

行列環における positivity と positive map の集合の構造について

新潟大 理 富山 淳

Jun Tomiyama

§1. はじめに. 行列環は非可換な代数系の出発点になっている. そこでこの環における positivity の意味を可換な C*-環 (連続関数環) のそれと対比して考え直し, そのあとに行列環 M_n 上の positive map のつくる凸錐の重層構造の一部を解析するものが本稿の目的である.

可換な system の特性は, その $\mathcal{A}$ の各元の独立性にあるように思われる. 従ってここで positivity は各元の $\mathcal{A}$ 上での性質と考えることができる. これに対して非可換な M_n では, $\mathcal{A}$ の元はすべて独立に動くわけでは無いので, ここで positivity は通常のそれだけでは十分であると考えられる. 例えは相互に依存する system として, partial isometry u ともなる同値な projection p, q を考えると $\{p, q, u\}$ は M_n の元という意味であることが出来る. そして u も加えてこれを M_n 上の 2×2 行列元と考えると $\begin{bmatrix} p & u^* \\ u & q \end{bmatrix}$ の形). これは

M_n の "virtual" を positive 元とみてよいであろう。行列環の positivity とは、これから出てくる order の M_n の virtual 元の positivity を各層に入め合わせる "重層構造" をもつと考えるのが自然であろう。従って M_n 上の positive map とは、このように重層構造とどうよりにかかわっているかが問題になり、各 order k についての k -positive map の概念が定義されている。今 M_n 上の linear map τ について $\tau(k)$ を

$$\tau(k): [a_{ij}] \in M_k(M_n) \rightarrow [\tau(a_{ij})] \in M_k(M_n)$$

と定めて、すべての k について $\tau(k)$ が positive map のとき、 τ を completely positive map と呼ぶ。しかし M_n でのこの重層構造は次の意味で n で saturate されている。つまり " M_n 上にあっては τ が n -positive であるならば、completely positive である "。

以上から M_n 上の positive map の作る凸錐は、重層構造をもつことにするが、各層のつみ重なり具合については、ほとんど何もわかっていないというのが現状である。各層に所属する固有な写像 (k -positive で $k+1$ -positive でない) についても単一的な例が出ていないため、ここでは M_n に固有な写像、 σ : identity, θ : 転置写像 $T_\theta(x) = \frac{1}{n} T_r(x) 1_n$ をもとにこの重層構造の一断面を見てみる。これは単位元を単位元に写す "わゆる unital map" である。

§2. σ , θ と τ_0 の幾何学的関係. 矢張り σ と τ_0 は明らかに completely positive $= n$ -positive map である. これに対して θ は positive map であるが 2-positive にもなることが知られている ([1]), すなわち最下層の子像である. よしてこれらも結ぶ線分によって次の結果が得られる. [1].

定理 1. $\tau = \lambda \tau_0 + (1-\lambda) \sigma$ ($-\infty < \lambda < \infty$) とする. n のとき $1 \leq k \leq n$ に対して

$$(i) \tau \text{ が } k\text{-positive になるのは } 0 \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{nk-1}$$

のとき.

(ii) τ が k 次の Schwarz の不等式をみたすのは

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ のときは } 0 \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{nk} \text{ のとき}$$

$$k=n \text{ のときは } 0 \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{n^2-1} \text{ のとき}$$

ここで τ が k 次の Schwarz の不等式をみたすとは M_n の任意の k 個の元の組 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ に対してブロッコ行の不等式

$$[\tau(a_i^* a_j)] \geq [\tau(a_i)^* \tau(a_j)]$$

が成り立つことをいう. この定理は τ_0 と σ の関係によって次のことを意味している. 今 M_n 上の positive map の集合を $\mathcal{P}$ とし, $\mathcal{P}$ に "ただの positive map" の層を添え, 頂上には n -positive map

