

対数 q ガウス分布とその性質

筑波大学・数理解析系* 小池 健一

Ken-ichi Koike

Faculty of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

筑波大学・教育研究科† 標 優矢

Yuya Shimegi

Master's Program in Education,
University of Tsukuba

1 はじめに

対数正規分布は、非対称な確率分布の典型例として様々な分野で使われている。実際、経済学においては、所得の大きさ、預金量等を表すものとして使われている。また、生物学においては、組織の大きさが対数正規分布に従うとされている。

近年、統計物理学や機械学習の分野において、 q ガウス分布が注目を集めている。これは、適当な条件下で Tsallis エントロピーを最大にする確率分布として導出される (Furuichi 2009; 田中 2002) だけでなく、拡張されたガウスの誤差法則からも導かれる (Suyari and Tsukada 2005)。これらのことにより、 q ガウス分布は正規分布を一般化したものと見なせることが示唆される。

本稿では、対数 q ガウス分布を定義し、その性質について述べる。また、その応用例として、日本の地方自治体の首長の平均給与に対数 q ガウス分布を当てはめ、その母数の推定を行う。また、対数正規分布を当てはめた場合との比較も行う。

2 対数正規分布と q ガウス分布

ここでは、まず、Johnson, Kotz, and Balakrishnan (1994) に従って対数正規分布を説明する。 $\log X$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、 X は対数正規分布 $LN(\mu, \sigma^2)$ に従うという。その確率密度関数 (pdf) $f(x)$ と分布関数 (cdf) $F(x)$ は、それぞれ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right), \quad (0 < x < \infty),$$

で与えられる。ただし、 $\Phi(\cdot)$ は $N(0, 1)$ の cdf とする。

次に、須鎗 (2010), 田中 (2002) に従って、 q ガウス分布を定義する。

* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1

† 〒305-8572 茨城県つくば市天王台 1-1-1

定義 1. (q ガウス分布 (須鎗 2010; 田中 2002))

pdf が

$$p_q(x) = \frac{1}{Z_q} \left[1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right]_+^{1/(1-q)},$$

である確率分布を q ガウス分布 $G_q(\mu, \sigma^2, q)$ という. ただし, $[a]_+ := \max\{a, 0\}$ とし, ベータ関数 $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ ($a > 0, b > 0$) に対して Z_q は

$$Z_q := \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right]_+^{1/(1-q)} dx = \begin{cases} \left(\frac{3-q}{q-1} \sigma^2 \right)^{1/2} B\left(\frac{3-q}{2(q-1)}, \frac{1}{2}\right) & (1 < q < 3), \\ \left(\frac{3-q}{1-q} \sigma^2 \right)^{1/2} B\left(\frac{2-q}{1-q}, \frac{1}{2}\right) & (q < 1) \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる正規化定数とする.

q ガウス分布は, q を変えることで様々な確率分布を表すことができる. 例えば $1 < q < 3$ のときにはべき分布を表すが, $q < 1$ のときには有界な台をもつ確率分布となる. また, 須鎗 (2010) において, $q \rightarrow 1$ とすると正規分布, $q = 1 + 2/(n+1)$ とすると自由度 n の t 分布, $q = 2$ とすると Cauchy 分布になることが指摘されている.

次に, q ガウス分布の cdf を計算すると, 以下ようになる.

命題 1. $P_q(x)$ を $G_q(0, 1, q)$ の cdf とすると

$$P_q(x) = \int_{-\infty}^x p_q(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{x}{Z_q} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{q-1}, \frac{3}{2}; \frac{1-q}{3-q} x^2\right],$$

と表せる. ただし, ガンマ関数 $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ に対して

$${}_2F_1[a, b, c; z] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

を超幾何関数とする (Abramowitz and Stegun 1964).

注意 1. $G_q(\mu, \sigma^2, q)$ の cdf は

$$P_q(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-\mu}{Z_q} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{q-1}, \frac{3}{2}; \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right].$$

で与えられる.

図 1 は, いくつかの q に対する $G_q(0, 1, q)$ の cdf を表している. 正規分布の極値分布は Gumbel 分布であることはよく知られているが (Galambos 1978), q ガウス分布の極値分布は以下のようになる.

