

同心円筒間の粘性流の遷移

東大 宇宙研 仲矢 長次

1. はじめに

長い2つの同心円筒の間に流体をとこめ、円筒を一定の角速度で回転させると、その粘性によって流体もまた円筒の面にくっついて回転する。外円筒の角速度 Ω_2 を一定にして、内円筒の角速度 Ω_1 を除々にあげていくと、 Ω_1 のある値に対してこの一様な回転流（クエット流れ）は軸方向に周期性をもつ不安定流れにかわるのが観測される。クエット流れの安定性は最初テイラー¹⁾によって研究された。そこでは安定問題は軸対称擾乱の増減率を決定する固有値問題として定式化されている。

彼²⁾の理論によるとクエット流れの安定性は2つの無次元のパラメータによって特徴づけられる。その一つはレイノルズ数 R

$$R = \Omega_1 (r_2 - r_1)^2 / \nu, \quad (1.1)$$

η は流体の粘性率である。他の一つは円筒の角速度の比

$$\kappa = \Omega_2 / \Omega_1 \quad (1, 2)$$

である。もう一つの無次元パラメタ

$$\alpha = (r_2 - r_1) / r_1 \quad (1, 3)$$

は実験では一定にするのが通例であることを考えると、一つの値として固定してとり扱うとよいであろう。ここで r_1 と r_2 とはそれぞれ内、外円筒の半径である。安定性を求める固有値問題をとくと、軸方向の波数 λ をもつ攪乱の増巾率が λ のパラメタ κ , λ と R によって表わされ、特にゼロの増巾率の場合には κ と λ の3つのパラメタの間、関係が生ずる。そのような中立を与える関係式を満足するレイノルズ数 R_λ は各々の κ の値に対して最小値 R_c を $\lambda = \lambda_c$ でとる。だからこの R_c を κ に対してえがくと、それはクーエット流れの安定性を定める曲線であり、最初にあらわれる軸対称の攪乱に対する臨界レイノルズ数を定めるという意味で第一境界と名付けよう。

レイノルズ数がこの第一境界をこえて上がると、クーエット流れの不安定性によって生ずる軸対称うず流れはスケュート²⁾以来多くの研究者によって知られた。彼等の非線形うず流れを定める漸近理論^{3, 4)}は波数 λ を固定すると、中立曲線 $R = R_\lambda$ の上で振巾が

$$\varepsilon = (R - R_\lambda)^{1/2} \quad (1.4)$$

の程度の平衡値をもつうず流れが可能であることを示した。この結果は運動方程式の3次までの省略 ε^3 によって得られた。より高次の近似を求めるのは極めて面倒な仕事にあると思われる。そのための組織化が著者⁵⁾によって提案されている。

更にレイノルズ数を上げると、円筒間の流れは α が1の程度であるが、1に較べて小さい α によって全く違った様子をしている。 α が1の程度であるとき、流れは R_c よりずっと大きい R に対してまで軸対称性を失わない、ただうずの強さが R とともに増加するだけである。この場合に興味、対象はどのような波数をも軸対称のうず流れが存在することかであるかという、非線形現象で方程式の解の一意性が失われることの問題である。実験では流体をある高さまで満たし、その高さのなかに生ずるうずの細胞の数を測定された⁶⁾。ところが α が1にくらべて小さいとき、軸対称な非線形うず流れは R が R_c をこえるとすぐにくずれて、 θ 方向に波をつくらせている非軸対称な流れが現われる⁷⁾。こゝでの注の目的は軸対称うず流れに対する非軸対称の擾乱の成長を議論して、軸対称うず流れの安定性を示す境界を見出すことである。この曲線は古典的な問題と対照的に第2境界と呼ぶ