の層をふいた山にたとえると、 T_0 の側に連続した線は非常に与
たうかる slope を画いてゐる。つまり各 k ($1 \leq k \leq n-1$) に
ついて半開区間 $(1 + \frac{1}{n(k+1)-1}, 1 + \frac{1}{nk-1})$ に属する λ について
の写像は k -positive でかつ $(k+1)$ -positive である層をつく
てゐる。また $(n-1)$ -positive map の層の端の点

$$T(x) = \frac{1}{n^2 - n - 1} (T_0(x)1_n - x)$$

は $\text{Cho}_1[\]$ で始めて示された、 n -positive でなくて $(n-1)$ -posi-
tive な写像の例の正規化にほかるもの。 Cho_1 は更に $[\]$ に
おいて 2-positive でなくて Schwartz の不等式をみたす例を示
してゐるが、これは又次定理 (ii) 上の parameter の一値としてあ
らわれるばかりではなく、定理 1 では λ が $(1 + \frac{1}{n(k+1)-1}, 1 + \frac{1}{nk})$
の範囲とみ対応するとは $(k+1)$ -positive ではなくとも k 次の
Schwartz の不等式をみたす例に与つてゐる。尚 $(k+1)$ -positive
な unital map は常に k 次の Schwartz の不等式をみたして
ゐる。 T_0 の側とは反対に σ の側はいわば完全な“絶壁”かゝるつ
てゐる。そこで parameter を少しでも下げれば、 T はやはり
positive map にもなるものわけである。

以下の 2 定理は上の作る観点から吟味されるべきものであ
る。

定理 2. $T = \lambda T_0 + (1-\lambda)\sigma$ ($-\infty < \lambda < \infty$) とする。この
とき $1 \leq k \leq n$ について次のことが成り立つ。

- (i) T が k -positive になるのは $k=1$ か $2 \leq k \leq n$ のときに従って λ が $0 \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{n-1}$ か $1 - \frac{1}{n+1} \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{n-1}$ のとき
- (ii) T が k 次の Schwarz 不等式をみたすのは $k=1$ か $2 \leq k \leq n$ のときに従って λ が $1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}}} \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{n-1}$ か又は $1 - \frac{1}{n+1} \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{n-1}$ のとき.

さるるこのときは線分は plain positive と n -positive の2つの階層からしかるりなつてゐる次元の高いときは T_0, θ の向は絶壁に近いともいえる。前に述べた[]の例は上定理で $n=2, \lambda = \frac{1}{2}$ の場合として表れている。

定理3. $T = \lambda \sigma + (1-\lambda)\theta$ ($-\infty < \lambda < \infty$) とする。このとき次のことが成り立つ

- (i) T が positive になるのは $0 \leq \lambda \leq 1$ のとき、また k -positive ($2 \leq k \leq n$) になるのは $\lambda = 1$ のときのみ。
- (ii) T が k 次の Schwarz の不等式をみたすのは $\lambda = 1$ のときのみである。

さて k -positive map と l -positive map を経ればその間の map は最小 $\min(k, l)$ の positivity はもつが線分の場合によつては中間の map の positivity が k, l よりも大となる

ることがある。つまり τ と π 両者は positive map の山の反対側の斜面に位置しているわけである。このように例はたとえば Choi の map (すなわち正則化) と θ を結ぶ線分上に表れ、この π 線分のある区間は n -positive map になる ([] 参照)。

§3. 定理の証明とあとがき。上の結果の positivity の判定には次のことを用いる。つまり $\{f_{ij}\}_k \in M_n$ の任意の matrix unit の k 次の部分とすると M_n 上の linear map τ が k -positive になるのは block matrix $[\tau(f_{ij})]_k^k$ が常に positive になることである。この判定法が上の三つの写像に特に有効なのは block matrix $[f_{ij}]_k$ は次の性質をもつからである。

$[f_{ij}]_k$ は $M_k(M_n)$ の (1 次元の) projection p をとり

(*) $[f_{ij}]_k = k p$ とかける。また $[\theta(f_{ij})]_k$ は selfadjoint な partial isometry であるから、 $k \geq 2$ のときは 2 つの直交する projection q_1, q_2 の差としてかける。

他の場合も同様なので定理 1 の証明のみ示してみると、上の判定法によつて $[\tau(f_{ij})]_k$ を示せばよいから

$$\begin{aligned} [\tau(f_{ij})]_k &= \frac{\lambda}{n} 1 + (1-\lambda) k p \\ &= \left\{ \frac{\lambda}{n} + (1-\lambda) k \right\} p + \frac{\lambda}{n} (1-p). \end{aligned}$$

よつて k が positive になるのは

$$\frac{\lambda}{n} + (1-\lambda) k \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\lambda}{n} \geq 0$$

これから (i) が出てくる. (ii) は度々 (ii) には $1 \leq k \leq n-1$ のとき
 の4問題であるから、そのときを考えると矢張り $(a_1, a_2, \dots, a_n)$
 に対して $\tau_r(a_i) = 0$ ($i=1, 2, \dots, k$) としておけることがわかる.