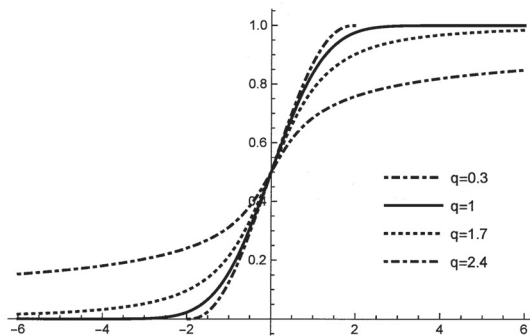


図 1 $q = 0.3, 1, 1.7, 2.4$ に対する $G_q(0, 1, q)$ の cdf

命題 2. $X_1, \dots, X_n$ を $G_q(0, 1, q)$ からの iid 標本とする. $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ とし, $P_q(x)$ を $G_q(0, 1, q)$ の cdf とする. このとき, $1 < q < 3$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_{(n)}}{a_n} \leq x\right) &= P(X_{(n)} \leq a_n x) = \{P(X_1 \leq a_n x)\}^n = \{P_q(a_n x)\}^n \\ &\rightarrow G_{1, (3-q)/(q-1)}(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{(3-q)/(q-1)}\} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$a_n = \left\{ \frac{Z_q}{n} \left(\frac{3-q}{q-1} \right)^{(2-q)/(1-q)} \right\}^{(1-q)/(3-q)}$$

とする. 同様に, $q < 1$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_{(n)} - \sqrt{(3-q)/(1-q)}}{b_n} \leq x\right) &= \left\{ P_q\left(\sqrt{(3-q)/(1-q)} + b_n x\right) \right\}^n \\ &\rightarrow G_{2, (2-q)/(1-q)}(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{(2-q)/(1-q)}\} & (x < 0), \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$b_n = \left\{ \frac{Z_q}{n} \frac{2-q}{1-q} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3-q}{1-q}} \right)^{1/(1-q)} \right\}^{(1-q)/(2-q)}$$

とする.

注意 2. $G_{1,\gamma}$, $G_{2,\gamma}$ は, それぞれ Fréchet 分布, Weibull 分布として知られている (Galambos 1978).

3 対数 q ガウス分布

この節では, q ガウス分布の対数変換によって対数 q ガウス分布を定義し, その性質を述べる.

3.1 対数 q ガウス分布の定義

定義 2. 確率変数 X が対数 q ガウス分布 $LG_q(\mu, \sigma^2, q)$ に従うとは, その pdf が

$$f_q(x) = \frac{1}{Z_q} \frac{1}{x} \left[1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(\log x - \mu)^2}{\sigma^2} \right]_+^{1/(1-q)} \quad (0 < x < \infty),$$

となるときをいう. ただし, $[a]_+ := \max\{a, 0\}$ とし, Z_q は (1) で定義されたものとする.

$q \rightarrow 1$ とすると, 対数 q ガウス分布は対数正規分布 $LN(\mu, \sigma^2)$ を導く. $1 < q < 3$ のとき,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f_q(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_q(x) = 0$$

となる. また, $q < 1$ のとき, 対数 q ガウス分布は有界な台を持つ. 実際, $LG_q(\mu, \sigma^2, q)$ の台は

$$\exp\left(\mu - \sigma \sqrt{\frac{3-q}{1-q}}\right) < x < \exp\left(\mu + \sigma \sqrt{\frac{3-q}{1-q}}\right)$$

となる. 図 2 は $LG_q(0, 1, q)$ のいくつかの pdf を表している.

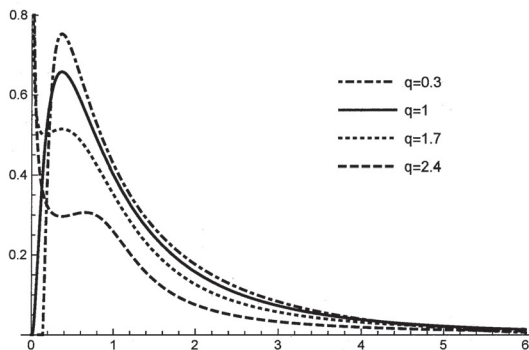


図 2 $q = 0.3, 1, 1.7, 2.4$ に対する $LG_q(0, 1, q)$ の pdf

注意 3. $1 < q < 3$ のとき, 多くの場合で対数 q ガウス分布の pdf は双峰型 (bimodal) となる. 特に, $q = 2 \pm \sqrt{1 - (1/\sigma^2)}$ ($\sigma \geq 1$) で極小となる. 従って, 対数 q ガウス分布の実データへの当てはめの際にはその点に注意すべきである.

次に, 対数 q ガウス分布の cdf を求める.

