

シンプル・マルチヘッドオートマタに関する 2, 3 の性質

広島大・工学部

井 上 克 司

中 村 昭

阿 江 忠

最近, Ibarra は, マルチヘッドオートマタ (MHA) の制限されたタイプであるシンプルマルチヘッドオートマタ (SPMHA) を導入し, それらによって受理される言語の 2, 3 の性質を調べている.^{[1]~[3]} 特に, [3] では, 種々の決定問題の可解性を示す有用な手段として, SPMHA が用いられ得ることを示している。本稿では, SPMHA の言語受理能力が,

(1) 用いられるヘッドの個数

(2) 動作の決定性と非決定性

に依存していかに異なってくるかを議論する。ヘッドの個数が '1' 増せば, 真に能力が強まること, 非決定性は決定性より強力であることなどを示す。

1. 準 備

(1方向)マルチヘッド有限オートマトンの定義については、文献〔4〕、〔5〕を参照されたい。次の記法を用いる。

ε-HFA ... εヘッド1方向有限オートマトン

ε個のヘッドのうちただ1つのみがこのヘッドを読取りヘッドとよぶ)がテープ上の記号を識別でき、残りのヘッド(これらのヘッドを計数ヘッドとよぶ)は、左境界記号(Φ)、右境界記号($\$$)以外はテープ上の記号を識別することのできないようなε-HFAは、シンプル (simple)であるとよばれる。^{〔1〕} ~〔3〕
また、任意の2つのヘッドが同一のコマを読んでいるか否かを検知することのできるようなε-HFAは、検知形 (sensing)であるとよばれる。^{〔1〕}〔6〕 シンプル、検知形であることを表すのにそれぞれ頭に‘SP’、‘SN’を付ける。すなわち、

SPε-HFA ... シンプルε-HFA,

SNε-HFA ... 検知形ε-HFA,

SNSPε-HFA ... 検知形シンプルε-HFA。

また、動作が決定性、非決定性であることを表すのにそれぞれ頭に‘D’、‘N’を付ける。たとえば、

DSNSPε-HFA ... 決定性SNSPε-HFA。

例えば、DSNSPε-HFAによって受理されるすべてのテープの集合のクラスを ε(DSNSPε-HFA) と記す。

↓ 更に詳しい定義については、文献〔2〕を参照されたい。

2 結 果

最近, 各 $X \in \{D, N\}$, 各 $k \geq 1$ に対し, $\mathcal{L}(X^k\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(X^{k+1}\text{-HFA})$, $\mathcal{L}(XSN^k\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(XSN^{k+1}\text{-HFA})$ であることが示された.^[7] まず, 決定性 (検知形) シンプルマルチヘッド有限オートマタに対しても同様な事実が成り立つことを示そう.

補題 2.1 L を正規言語, L' を $DSNP^k\text{-HFA}$ で受理される言語とし, L の語の中に現われる記号集合と L' の語の中に現われる記号集合が共通の要素を含まないとする. このとき, $L \cdot L'$ は $DSNP^k\text{-HFA}$ で受理される. (証明略)

補題 2.2 各 $k \geq 1$ に対し, $T_k = \{0^{m_1}10^{m_2}1 \cdots 10^{m_k}20^m\epsilon^S \mid \text{各 } i (1 \leq i \leq k) \text{ に対し } m_i \geq 1, \text{ ある } j (1 \leq j \leq k) \text{ に対し } m = m_j, \text{ かつ } \epsilon \in \{0, 1, 2\} \text{ で } S \geq 1\}$ とする. このとき, (1) $T_k \in \mathcal{L}(DSP^{k+1}\text{-HFA})$, (2) $T_k \notin \mathcal{L}(DSNP^k\text{-HFA})$.

証明 (1): T_k は, 次の動作を行なう $DSP^{k+1}\text{-HFA}$ M で受理される. M の読取りヘッドを R , 計数ヘッドを $H_1, \dots, H_k$ とする. 入力として, $\$ 0^{m_1}10^{m_2}1 \cdots 10^{m_k}20^m\epsilon^S \$$ が与えられたとする. M は, R が $\epsilon, 1, 2, \epsilon$ を読むときは R と各 $H_i (1 \leq i \leq k)$ を同時に右に 1 コマ動かす. また, 各 $i (1 \leq i \leq k)$ に対し, R が 0^{m_i} を読む間は, H_i のみ 0^{m_i} の最初の '0' 上にとどめたまま, R と $H_1, \dots, H_{i-1}, H_{i+1}, \dots, H_k$ を同時に右に動かす. R が 0^m を読む間は, R を 1 コマ右に動かすごとに各

