

3境界点の像により定まる数値等角写像の 代用電荷法による方法

A method based on the charge simulation method for numerical conformal mappings
which are determined by the mapping of three boundary points

愛媛大学工学部 緒方秀教 (Hidenori Ogata)
Faculty of Engineering, Ehime University

概要

本論文では、外部単連結領域から単位円板外部への数値等角写像を、与えられた3境界点の像が指定された点へ写るという条件の下で、代用電荷法により計算する方法を提案する。

1 はじめに

等角写像は複素関数論の基本的な問題であり、科学技術計算においても重要である。しかし、写像関数が厳密に知られている場合は少なく、等角写像を数値的に計算する方法、すなわち、数値等角写像が数値解析の分野で精力的に研究されている [2, 3, 6]。

本研究では、外部単連結領域から単位円板外部への数値等角写像を、問題領域の3個の境界点の像が指定された点に写るという条件のもとで、ポテンシャル問題の高速解法である代用電荷法 [4, 5] により計算する方法を提案する。同様の数値等角写像に対しては天野がすでに、正規化条件 $w(\infty) = \infty, w'(\infty) > 0$ ($w = w(z)$ は写像関数) のもとで代用電荷法を用いた計算法を提案している [1]。本論文の方法は天野の方法とは異なる正規化条件の問題を扱ったものであり、天野の方法と同様、プログラミングが簡単で計算量が少なく、しかもある条件のもとでは高い精度を得るという特徴をもつ。

なお、3境界点を指定された点に写す数値等角写像は、従来の天野の方法で計算することも可能である。すなわち、問題領域から単位円板外部への数値等角写像を天野の方法で計算し、その数値等角写像に1次分数変換を合成して、与えられた3境界点を指定された点に写すようにすればよい。しかし、本論文の方法によればそのような数値等角写像は直接的に計算できる。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では、議論に用いる記号を定義し問題を厳密に定式化する。そして、写像関数を求める問題をある調和関数の Dirichlet 問題に帰着させる。第3節では、第2節で得られた調和関数の Dirichlet 問題に代用電荷法を適用し、近似写像関数を複素対数ポテンシャルの1次結合を用いて表わす。なお、複素対数ポテンシャルを主値を用いて計算した際、主値の不連続が計算に現われないような方法、すなわち、連続スキームも提示する。第4節では、いくつかの典型的な場合に対する数値例を示し、本論文の方法の性能を実験的に検証する。第5節では、本論文の総括を行い今後の課題について触れる。

2 写像関数と境界条件

本研究では、外部単連結領域 $\mathcal{D}$ から単位円板外部 $\mathcal{E} = \{w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid |w| > 1\}$ への等角写像で、 $\mathcal{D}$ の任意の境界点 z_A, z_B, z_C をそれぞれ単位円周上の任意の点 $w_A = e^{i\beta_A}$, $w_B = e^{i\beta_B}$, $w_C = e^{i\beta_C}$ ($\beta_A < \beta_B < \beta_C$) へ写すものを考える (図1参照). なお、 $\mathcal{D}$ の境界は図1のように3点 z_A, z_B, z_C により弧 C_1, C_2, C_3 に分割されているとする.

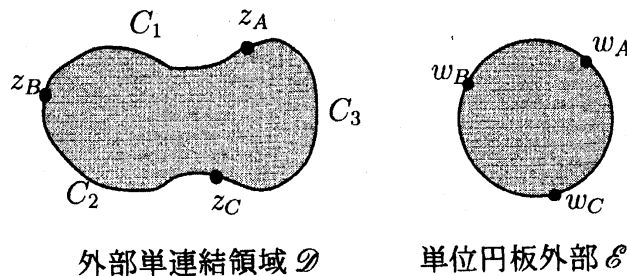


図1: 外部単連結領域 $\mathcal{D}$ から単位円板外部 $\mathcal{E}$ への等角写像. 写像は境界点 z_A, z_B, z_C をそれぞれ w_A, w_B, w_C へ写す.