命題 3. $LG_q(0, 1, q)$ の cdf $F_q(x)$ は

$$F_q(x) = \int_0^x f_q(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{\log x}{Z_q} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{q-1}, \frac{3}{2}; \frac{1-q}{3-q}(\log x)^2\right]$$

と表せる.

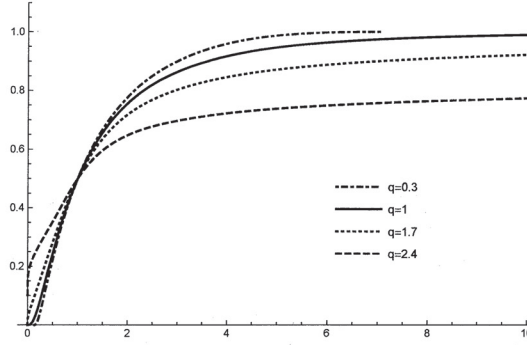


図3 $q = 0.3, 1, 1.7, 2.4$ に対する $LG_q(0, 1, q)$ の cdf

注意 4. $LG_q(\mu, \sigma^2, q)$ の cdf は

$$F_q(x) = \frac{1}{2} + \frac{\log x - \mu}{Z_q} {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{q-1}, \frac{3}{2}; \frac{1-q}{3-q} \frac{(\log x - \mu)^2}{\sigma^2} \right]$$

と表せる。図3は $LG_q(0, 1, q)$ の cdf をいくつか表している。

3.2 対数 q ガウス分布のモーメント

次に、対数 q ガウス分布の原点周りのモーメントを求める。

命題 4. $q < 1$ とする。 X が $LG_q(0, 1, q)$ に従うとき、 X の原点周りの r -次モーメントは

$$E[X^r] = {}_0F_1 \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{1-q}, \frac{r^2}{4} \frac{3-q}{1-q} \right]$$

となる。ただし、

$${}_0F_1[a; z] = \Gamma(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! z^n}{\Gamma(a+n)}$$

は合流型超幾何関数である (Abramowitz and Stegun (1964))。

注意 5. (i) $q < 1$ とする。 X が $LG_q(\mu, \sigma^2, q)$ に従うとき、 X の原点周りの r -次モーメントは

$$E[X^r] = e^{r\mu} {}_0F_1 \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{1-q}, \frac{r^2}{4} \frac{3-q}{1-q} \sigma^2 \right]$$

となる。これは $E[X^r] = E[e^{rY}]$ より導かれる。ただし、 $Y = \log X \sim G_q(0, 1, q)$ とする。

(ii) $1 < q < 3$ のとき、モーメントは存在しない。

通常のモーメントの拡張として、 q モーメントがある (Tsallis, Mendes, and Plastino 1998)。次に、対数 q ガウス分布の q モーメントを求める。

定義 3. (Tsallis, Mendes, and Plastino 1998))

$p(x)$ を確率変数 X の pdf とし, $g(x)$ を x の関数とする. このとき, $g(X)$ の q 期待値は

$$E_q[g(X)] := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\{p(x)\}^q dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \{p(x)\}^q dx}$$

で定義される. ただし, $E_q[\cdot]$ は, $p(x)$ のエスコート分布, すなわち pdf が

$$\frac{\{p(x)\}^q}{\int_{-\infty}^{\infty} \{p(x)\}^q dx}$$

である確率分布に関する期待値を表す. 特に, $E_q[X^r]$ を X の原点周りの r 次 q モーメントと呼ぶ.

対数 q ガウス分布の q モーメントは以下ようになる.

命題 5. $q < 1$ とする. X が $LG_q(0, 1, q)$ に従うとき, X の原点周りの r 次 q モーメントは

$$E_q[X^r] = {}_0F_1 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1-q}, \frac{r^2}{4} \frac{3-q}{1-q} \right]$$

となる.

注意 6. (i) $q < 1$ とする. X が $LG_q(\mu, \sigma^2, q)$ に従うとき, X の原点周りの r 次 q モーメントは

$$E_q[X^r] = e^{r\mu} {}_0F_1 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1-q}, \frac{r^2}{4} \frac{3-q}{1-q} \sigma^2 \right]$$

となる.

(ii) $1 < q < 3$ のとき, X の原点周りの r 次 q モーメントは収束しない.

3.3 対数 q ガウス分布のモードとメジアン

つぎに, $LG_q(0, \sigma^2, q)$ のモードとメジアンを求める.

命題 6. $LG_q(0, \sigma^2, q)$ のモードは,

$$x = \exp \left(\frac{1 - \sqrt{1 + (1-q)(3-q)\sigma^2}}{1-q} \right)$$

となる.