の加適当であらう。つまりこの話はこの第2境界を理論的に予測する方法を示すことにあるとい、てもよい。

軸対称うず流れの非軸対称擾乱に対する安定性はテイラー等⁸⁾によって解析された。そこでこのうず流れと擾乱との波数が同じであると仮定して、うず流れのつよさつまりこの振巾による2重展開によって、かく乱の増巾率が ε^2 の程度まで決定された。その計算はカサタ等⁷⁾に対してあてはまる近似方程式で行われた。結果は軸対称うず流れは軸方向に同じ位相をもつ擾乱に対して安定で、 $1/2\pi$ だけ異った位相の擾乱に対して不安定であるということである。その後イークス⁹⁾は近似した方程式と数値積分することによって $k=0$ に対して軸対称うず流れの安定限界を示すレイノルズ数をテイラー等と同じ仮定の下で求めた。ところが線形理論によるとクエット流れは軸対称擾乱に対する臨界波長 λ_c と非軸対称擾乱に対するそれ λ'_c が異なることを示している。この事実¹⁰⁾は $\lambda_c = \lambda'_c$ として臨界レイノルズ数を軸対称うず流れに対して求めることは正しいとはいえない。軸対称うず流れの波長 λ_c とは異なる波長をもつ非軸対称擾乱の成長は ε^2 の程度で著者によって論じられ、¹⁰⁾ いろいろの波数をもつ非軸対称擾乱に対する中立曲線が得られた。一方、非軸対称擾乱の増巾率を計算すると、その第1項と第2項の両方 ε^2 の程度

しかし不安定性を示すためには各々が引く合うということになり、 ε^4 である第3項を無視することはできない。ここでは任意の次数の増巾率を求めるための組織的な方法が展開されている。詳しくは著者の論文をみうけたい。

2. 有限な振巾をもちうず流れの決定

(A)筒座標 r, θ と z とをとって、円筒の共通の軸を z 軸にえらび、対応する速度成分を u, v と w とする。ナヴィエ-ストークスの方程式と連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

ここで t は時間、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は粘性率で ν^2 は η/ρ である。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.5)$$

方程式 (2.1) - (2.4) は次の解をもつ

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = Ar + \frac{B}{r}, \quad \bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{p}}{dr} = \frac{\rho \bar{v}^2}{r}. \quad (2.6)$$

(2.6) に於いて境界条件を代入すると,

$$A = \frac{\Omega_1 r_1^2 - \Omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (2.7)$$

となる。距り $d = r_2 - r_1$ を特徴的長さ, d^2/ν を特徴的時間, $\Omega_1 d / \alpha$ を特徴的速度, $\rho \Omega_1 \nu / \alpha$ を特長の圧力にとると, 方程式は無次元の形にかかれる。こゝに次の変数

$$\chi = \frac{r - r_1}{d}, \quad (2.8)$$

$$\Phi_1 = u, \quad \Phi_2 = v, \quad \Phi_3 = i\omega, \quad \Phi_4 = p, \quad \Phi_5 = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Phi_6 = i \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (2.9)$$

を導入すると, Φ_i を支配する方程式は20号式にかくと

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + P_{ij} \Phi_j + \frac{\partial}{\partial t} M_{ij} \Phi_j = \frac{R}{\alpha} \Phi_j Q_{ijk} \Phi_k \quad (2.10)$$

で与えられる。こゝに P_{ij} , Q_{ijk} は $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \theta$ を含む演算子である。この新しい変数をつかうと, 微分方程式 (2.6) は次のようにかかれる

$$\bar{\varphi}_1 = 0, \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{(1-k)(1+\alpha)^2}{(2+\alpha)\alpha} \left(\frac{\xi}{\alpha} - \frac{1-k(1+\alpha)^2}{(1-k)(1+\alpha)^2} \frac{\alpha}{\xi} \right),$$

$$\bar{\varphi}_3 = 0, \quad \frac{d\bar{\varphi}_4}{dx} = \frac{R\xi}{\alpha} \bar{\varphi}_2^2, \quad \bar{\varphi}_5 = \frac{d\bar{\varphi}_2}{dx}, \quad \bar{\varphi}_6 = 0. \quad (2.11)$$

有限振巾の軸対称擾乱を φ_i で表わすと, 二つの流れが存在するから

$$\Phi_i = \bar{\varphi}_i + \varphi_i \quad (2.12)$$

とおく。軸対称擾乱に対する方程式

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + E_{ij} \varphi_j + \frac{\partial}{\partial t} M_{ij} \varphi_j = \frac{R}{\alpha} \varphi_j K_{ijk} \varphi_k \quad (2.13)$$