写像関数 $w = w(z)$ を次のように表わす.

$$\frac{w - w_A}{w - w_B} = A \frac{z - z_A}{z - z_B} \exp(i(g(z) + ih(z))), \quad (1)$$

ここで $g(z), h(z)$ ¹ は $\mathcal{D}$ における共役調和関数であり、 A は正の定数である. 式(1)で表わされた写像関数が2点 z_A, z_B をそれぞれ2点 w_A, w_B に写すことは、自明である. 境界 $\partial\mathcal{D}$ は単位円周に写されるから、円周角の定理により、写像関数は境界条件

$$\arg\left(\frac{w - w_A}{w - w_B}\right) = -\frac{\beta_B - \beta_A}{2} + \begin{cases} \pi & (z \in C_1) \\ 0 & (z \in C_2 \cup C_3 \cup \{z_C\}), \end{cases} \quad (2)$$

すなわち、

$$g(z) = -\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) - \frac{\beta_B - \beta_A}{2} + \begin{cases} \pi & (z \in C_1) \\ 0 & (z \in C_2 \cup C_3 \cup \{z_C\}) \end{cases} \quad (3)$$

を満たす. さらに、等角写像は点 z_C を w_C に写すから、式(1)の両辺の絶対値をとった式に $z = z_C, w = w_C$ を代入して、定数 A は

$$A = \left| \frac{w_C - w_A}{w_C - w_B} \right| \left| \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \right| \exp(h(z_C)) \quad (4)$$

¹本来は $g(x, y), h(x, y)$ と記すべきであるが、点 (x, y) を複素数 $z = x + iy$ と同一視して $g(z), h(z)$ と記す.

であることが分かる. 逆に, 定数 A が式 (4) で与えられているとする. このとき, 境界条件 (2) より点 $w = w(z_C)$ は円弧 $w = e^{i\theta}$ ($\beta_B < \theta < \beta_A + 2\pi$) の上に存在し, 一方, 定数 A を与える式 (4) より点 $w = w(z_C)$ は Appolonius の円

$$\left| \frac{w - w_A}{w - w_B} \right| = \left| \frac{w_C - w_A}{w_C - w_B} \right|$$

の上に存在する. したがって, $w(z_C) = w_C$ である, すなわち, 写像関数 $w = w(z)$ は確かに点 z_C を点 w_C に写すことが分かる.

したがって, 等角写像 $w = w(z)$ を求める問題は, 共役調和関数 $g(z), h(z)$ で境界条件 (3) を満たすものを求める境界値問題に帰着される.

3 代用電荷法による近似写像関数

ここでは, 第2節で得た共役調和関数 $g(z), h(z)$ の境界値問題に代用電荷法を適用して $g(z), h(z)$ の近似関数を求めることにより, 写像関数 $w = w(z)$ の近似を求める.

関数 $g(z)$ は境界条件 (3) に従う調和関数であるから, 代用電荷法により

$$g(z) \simeq G(z) = Q_0 + \sum_{j=1}^N Q_j \log |z - \zeta_j| \quad (5)$$

と近似する. ここで, ζ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) はユーザにより $\mathcal{D}$ 外部に与えられる点で, 電荷点と呼ばれる. Q_j ($j = 0, 1, \dots, N$) は未知の実数係数で, 電荷と呼ばれる. 関数 $h(z)$ は $g(z)$ の共役調和関数であるから, 式 (5) より

$$h(z) \simeq H(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \arg(z - \zeta_j) \quad (6)$$

と近似する. 式 (5), (6) を組み合わせて, 近似式

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{j=1}^N Q_j \log(z - \zeta_j) \quad (7)$$