命題 7. X が $LG_q(0, \sigma^2, q)$ に従うとき, X のメジアンは 1 となり,

$$f_q(1) = \frac{1}{Z_q}$$

を満たす.

3.4 対数 q ガウス分布の極値分布

次に、対数 q ガウス分布の極値分布を求める。

命題 8. $q < 1$ とする. $X_1, \dots, X_n$ を $LG_q(0, 1, q)$ からの iid 標本とする. $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ とし, $F_q(x)$ を $LG_q(0, 1, q)$ の cdf とする. このとき, $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_{(n)} - e^A}{c_n} \leq x\right) &= P(X_{(n)} \leq e^A + c_n x) = \left\{F_q(e^A + c_n x)\right\}^n \\ &\rightarrow G_{2, (2-q)/(1-q)}(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{(2-q)/(1-q)}\} & (x < 0), \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる. ただし, $A = \sqrt{(3-q)/(1-q)}$ and $c_n = e^A - F_q^{-1}(1 - 1/n)$ とする.

4 対数 q ガウス分布における最尤法

ここでは、対数 q ガウス分布における尤度法に基づいた推定、および Fisher 情報行列について述べる。

$X_1, \dots, X_n$ を $LG_q(\mu, \sigma^2, q)$ からの iid 標本とする. $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\theta = (\mu, \sigma^2, q)$ とする. このとき, θ の尤度方程式は

$$L(\theta, X) = \frac{1}{Z_q^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \left[1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(\log x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right]_+^{1/(1-q)}$$

で与えられる. よって、対数尤度関数 $l(\theta, x)$ は

$$l(\theta, x) = -n \log Z_q - \sum_{i=1}^n \log x_i + \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^n \log \left[1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(\log x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right]_+$$

となる. $1 - (1-q)/(3-q) > 0$ の条件下で, θ に関する偏導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n \frac{2(\log x_i - \mu)}{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2}, \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{2(\log x_i - \mu)}{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2}, \\ \frac{\partial l}{\partial q} &= -\frac{n}{(1-q)(3-q)} + \frac{n}{(1-q)^2} A_q \\ &\quad + \frac{2}{(1-q)(3-q)} \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu)^2}{(3-q)\sigma^2 - (1-q)\mu^2 + (1-q)(2\mu - \log x_i) \log x_i} \\ &\quad + \frac{1}{(1-q)^2} \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(\log x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

となる。ただし, digamma 関数 $\psi(z) = (\partial/\partial z) \log \Gamma(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ とし,

$$A_q = \begin{cases} \psi\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{q-1}\right) & (1 < q < 3), \\ \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{2-q}{1-q}\right) - \psi\left(\frac{2-q}{1-q}\right) & (q < 1) \end{cases}$$

とおく。従って, これらの偏導関数を 0 として解くことにより, θ の最尤推定量 (MLE) を得ることができる。

さらに, 対数尤度関数の 2 次偏導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} &= -2 \sum_{i=1}^n \frac{(3-q)\sigma^2 + (1-q)(\log x_i - \mu)^2}{\{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2\}^2}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \sigma^2} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2 \partial \mu} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{(3-q)(\log x_i - \mu)}{\{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2\}^2}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial q} &= \frac{\partial^2 l}{\partial q \partial \mu} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu) \{(\log x_i - \mu)^2 - \sigma^2\}}{\{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2\}^2}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial (\sigma^2)^2} &= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{2(3-q)\sigma^2(\log x_i - \mu)^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^4}{(\sigma^2)^2 \{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2\}^2}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2 \partial q} &= \frac{\partial^2 l}{\partial q \partial \sigma^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu)^2 \{(\log x_i - \mu)^2 - \sigma^2\}}{\sigma^2 \{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2\}^2}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial q^2} &= - \frac{2n(2-q)}{(1-q)^2(3-q)^2} + B_q - \frac{2}{(1-q)^2(3-q)^2} \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu)^2 \{(3-q)(3q-5)\sigma^2 - (1-q)(3q-7)(\log x_i - \mu)^2\}}{\{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2\}^2} \\ &\quad + \frac{2}{(1-q)^2(3-q)} \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu)^2}{(3-q)\sigma^2 - (1-q)(\log x_i - \mu)^2} \\ &\quad + \frac{2}{(1-q)^3} \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(\log x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

