

氏 名	山 縣 秀 雄 やま がた ひで お
学位の種類	工 学 博 士
学位記番号	論 工 博 第1387号
学位授与の日付	昭 和 56 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	Studies on soliton solutions of some nonlinear dispersive wave equations (或る非線形分散波動方程式のソリトン解の研究)

論文調査委員 (主 査) 教 授 池 田 峰 夫 教 授 大 矢 勇 次 郎 教 授 上 田 顯

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は、sine-Gordon 方程式を中心に、準線形分散波動方程式のソリトン解の重ね合せについて研究したもので、7章から成り立っている。

第1章では、本論文で取扱った問題の起源を論じ、特に、解の自由度による非線形方程式の分類に関する A. C. Scott の予想について述べている。

第2章では、まず、種々の準線形分散波動方程式に対して、Bäcklund 変換の系統的な構成法を見出している。次に、 $3+1$ 次元 sine-Gordon 方程式を拡張して、 2×2 行列解をもつ方程式（以下、ESG 方程式という）を考え、それに対する Bäcklund 変換を一般的な方法で導いている。

第3章では、まず、種々の $1+1$ 次元準線形分散波動方程式について、Bäcklund 変換の可換（順序交換可能）定理、ならびに完全可換定理を証明している。ここに、完全可換定理とは、可換定理に対する一種の逆定理であって、可換定理で得られた関係式、すなわち、Bäcklund 変換の加法定理が、もとの方程式の解を与えることを保証するものである。次に、第2章で述べた ESG 方程式をとりあげ、 2×2 行列解がある可換代数に属するという仮定のもとで、上の二つの定理を証明している。また、解が 2×2 単位行列の実数値関数倍の形をとるとき、ESG 方程式は、もとの $3+1$ 次元 sine-Gordon 方程式と一致することを見出している。最後に、上の二つの定理を $3+1$ 次元 sine-Gordon 方程式に適用して、 N 個あるいは連続無限個のソリトン解の重ね合せをある条件のもとで行っている。なお、ここで ESG 方程式を利用した理由は、Bäcklund 変換に対する Eisenhart の可換定理に矛盾が現れるからであるが、その事情についても詳しく述べている。

第4章では、種々の方程式に対し、広田の N ソリトン解を拡張してB型解と呼ばれる解を求めている。すなわち、広田の N ソリトン解に含まれる N 個の位相のずれを N 個のデルタ関数の和で表示し、後者を関数または超関数でおきかえ、更に表示の有限和を無限和に拡張するとB型解が得られる。B型解は、ある種の一般解ともいふべきもので、 N ソリトン解や C ソリトン解を特別な場合として含んでいる。ここに、

cソリトン解とは、上述のデルタ関数の有限和を可積分関数でおきかえ、多重積分で表示したものである。ここでは、このようにして得られたcソリトン解が、ある条件のもとで、もとの方程式の解析的な解となることを明らかにしている。

第5章では、sine-Gordon 方程式の局所化された解を与えている。ある方向について周期的で、残りの方向については局所的な解、すなわちブリーザ解はその1例である。著者は、もっと一般に、複素平面上で実軸に関して対称な曲線に沿って積分を行い、局所化された実数値解を求めている。

第6章では、sine-Gordon 方程式のブリーザ解を、拡張された積分（A-積分）を用いて、キंक型のソリトン解の重ね合せとして表示するとともに、KdV 方程式、変形 KdV 方程式についてもブリーザ解を具体的に求めている。

第7章では、種々の方程式に対して、第3章から第5章までに求めたNソリトン解、cソリトン解、ブリーザ解を、Simpson の公式などを用いて数値計算し、その結果を図示している。これによって、Nソリトン解のいくらかでも近くにcソリトン解が存在することを明らかにしている。

最後に、この方面で残された若干の問題について言及している。

論文審査の結果の要旨

近年、数学およびその応用分野において、非線形偏微分方程式のソリトン解の研究が盛んになってきた。著者は、このような情況のもとで、sine-Gordon 方程式を中心に準線形分散波動方程式について研究し、特にソリトン解の重ね合せの問題を解明してきたが、本論文はその成果をまとめたもので、主な結果は次のとおりである。

1. 双曲型の $1+1$ 次元準線形分散波動方程式に対して、Bäcklund 変換の系統的な構成法を見出し、種々の Bäcklund 変換の可換（順序交換可能）定理、ならびにその逆定理ともいえる完全可換定理を証明している。

2. $3+1$ 次元 sine-Gordon 方程式を拡張して、 2×2 行列解をもつ方程式（ESG 方程式という）を考え、それに対する Bäcklund 変換を導くとともに、 2×2 行列解がある可換代数に属するという仮定のもとで、上の二つの定理を証明している。また、解が 2×2 単位行列の実数値関数倍の形をとるとき、ESG 方程式は、もとの $3+1$ 次元 sine-Gordon 方程式と一致することを見出している。これらの結果に基づき、 $3+1$ 次元 sine-Gordon 方程式について、N個あるいは連続無限個のソリトン解の重ね合せがある条件のもとでなし遂げている。

3. 種々の方程式について、広田のNソリトン解を拡張してある種の一般解（B型解という）を求めるとともに、後者の特別なものとしてcソリトン解を導き、それがもとの方程式の解析的な解となり得ることを明らかにしている。

4. sine-Gordon 方程式に対して、実軸に関して対称な曲線に沿っての複素積分を利用して、ブリーザ解を含むような局所化された解を導いている。

5. sine-Gordon 方程式のブリーザ解を、拡張された積分（A-積分）によって、キंक型のソリトン解の重ね合せとして表示するとともに、KdV 方程式、変形 KdV 方程式についてもブリーザ解を具体的に

に求めている。

6. 種々の方程式に対して、 N ソリトン解、 c ソリトン解、ブリーザ解のグラフを描き、それによって、 N ソリトン解のいくらでも近くに c ソリトン解が存在することを見出している。

解の重ね合せは、線形方程式固有の方法とみられているが、上のようにして、この方法を準線形分散波動方程式へ拡張できることが明らかになった。この点は、非線形方程式論の発展と応用にとって意義深いことと思われる。

要するに、本論文は、準線形分散波動方程式について解の重ね合せの問題を研究し、いくつかの新知見を得たものであって、理論上貢献するところが多いだけでなく、工学の幅広い分野への応用も期待される。

よって、本論文は、工学博士の学位論文として価値あるものと認める。