を得る. ここで, 複素対数関数の1次結合を含む近似関数 $G(z) + iH(z)$ が $\mathcal{D}$ で1価関数であるように, 電荷 Q_j に対し条件

$$\sum_{j=1}^N Q_j = 0 \quad (8)$$

を課す. 境界条件 (3) に関して, 近似関数 $G(z)$ に対してはもとの境界条件を緩和した拘束条件, すなわち, 有限個の境界点でのみ (3) を満たすという条件

$$G(z_i) = -\arg\left(\frac{z_i - z_A}{z_i - z_B}\right) - \frac{\beta_B - \beta_A}{2} + \begin{cases} \pi & (i = 1, 2, \dots, N_1) \\ 0 & (i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N) \end{cases} \quad (9)$$

を課す. ここで, $z_1, z_2, \dots, z_{N_1} (\in C_1)$, $z_{N_1+1}, z_{N_1+2}, \dots, z_N (\in C_2 \cup C_3 \cup \{z_C\})$ はユーザにより与えられる境界点で, 拘束点と呼ばれる.

関係式 (8), (9) は未知数 Q_j ($j = 0, 1, 2, \dots, N$) に関する連立 1 次方程式を構成する. この連立 1 次方程式を解くことにより, 未知数 Q_j そして近似関数 $G(z) + iH(z)$ が定まり,

$$\frac{w - w_A}{w - w_B} = \tilde{A} \frac{z - z_A}{z - z_B} \exp(i(G(z) + iH(z))), \quad \tilde{A} = \left| \frac{w_C - w_A}{w_C - w_B} \right| \left| \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \right| \exp(H(z_C)) \quad (10)$$

により近似写像関数 $w = W(z)$ を得る.

連続スキーム 式 (7) で表わされる近似関数 $G(z) + iH(z)$ は, 複素対数関数 $\log(z - \zeta_j)$ を含む. ところで, 複素対数関数 $\log z$ をコンピュータで計算する際, 主値 $\text{Log } z$, すなわち, $-\pi < \text{Im} \log z = \arg z \leq \pi$ なる分枝を用いることが多い. そして, 近似関数 $G(z) + iH(z)$ を式 (7) の通りに, 複素対数関数に主値を用いて計算すると, $\log(z - \zeta_j)$ が半直線 $\{t + \zeta_j | t \in \mathbb{R}, -\infty < t \leq 0\}$ 上にもつ $2\pi i$ の不連続が問題領域 $\mathcal{D}$ 内に現われ, 不都合である. また, 拘束条件 (9) 右辺に含まれる偏角 $\arg$ も, コンピュータ計算では主値 Arg , すなわち, $-\pi < \arg z \leq \pi$ なる分枝を用いることが多い. したがって, 境界 $\partial\mathcal{D}$ 内部の領域が凸でない場合, 拘束条件を式 (9) の通りに採用すると, 関数 $\arg((z - z_A)/(z - z_B))$ が 2 点 z_A, z_B を結ぶ線分上にもつ $2\pi i$ の不連続が領域 $\mathcal{D}$ 内に現われ, 不都合である. したがって, 近似関数 $G(z) + iH(z)$ の表式 (7) および拘束条件の式 (9) を, 数学的に同値でかつ主値 Log, Arg を用いても不連続が現われないような表式に書き直さなければならない.

ここで簡単のため, 境界 $\partial\mathcal{D}$ はその内部の点 ζ_0 に関して星型であると仮定する. 電荷 Q_j に課された条件 (8) から得られる等式 $0 = \sum_{j=1}^N Q_j \log(z - \zeta_0)$ を式 (7) 両辺から引いて, 近似関数 $G(z) + iH(z)$ に対し新たに表式

$$G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{j=1}^N Q_j \log \left(\frac{z - \zeta_j}{z - \zeta_0} \right) \quad (11)$$

を得る. 式 (11) 右辺の対数関数 $\log((z - \zeta_j)/(z - \zeta_0))$ は, 主値 Log を用いて計算すると, 2 点 ζ_j, ζ_0 を結ぶ線分上に不連続をもつ. しかし, 境界 $\partial\mathcal{D}$ が点 ζ_0 に関し星型という仮定より, この不連続は問題領域 $\mathcal{D}$ には現われない. 一方, 拘束条件 (9) は,

$$G(z_i) = -\arg \left(\frac{z_i - z_A}{z_i - \zeta_0} \right) + \arg \left(\frac{z_i - z_B}{z_i - \zeta_0} \right) - \frac{\beta_B - \beta_A}{2} + \begin{cases} \pi & (i = 1, 2, \dots, N_1) \\ 0 & (i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N) \end{cases} \quad (12)$$