H_i ($1 \leq i \leq k$) を同時に右に 2 コマ動かす。このようにヘッドを動かすとき, $H_1, \dots, H_k$ のうちの少なくともひとつが R と同時に \$ にぶつかれば, 入力を受理する。(R が 0^m の最初の '0' 上にあるときには, 各 i ($1 \leq i \leq k$) に対し, H_i は R より m_i コマ左に位置していることに注意されたい。)

(2): (2) を証明するためには, 補題 2.1 より, 次の言語 T_k' がいかなる $\text{DSNSP}_k\text{-HFA}$ によっても受理されないことを示せばよい。 $T_k' = \{a\}^* \cdot T_k$, ここで $a \in \{0, 1, 2, \epsilon\}$ 。

いま, T_k' を受理する $\text{DSNSP}_k\text{-HFA}$ M が存在するとし, M の状態の個数を q とする。各 $n \geq 1$ に対し, V^n を次の集合とする。

$$V^n = \{a^i 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \dots 1 0^{m_k} 2 0^m \epsilon^s \mid i \geq 0, \forall j (1 \leq j \leq k) [1 \leq m_j \leq n], i + \sum_{j=1}^k m_j = nk, m \geq 1, s \geq 1, \text{かつ } m+s = n+1\}.$$

(V^n の要素はすべて $(k+1)(n+1)$ の長さを持つことに注意)。

V^n の中の 2 つの語

$$w = a^i 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \dots 1 0^{m_k} 2 0^m \epsilon^s,$$

$$w' = a^{i'} 0^{m'_1} 1 0^{m'_2} 1 \dots 1 0^{m'_k} 2 0^{m'} \epsilon^{s'}$$

は, $(m'_1, m'_2, \dots, m'_k)$ が $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ の置換 (permutation) であるとき, $w E w'$ と書かれる。関係 'E' は同値関係であり, この同値関係のもとで V^n の語を類別したときの同値類の総数は

$$P_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k}$$

個であり, この P_n 個の同値類を $C_1, C_2, \dots, C_{P_n}$ と記す。ところで, M の読み取りヘッド R が Σ^n の中の語の記号 '2' を読むときの M の configuration (M の状態と M の $k-1$ 個の計数ヘッドのテープ上での位置情報の対を, M の configuration とよぶ) の総数は, 高々, $t_n = 8 \cdot ((k+1)(n+1)+2)^{k-1}$ 個である。明らかに, 十分大きな n に対し, $P_n > t_n$ であり, このような n に対しては, 記号 '2' を読むときの M の configuration が同一となるような 2 つの語 $v \in C_i, v' \in C_j$ ($i \neq j$) が存在する。 v, v' は, 一般性を失なうことなく次のように選ぶことができる。

- $v = a^{i_1} 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \dots 1 0^{m_r} 1 \dots 1 0^{m_k} 2 0^{m_r} c^s,$
- $v' = a^{i'_1} 0^{m'_1} 1 0^{m'_2} 1 \dots 1 0^{m'_r} 1 \dots 1 0^{m'_k} 2 0^{m_r} c^s,$
- すべての i ($1 \leq i \leq k$) に対し, $m'_i \neq m_r$ 。

明らかに, $v \in T'_k$ であり, 従って $v' \in T'_k$ でなければならぬ。これは矛盾である。これで (2) の証明は終る。 ▮

定義より明らかに, $\mathcal{L}(\text{DSP}_k\text{-HFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DSNSP}_k\text{-HFA})$ であることに注意すれば, 補題 2.2 より, 次の定理が得られる。

定理 2.1 各 $k \geq 1$ に対し, (1) $\mathcal{L}(\text{DSP}_k\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(\text{DSP}_{(k+1)}\text{-HFA})$, (2) $\mathcal{L}(\text{DSNSP}_k\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(\text{DSNSP}_{(k+1)}\text{-HFA})$ 。

[問 1] 非決定性に対して, 定理 2.1 と同様な事実が成り立つか?