となる。ただし, $A'_q = \partial A_q / \partial q$,

$$B_q = \begin{cases} \frac{2n}{(1-q)^3} A_q - \frac{n}{(1-q)^4} A'_q & (1 < q < 3), \\ \frac{2n}{(1-q)^3} A_q + \frac{n}{(1-q)^4} A'_q & (q < 1) \end{cases}$$

とする。これらの期待値を計算することで Fisher 情報行列を得ることができる。

5 応用例

この節では, 実データに対数 q ガウス分布を当てはめ, その母数の最尤推定を行う。また, 比較のため, 同一のデータに対数正規分布を当てはめ, その母数の最尤推定を行い, 赤池情報量規準

(AIC) や竹内情報量規準 (TIC) を用いて、対数 q ガウス分布、対数正規分布の比較を行う。ここでは、分布の台が未知母数に依存しないよう、 $1 < q < 3$ の場合のみ扱うこととする。

例 1. 日本の地方自治体の首長の平均給与データ (総務省統計局 2011) を考える。表 1 に数値が与えられている (単位万円)。

表 1 データの統計値

変数	n	平均	分散	標準偏差
X	1794	75.7913	210.776	14.5181

$LN(\mu, \sigma^2)$ と $LG_q(\mu, \sigma^2, q)$ を当てはめて、MLE を用いて母数を推定する。さらに、AIC と TIC を計算を行った結果が、表 2 に与えられている。その結果、対数 q ガウス分布を当てはめた方が対数正規分布を当てはめた場合よりも AIC と TIC の値が小さくなり、この場合の対数 q ガウス分布の優位性が分かる。データのヒストグラムと、推定された母数の値を用いた pdf が図 4 に表されている。

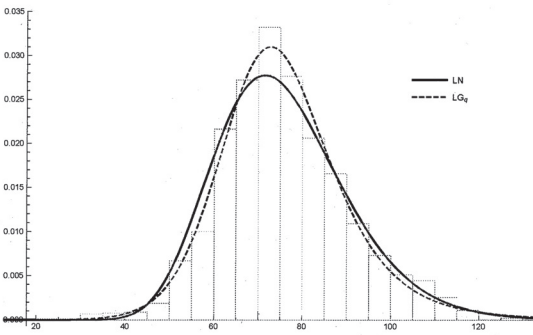


図 4 データのヒストグラムと LN と LG_q の pdf.

$1 < q < 3$ の場合、対数 q ガウス分布は極小値をもつ。例えば、 $q = 1.229$ のとき、pdf は $x = 0.0124$ で極小値をとり、そのときの cdf は $F_{1.229}(0.0124) = 1.556 \times 10^{-9}$ となる。この値は非

表 2 $LN(\mu, \sigma^2)$ と $LG_q(\mu, \sigma^2, q)$ のパラメータの推定値と AIC と TIC の値

	対数正規分布	対数 q ガウス分布
μ	4.309	4.313
σ^2	0.0389	0.0287
q	-	1.229
AIC	14731.899	14657.419
TIC	14734.168	14657.979

常に小さく、解析に与える影響は小さいものと考えられるであろう。

参考文献

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover, New York.
- [2] Crow, E.L. and Shimizu, K. (1988). *Lognormal distribution*. Marcel Dekker, New York.
- [3] David, H.A. and Nagaraja, H.N. (2005). *Order statistics, third edn.* Wiley, New York.
- [4] Furuichi, S. (2009). On the maximum entropy principle and the minimization of the Fisher information in Tsallis statistics. *Journal of Mathematical Physics*, **50**: 013303.
- [5] Galambos, J. (1978). *The asymptotic theory of extreme order statistics*. Wiley, New York.
- [6] Johnson, N.L. and Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous univariate distributions, vol.1, second edn.* Wiley, New York.
- [7] 総務省統計局 (2011). Average monthly salaries of governors, vice governors, and mayors of municipalities in Japan (in Japanese). <https://www.e-stat.go.jp/dbview?sid=0003131958>. Accessed 12 March 2018.
- [8] 須鎗弘樹. (2010). 複雑系のための基礎数理. 牧野書店, 東京.
- [9] Suyari, H. and Tsukada, M. (2005). Law of error in Tsallis statistics. *IEEE Transactions on Information Theory*: **51**, 753–757.
- [10] 田中勝. (2002). q -正規分布族に関する考察. 電子情報通信学会論文誌 D: **J85-D-II**, 161–173.
- [11] Tsallis C., Mendes, R.S., and Plastino, A.R. (1998). The role of constraints within generalized nonextensive statistics. *Physica A*: **261**, 534–554.