と書き直す. 式 (12) 右辺の $\arg$ の計算に主値 Arg を用いると, $\arg((z - z_A)/(z - \zeta_0))$ は 2 点 z_A, ζ_0 を結ぶ線分上に, $\arg((z - z_B)/(z - \zeta_0))$ は 2 点 z_B, ζ_0 を結ぶ線分上に不連続をもつ. しかし, 仮定よりこれらの不連続は問題領域 $\mathcal{D}$ には現われない.

したがって、拘束条件として式(12)を用い、近似関数 $G(z) + iH(z)$ を式(11)を用いて計算すれば、主値 Log , Arg の不連続による問題とは無縁に計算を進めることができる。このような数値等角写像の計算法を連続スキームと呼ぶ。

4 数値例

いくつかの例について数値計算結果を示す。すべての数値計算は、Sun Blade 150 ワークステーション上でCのプログラムを用い、倍精度計算で行った。

例1 問題領域は楕円外部

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 = \left\{ x + iy \mid \frac{x^2}{a^2} + y^2 > 1 \right\} \quad (a > 0),$$

点 $z_A, z_B, z_C, w_A, w_B, w_C$ はそれぞれ

$$z_A = a, \quad z_B = i, \quad z_C = -a, \quad w_A = 1, \quad w_B = e^{i2\pi/3}, \quad w_C = e^{i4\pi/3}$$

である。拘束点 z_i , 電荷点 ζ_i は,

$$z_i = \psi(\rho e^{i\theta_i}), \quad \zeta_i = \psi(q\rho e^{i\theta_i}) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ととった。ここで、 q は $\rho^{-1} < q < 1$ なる定数,

$$\theta_i = \frac{2\pi(i - 0.5)}{N}, \quad \rho = \left(\frac{a+1}{a-1} \right)^{1/2},$$

ψ は Joukowski 変換

$$\psi(t) = \frac{c}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad c = (a^2 - 1)^{1/2}$$

である。

図2に、問題領域 $\mathcal{D}_1$ ($a = 2$) から単位円板外部 $\mathcal{E}$ への本論文の方法による数値等角写像を示す。拘束点/電荷点数 N は $N = 64$ である。図“楕円外部 $\mathcal{D}_1$ ”には領域 $\mathcal{D}_1$ 内の実軸または虚軸に平行な直線群を描き、図“単位円板外部 $\mathcal{E}$ ”にはそれらの数値等角写像による像を描いてある。なお、図中の小さい丸は、点 z_A, z_B, z_C とそれらの像を示す。

数値等角写像の相対誤差に対し、解析関数の最大値の原理より、不等式

$$\frac{|W(z) - w(z)|}{|w(z)|} \leq \max\{E_M + E_A, E_\infty\} \quad (13)$$

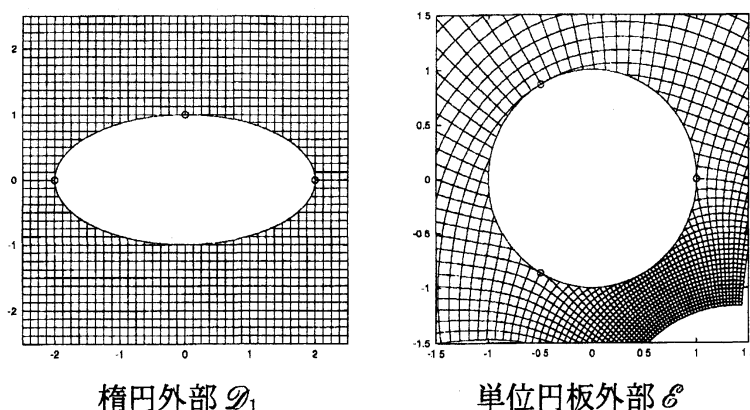


図 2: 楕円外部 $\mathcal{D}_1$ から単位円板外部 $\mathcal{E}$ への数値等角写像.