次に, 1 方向 (検知形) シンプル マルチヘッド 有限オートマタでは

, 非決定性は決定性より強力であることを示す。

補題 2.3 $T_\infty = \{ 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_n} 2 0^m c^s \mid n \geq 1, \text{ 各 } i (1 \leq i \leq n) \text{ に対し } m_i \geq 1, \text{ ある } j \text{ に対し } m = m_j (1 \leq j \leq n), \text{ かつ } s \geq 1 \text{ で } c \in \{0, 1, 2\} \}$ とする。このとき, (1) $T_\infty \in \mathcal{L}(\text{NSP2-HFA})$, (2) $T_\infty \notin \bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(\text{DSNSP}_k\text{-HFA})$ 。

証明 (1): T_∞ は, 次の動作を行なう NSP2-HFA M によって受理される。 M の読取りヘッドを R , 計数ヘッドを H とする。入力として, $\$ 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_n} 2 0^m c^s \$$ が与えられたとする。 M は, R が $\$, 1, 2, c$ を読む時は R と H を同時に右に 1 コマ動かす。 M は, 非決定的に $i (1 \leq i \leq n)$ を選択して, まず R と H を 0^{m_i} の最初の '0' 上に動かす。次に, R が 0^{m_i} を読む間は, H をそのまま動かさないで R のみ右に動かす。

R が 0^m を読む間は, R を 1 コマ右に動かす毎に, H を 2 コマ右に動かす。このようにヘッドを動かすとき, R と H とが同時に $\$$ にぶつかれば, 入力を受理する (R が 0^m の最初の '0' 上にある時は, H は R より m_i コマ左に位置している)。

(2): ある $n \geq 1$ に対し, $T_\infty \in \mathcal{L}(\text{DSNSP}_n\text{-HFA})$ とし, T_∞ を受理する $\text{DSNSP}_n\text{-HFA}$ を M とする。また, $\bigcup_{k+1}$ を次の集合とする。

$$\bigcup_{k+1} = \{ 0^{m_1} 1 0^{m_2} 1 \cdots 1 0^{m_n} 2 0^{m_{n+1}} c^s \mid \text{各 } i (1 \leq i \leq n+1) \text{ に対し } m_i \geq 1, s \geq 1, c \in \{0, 1, 2\} \}.$$

次の動作を行なう $\text{DSNSP}_k\text{-HFA}$ M' を考える。入力 $\$ x \$$ が

与えられたとき, M' は, M の動作を模倣して x が T_∞ の要素であるか否かを調べると同時に, x が U_{k+1} の要素であるか否かを確認し (この確認は, ヘッドの個数を増加させることなく行なうことが可能である), x が T_∞ と U_{k+1} の両方の要素であることが確かめられたときのみ, x を受理する。明らかに, M' は $T_\infty \cap U_{k+1}$ を受理する。一方, $T_\infty \cap U_{k+1} = T_k$ (T_k の定義については補題 2.2 参照) であり, 結局 M' は T_k を受理することになる。これは補題 2.2 (2) と矛盾する。 //

補題 2.3 より, 次の定理を得る。

定理 2.2 各 $k \geq 2$ に対し,

- (1) $\mathcal{L}(\text{DSP}_k\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(\text{NSP}_k\text{-HFA})$,
- (2) $\mathcal{L}(\text{DSNP}_k\text{-HFA}) \subsetneq \mathcal{L}(\text{NSNP}_k\text{-HFA})$, また
- (3) $\bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(\text{DSP}_k\text{-HFA}) \subsetneq \bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(\text{NSP}_k\text{-HFA})$,
- (4) $\bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(\text{DSNP}_k\text{-HFA}) \subsetneq \bigcup_{1 \leq k < \infty} \mathcal{L}(\text{NSNP}_k\text{-HFA})$ 。

[注 1] 1 方向 (検知形) マルチヘッド有限オートマタに対しても, 定理 2.2 と同様な事実が成り立つことが文献 [7] で示されている。

謝辞 日ごろ, 御指導, 御助言いただき名大工学部の本多波雄教授, 福村晃夫教授, 稲垣康善助教授, 山大工学部の高浪五男教授, 広大工学部の吉田典可教授に感謝する。

- [1] O.H.Ibarra : 'A note of semilinear sets and bounded-reversal multihead pushdown automata', Information processing letters 3, 1, (July 1974), P.25.
- [2] O.H.Ibarra et.al : 'Finite automata with multiplication', Theoretical Computer Science 2 (1976) P.271.
- [3] O.H.Ibarra et.al : 'A useful device for showing the solvability of some decision problems', JCSS 13 (1976), P.153.
- [4] A.L.Rosenberg : 'On multi-head finite automata', IBM J. Res. Develop. (1966), P.388.
- [5] I.H.Sudborough : 'On tape-bounded complexity classes and multihead finite automata', JCSS 10 (1975), P.62.
- [6] 井上, 中村 : '検知形マルチヘッドオートマタに関する2,3の性質', 信学論(D), 掲載予定.
- [7] A.C.Yao et.al : 'K+1 reads are better than K', IEEE, Proceedings of 17-th International Symposium on Foundations of Computer Science, P.67 (1976).