を得る。境界条件は円筒面上で速度成分がゼロになること
こと

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad x = 0, 1 \quad (2.14)$$

である。軸対称うず擾乱の振巾 a の値 α と仮定して, φ_i を a のべき級数で表わすと

$$\varphi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \chi_i(n, g) \exp(ig\lambda z) a^n, \quad (2.15)$$

ここで $g = n - 2m$ であり $\chi_i(n, g)$ は $\chi_i(n, g) = 0, |g| > n$ と

$$\chi_i(n, g) = -\chi_i(n, -g), \quad i = 3, 6 \quad (2.16)$$

$$\chi_i(n, g) = \chi_i(n, -g), \quad \text{otherwise} \quad (2.17)$$

が要求される。振巾 a は次の方程式を満たすと仮定される

$$\frac{da}{dt} = \sum s_{2n-1} a^{2n-1} \quad (2, 18)$$

こゝに s_n はあとからきめらる定数である。 $\chi_i(\eta, \eta')$ に對する方程式をつくり、 s_n を次々ときめると、平衡振動は

$$\sum_n s_{2n-1} a^{2n-2} = 0$$

から決定される。これによつて有限な振動をもつ軸対称なうず流線が得られるということになる。

3. 軸対称なうず流線の安定性

前の節で求められたうず流線の安定性を論ずるために、これを非軸対称な擾乱 φ_i' を方程式に代入してその成長を調べよう。まず

$$\Phi_i = \bar{\varphi}_i + \varphi_i + \varphi_i' \quad (3, 1)$$

を運動方程式に代入すると

$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial t} + E_{ij} \varphi_j' + \frac{\partial}{\partial t} M_{ij} \varphi_j' = \frac{R}{\alpha} \left(\varphi_i' F_{ijk} \varphi_k + \varphi_j F_{ijk} \varphi_k' \right) \quad (3, 2)$$

を得る。こゝで φ_i' の二次の項は省略されてゐる。境界条件は φ_i と同様

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = 0, \quad x=0, 1 \quad (3, 3)$$

である。方程式 (3, 2) の係数は α の値からできており、

そのべきの係数は、すなわち振動の振幅を表わす周期性をもっている。さらに係数は θ に依存しないから、そのような方程式の解は

$$\varphi_i' = \exp[i(m\theta + \mu z)] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b^+ \chi_i^+(n, g) e^{ig\lambda z} + \sum_{n=0}^{\infty} b^- \chi_i^-(n, g) e^{ig\lambda z}, \quad g = n - 2m \quad (3.4)$$

と仮定される。ここに m は整数 μ は定数である。振動 $b^{\pm}(t)$ は次の方程式をみたすものと仮定される

$$\frac{db^+}{dt} = \sum a_{2n+1}^{++} b^+ + \sum a_{2n+1}^{+-} b^-, \quad (3.5)$$

$$\frac{db^-}{dt} = \sum a_{2n+1}^{-+} b^+ + \sum a_{2n+1}^{--} b^-. \quad (3.6)$$

(3.4) - (3.6) のようにおいて方程式の解を求めることは何らの矛盾も見出されない。それらを代入して a の係数とそれそれの γ - γ 係数とをゼロにすると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \chi_i^+(n, g) + L_{ij}(\mu + g\lambda) \chi_j^+(n, g) + \sum_{k=0}^{(n-g)/2} [(n-2k-1) a_{2k+1} M_{ij} \chi_j^+(n-2k, g) \\ & + a_{2k+1}^{++} M_{ij} \chi_j^+(n-2k, g) + a_{2k+1}^{-+} M_{ij} \chi_j^-(n-2k, g)] \\ & = \frac{R}{\alpha} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{l=0}^m \{ \chi_j^+(s, s-2l) N_{ijk} [(g-s+2l)\lambda] \chi_k(n-s, g-s+2l) \\ & + \chi_j(s, s-2l) N_{ijk} [\mu + (g-s+2l)\lambda] \chi_k^+(n-s, g-s+2l) \}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