が成り立つ [1]. ここで,

$$E_M = \max_{z \in \partial \mathcal{D}} ||W(z)| - 1|, \quad E_A = \max_{z \in \partial \mathcal{D}} |\arg W(z) - \arg w(z)|, \quad (14)$$

$$E_\infty = \left| \frac{W(\infty)}{w(\infty)} - 1 \right|$$

である². したがって, 値 E_M, E_A, E_∞ を数値等角写像の誤差の指標とみなすことができる. 表 1 に, 問題領域 $\mathcal{D}_1$ から単位円板外部 $\mathcal{E}$ への本論文の方法による数値等角写像の誤差の指標 E_M, E_A, E_∞ を示す. 厳密な写像関数は $w = \{z + (z^2 - a^2 + 1)^{1/2}\} / (a + 1)$ に 1 次分数変換を合成して, 点 z_A, z_B, z_C がそれぞれ w_A, w_B, w_C に写るようにしたものである. 比較のため, 同じ拘束点・電荷点を用いた天野の方法 [1] による数値等角写像に対する E_M, E_A, E_∞ の値も調べ, 表 1 に記した. ここでいう天野の方法による数値等角写像とは, 条件 $w(\infty) = \infty, w'(\infty) > 0$ のもとで $\mathcal{D}$ から $\mathcal{E}$ への数値等角写像を天野の方法 [1] で計算し, その写像に 1 次分数変換を合成して z_A, z_B, z_C がそれぞれ w_A, w_B, w_C に写るようにしたものである. 表より本論文の方法について, $a = 1.2, 2$ の場合, 拘束点/電荷点数 $N = 64$ で誤差が 10^{-15} 程度であり, 高い精度を達成していることが分かる. 楕円がより扁平になった $a = 5$ の場合は精度が若干落ちるが, それでも $N = 128$ で誤差が 10^{-10} 程度にまで減少している. いずれの場合も, $E_M \sim E_A$ が成り立ち, 一方 E_∞ は E_M, E_A より若干小さい値である. したがって, 楕円外部 $\mathcal{D}_1$ の数値等角写像の場合, 式 (14) の E_M, E_A, E_∞ のうち一番簡単に計算できる値 E_M が誤差の指標となりうる. なお, 天野の方法と比較すると, 本論文の方法のほうが (とくに $a = 2, 5$ の場合) 高い精度を達成していることが分かる.

例 2 問題領域は, Cassini の楕形の外部

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid |z^2 - 1| > a^2\} \quad (1 < a \leq \sqrt{2}),$$

² 偏角 $\arg$ は $2\pi \times (\text{整数})$ の不定性をもつので, E_A は実際には $E_A = \max_{z \in \partial \mathcal{D}} |\text{Arg}(W(z)/w(z))|$ で計算する.

表 1: 楕円外部 $\mathcal{D}_1$ から単位円板外部 $\mathcal{E}$ への数値等角写像の誤差の指標 E_M, E_A, E_∞ .

a	q	N	本論文の方法			天野の方法		
			E_M	E_A	E_∞	E_M	E_A	E_∞
1.2	0.6	16	2.2E-05	1.8E-05	8.6E-06	3.2E-04	2.0E-04	3.4E-04
		32	3.1E-09	2.4E-09	1.2E-09	5.1E-08	3.1E-08	5.5E-08
		64	1.8E-15	2.2E-15	9.8E-16	2.7E-15	1.5E-15	1.0E-15
2	0.6	16	6.9E-04	4.7E-04	1.9E-04	2.0E-02	1.2E-02	1.2E-02
		32	1.4E-07	1.1E-07	3.4E-08	1.6E-04	8.6E-05	8.4E-05
		64	7.4E-15	6.2E-15	1.2E-15	1.4E-08	7.2E-09	7.0E-09
5	0.85	16	1.7E-01	1.2E-01	6.2E-02	6.7E-01	3.5E-01	3.1E-01
		32	1.1E-02	7.6E-03	3.2E-03	8.9E-02	4.9E-02	5.5E-02
		64	3.2E-05	2.6E-05	9.5E-06	2.4E-03	1.3E-03	1.4E-03
		128	4.5E-10	4.1E-10	1.5E-10	2.2E-06	1.1E-06	1.2E-06

