力学系は理想的な形で我々に分岐図を見せてくれるので、本質を抽出するのに適しているのである。

もう1つの目的は、もっと直接的に、物理現象としての複素力学系が存在しないだろうかというものである。発散領域を除くいたるところモードロッキング状態というのは確かに物理的に見れば異常な現象ではあるが、そのような物理系があれば単に興味深いだけでなく、連想記憶などの工学的な応用の面でも利用価値は高い。ただ残念ながら我々の知る限りではそのような実験報告はなく、マンデルブロー集合のあまりに整いすぎた幾何学的模様を眺めていると、この点に関しては悲観的にならざるを得ない。しかし、複素力学系で記述される物理現象が存在しないならしないのでその理由を明らかにしたい。いやすべきであろう。複素解析性という制約は物理的には有り得ない制約なのであるか?…これは今後解決すべき課題として残されている。

参考文献

- [1] P.Berge, Y.Pomeau, and C.Vidal: *Order Within Chaos* (Wiley, New Yorke, 1984).
- [2] S.N.Rasband: *Chaotic Dynamics of Nonlinear System* (Wiley-Interscience, 1990).
- [3] H.G.Schuster: *Deterministic Chaos* (Physik-Verlag, Weinheim, FRG, 1984).
- [4] M.Klein: Z.Naturforsch.43a(1988)819.
- [5] W.Metzler, A.Brelle, and K.D.Schmidt: Int.J.Bifurcation Chaos Appl.Sci.Eng.2(1992)241.
- [6] K.Satoh and T.Aihara: J.Phys.Soc.Japan 59(1990)1123.
- [7] K.Kaneko: Prog.Theor.Phys.69(1982)1427.
- [8] M.H.Jensen, P.Bak, and T.Bohr: Phys.Rev.A30(1984)1960.
- [9] M.Tanaka and T.Kawabe: J.Phys.Soc.Japan 62(1993),3767.
- [10] K.Kaneko: Prog.Theor.Phys.68(1982)669.

- [11] M.J.Feigenbaum: J.Stat.Physics **21**(1979)669.
- [12] R.M.May: Nature **261**(1976)459.
- [13] H.O.Peitgen and P.H.Richter: *The Beauty of Fractals* (Springer, Berlin, 1986).
- [14] M.Tanaka and T.Kawabe: Phys.Lett.**A199**(1995)180.
- [15] P.Cvitanović and J.Myrheim: Phys.Lett.**A94**(1983)329.
- [16] D.Ruelle and F.Takens: Commun.Math.Phys.**20**(1971)167.
- [17] V.I.Arnold: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer, Berlin, 1983).
- [18] R.L.Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Addison-Wesley, New Yorke, 1987).
- [19] T.Kawabe and Y.Kondo: J.Phys.Soc.Japan **62**(1993)407.
- [20] S.J.Shenker: Physica **5D**(1982)405.