$\equiv L_{ij}(\lambda), N_{ijk}(\lambda)$ は E_{ij}, F_{ijk} から λ と θ に対する微分を $i\lambda$ と im におきかえてえられる. 空間函数 $\chi_i^+(u, g)$ を $\chi_i^-(u, g)$ におきかえては $\chi_i^-(u, g)$ に対する方程式の系が得られる. 境界条件は

$$\chi_i^\pm(u, g) = 0, \quad i=1, 2, 3, \quad x=0, 1 \quad (3.8)$$

である. 上の方程式と境界条件とから $\chi_i^\pm(u, g)$ が求められる. 同様に繰返の成長を特長つける式 (3.5) - (3.6) の係数が求められる. これらの μ_n を代入すると

$$\frac{db^+}{dt} = B^{++}b^+ + B^{+-}b^-, \quad (3.9)$$

$$\frac{db^-}{dt} = B^{-+}b^+ + B^{--}b^-, \quad (3.10)$$

$\equiv$ には

$$\begin{aligned} B^{++} &= \sum s_{2n+1}^{++} a^{2n}, & B^{+-} &= \sum s_{2n+1}^{+-} a^{2n}, \\ B^{-+} &= \sum s_{2n+1}^{-+} a^{2n}, & B^{--} &= \sum s_{2n+1}^{--} a^{2n}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

上の連立の方程式 (3.9) - (3.10) は

$$b^\pm = C^\pm \exp(\xi t) \quad (3.12)$$

の解をもち, 代入すると

$$(B^{++} - \xi)C^+ + B^{+-}C^- = 0, \quad (3.13)$$

$$B^{-+}C^+ + (B^{--} - \xi)C^- = 0. \quad (3.14)$$

が得られる。(3, 13)-(3, 14) の両立のための条件

$$\begin{vmatrix} B^{++}-\zeta & B^{+-} \\ B^{-+} & B^{--}-\zeta \end{vmatrix} = 0 \quad (3, 15)$$

から ζ を決定すれば擾乱の時間的成長がわかり、したがって軸対称うず流れの安定性がわかる。

4. 結論

同心円筒間の軸対称うず流れの安定性をしらべるのにその漸近的な表現をととして、べき関形で非対称擾乱の成長を論ずるのが適当であるようにみえる。擾乱の増巾率の計算の結果は擾乱の波数とうず流れの波数と同じで、位相が $1/2\pi$ ずれているが、とも速く成長するということである。このようにして求めた R_c^* を $K = \Omega_2/\Omega_1$ について描いてみると、その曲線は K が 1 にくうべていさうとき、古典的オリ境界に極めて近くに位置している。2つの安定境界は $K = -0.78$ で交わり、 K がそれより大きくなることは示されている。 $K = -0.78$ より下ではクエット流れは非軸対称擾乱に対して必ず不安定になるから、ここで述べる定式は利用できない。その場合には有限振幅の非軸対称うず流れの軸対称擾乱に対する安定性を考える必要がある。 R_c^* と R_c との差は K が大きくなる増加して、 $K = 0.6$ では $0.16 R_c$ に達する。

($\alpha = 0.05$) 一方 R_c^* に対応する λ_c^* は古典的な値 λ_c とは異なり ($K = -0.78$ の両者は一致), λ_c^* は K が大さく小さく (なり). この計算はコールズの実験とよく一致している。

文献

1. G. I. Taylor, Phil. Trans. A 223 (1923) 289.
2. J. T. Stuart, J. Fluid Mech. 4 (1958) 1.
3. A. Davey, J. Fluid Mech. 14 (1962) 336.
4. R. C. DiPrima, Nonlinear Partial Differential Equations (Academic Press, New York, 1967)
5. C. Nakaya, J. Phys. Soc. Japan 36 (1974) 1164.
6. H. Snyder, J. Fluid Mech. 35 (1969) 273.
7. D. Coles, J. Fluid Mech. 21 (1965) 385.
8. A. Davey, J. Fluid Mech. 31 (1968) 17.
9. P. M. Eagles, J. Fluid Mech. 49 (1971) 529.
10. C. Nakaya, J. Phys. Soc. Japan 33 (1972) 1503.
11. C. Nakaya, J. Phys. Soc. Japan 38 (1975) 576.