点 $z_A, z_B, z_C, w_A, w_B, w_C$ はそれぞれ

$$z_A = (a^2 + 1)^{1/2}, \quad z_B = i(a^2 - 1)^{1/2}, \quad z_C = -(a^2 + 1)^{1/2},$$

$$w_A = 1, \quad w_B = e^{i2\pi/3}, \quad w_C = e^{i4\pi/3}$$

である. 拘束点 z_i , 電荷点 ζ_i は,

$$z_i = r_i e^{i\theta_i}, \quad \zeta_i = z_i + i(z_{i+1} - z_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ととった. ここで,

$$\theta_i = \frac{2\pi(i - 0.5)}{N}, \quad r_i = (\cos 2\theta_i + (\cos^2 2\theta_i + a^4 - 1)^{1/2})^{1/2}, \quad z_{N+1} = z_1, \quad z_0 = z_N$$

である.

図 3 に, 問題領域 $\mathcal{D}_2$ ($a = 2^{1/8}$) から単位円板外部 $\mathcal{E}$ への本論文の方法による数値等角写像を示す. 拘束点/電荷点数 N は $N = 64$ である. 図 “Cassini 楕円外部 $\mathcal{D}_2$ ” には領域 $\mathcal{D}_2$ 内の実軸または虚軸に平行な直線群を描き, 図 “単位円板外部 $\mathcal{E}$ ” にはそれらの数値等角写像による像を描いてある. なお, 図中の小さい丸は, 点 z_A, z_B, z_C とそれらの像を示す.

この数値例についても, 式 (14) で定義される誤差の指標 E_M, E_A, E_∞ を計算した. その結果を表 2 に示す. 厳密な写像関数は $w = (z^2 - 1)^{1/2}/a$ に 1 次分数変換を合成して, 点 z_A, z_B, z_C がそれぞれ点 w_A, w_B, w_C に写るようにしたものである. この例でも例 1 と同様, 比較のため, 同じ拘束点・電荷点を用いた天野の方法 [1] による数値等角写像に対する E_M, E_A, E_∞ の値も調べて, 表 2 に記した. 表より, 拘束点/電荷点数 $N = 128$ で

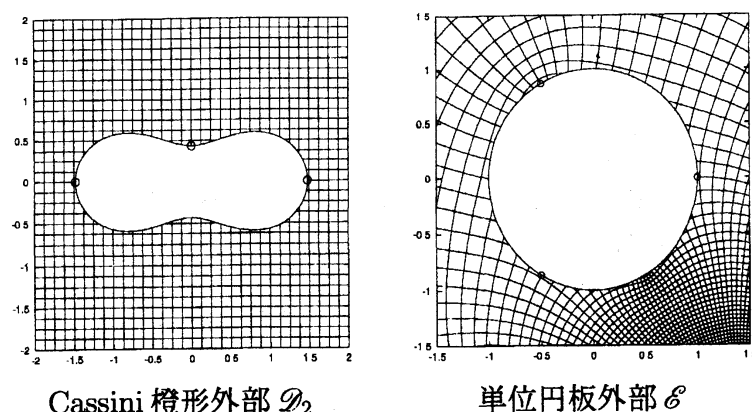


図 3: Cassini 楕形外部 $\mathcal{D}_2$ から単位円板外部 $\mathcal{E}$ への数値等角写像.

誤差が $10^{-6} \sim 10^{-8}$ であり, 高い精度を達成しているが, a が小さくなるにつれて, すなわち, 楕形のくびれが著しくなるにつれて精度は落ちている. なお, 例 1 と同様この数値例についても, $E_M \sim E_A$ が成り立ち, E_∞ は E_M, E_A より若干値が小さい. したがって, Cassini 楕形外部 $\mathcal{D}_2$ の数値等角写像についても, E_M が誤差評価の指標となりうる. なお, 天野の方法と本論文の方法とを比較すると, ほぼ同程度の精度を達成している.

5 まとめと今後の課題

本論文では, 単連結外部領域から単位円板外部への数値等角写像で与えられた 3 境界点を指定された点に写すものに対し, 代用電荷法に基づく計算法を提案した. 数値例から, 本論文の方法により十分な精度で数値等角写像を計算できることが分かった. そして, 数値等角写像の誤差評価には, いちばん簡単に計算できる絶対値の誤差 E_M がおよそその指標となることも分かった. 一部の例について, 本論文の方法は天野の方法に基づく方法と比べて, 若干良い精度を与えた.

なお, 単連結内部領域から単位円板内部への数値等角写像で与えられた 3 境界点を指定された点に写すものに対しても, 本論文と同様の方法で計算できる. この詳細については, 今後の論文で報告する予定である.

謝辞 本研究を通し有用な助言を頂いた愛媛大学工学部情報工学科 天野要教授, 岡野大助手, 名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻 杉原正顯教授に感謝する. 本研究は科学研究費補助金 (若手研究 (B), 課題番号 14750054) の助成を受けている.

表 2: Cassini 楕形外部 $\mathcal{D}_2$ から単位円板外部 $\mathcal{E}$ への数値等角写像の誤差の指標 E_M , E_A , E_∞ .

a	N	本論文の方法			天野の方法		
		E_M	E_A	E_∞	E_M	E_A	E_∞
$2^{1/2}$	16	1.1E-03	1.1E-03	2.4E-05	1.8E-02	9.2E-03	5.5E-03
	32	5.1E-07	4.9E-07	5.9E-09	4.3E-06	2.4E-06	2.8E-06
	64	1.1E-07	7.9E-08	1.4E-08	4.5E-07	2.8E-07	3.9E-07
	128	4.1E-08	2.6E-08	1.4E-08	1.2E-07	8.0E-08	1.5E-07
$2^{1/8}$	16	1.3E-01	8.8E-02	1.1E-02	5.3E-01	2.9E-01	1.9E-02
	32	3.4E-05	3.0E-05	6.0E-07	1.2E-04	1.4E-04	5.2E-05
	64	1.2E-06	1.0E-06	6.7E-08	3.1E-06	1.6E-06	1.4E-06
	128	1.3E-07	1.3E-07	1.2E-08	4.3E-07	2.5E-07	3.3E-07
$2^{1/32}$	16	6.8E-02	3.1E+00	8.6E-01	5.4E+00	3.1E+00	4.9E-02
	32	1.0E-02	7.1E-03	6.9E-04	1.9E-03	1.7E-03	1.3E-04
	64	3.8E-05	3.2E-05	2.1E-07	2.2E-05	2.0E-05	1.9E-06
	128	1.5E-06	1.2E-06	4.7E-08	1.2E-06	6.4E-07	4.1E-07

参考文献

- [1] 天野要: 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol.29, No.1, pp.62-72 (1988).
- [2] Henrici, P.: Applied and Computational Complex Analysis, Vol.3, John Wiley & Sons, New York (1986).
- [3] Kythe, P. K.: Computational Conformal Mapping, Birkhäuser, Boston (1998).
- [4] 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京 (1983).
- [5] 岡本久, 桂田祐史: ポテンシャル問題の高速解法, 応用数理, Vol.2, No.3, pp.2-20 (1992).
- [6] Trefethen, L. N. (Ed.): Numerical Conformal Mapping, North-Holland, Amsterdam (1986); J. Comput. Appl. Math., Vol.14, No.1-2 (1986).