このとき

$$\begin{aligned} & [\tau(a_i^* a_j)]_k - [\tau(a_i)^* \tau(a_j)]_k \\ &= \lambda \{ [\tau_0(a_i^* a_j)]_k - [\tau_0(a_i)^* \tau_0(a_j)]_k \} \\ &+ (1-\lambda) \{ [\sigma(a_i^* a_j)]_k - [\sigma(a_i)^* \sigma(a_j)]_k \} \\ &+ \lambda(1-\lambda) [(\tau_0 - \sigma)(a_i)^* (\tau_0 - \sigma)(a_j)]_k \\ &= [(\lambda \tau_0 + \lambda(1-\lambda) \sigma)(a_i^* a_j)]_k \end{aligned}$$

であるから (i) のときのようにして計算すれば

$$\frac{\lambda}{n} \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\lambda}{n} + \lambda(1-\lambda)k \geq 0 \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 + \frac{1}{nk}$$

のとき $\text{map } \lambda \tau_0 + \lambda(1-\lambda) \sigma$ は k -positive であるから上の
 行列は非負である. したがって Schwartz の不等式が成り立つ.

逆に不等式が成り立つときは $a_i = f_{ni}$ とすると

$$[\tau(a_i^* a_j)]_k - [\tau(a_i)^* \tau(a_j)]_k = [(\lambda \tau_0 + \lambda(1-\lambda) \sigma)(f_{ij})]_k$$

となり、 $\lambda \tau_0 + \lambda(1-\lambda) \sigma$ の k -positivity から λ の範囲が出
 てくる. 証明了。

上の議論は M_n の positive map の集合の "山容" をかき見せて
 てくれるが、上記判定法は一般の map には適用し難く前述の如
 に全体像の解明にはほど遠い. しかし $n \geq 3$ の場合には組織

的を説明へのオーストリアとも言うと思ふ。2x2の行列環に於いては Woronowicz [] により次のように positive map の構造が示されてゐる。つまり、 k -positive map に対して map

$$\tau(k)_0 : [a_{ij}] \in M_k(M_n) \longrightarrow [\tau(a_{ji})] \in M_k(M_n)$$

が positive のとき τ を k -copositive map と呼びこゝにすると、この positivity に於いて平行な議論が出来 M_n において完全 copositive と n -copositive が一致する。更に n -copositive map の構造も決定出来る。

" M_2 において任意の positive map は completely positive map (= 2-positive map) と completely copositive map (= 2-copositive map) の和にかけらる。"

$n \geq 3$ のときはこの結果は成り立たないことが知られてゐるが、その反例(例)とは [] 参照、1つ々例々々の理論的背景はわからず従つて重構造が三層以上に及ぶと何故このやうな現象が起るのか判然としなないでゐる。

尚上の我々の結果と同様に τ を co-positivity の立場から考へてみると、例とは τ_0 と σ との関係で n -positive に及ぶ τ の map はすべて入るこの範囲で completely copositive に及ぶてあり他の場合も含めて、分解の問題に於いては新しい材料を与えてはくれない。しかし completely copositive map の代表的な例である transpose map は plain positive であるが上

の解析を通じてわかることは M_n の positive map は completely positive かつ completely copositive であるという非等式に「強い」ケースもあることである。したがって2つの positivity はある意味では対照的であるといわなければならない。

文 献

1. M. D. Choi, Positive linear maps on C^* -algebras, Canad. J. Math., 24 (1972), 520-529
2. ———, Some assorted inequalities for positive linear maps on C^* -algebras, J. Operator theory 4 (1980), 271-285
3. E. Størmer, Decomposable positive maps on C^* -algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 86 (1982), 402-404
4. T. Takasaki & J. Tomiyama, On the geometry of positive maps in matrix algebras, Math. Zeit., 184 (1983), 101-108
5. J. Tomiyama, On the transpose map of matrix algebras Proc. Amer. Math. Soc., 88 (1983), 635-638
6. ———, On the geometry of positive maps in matrix algebras II, to appear in Linear Algebra Appl.

7. S. L. Woronowicz, Positive maps of low dimensional matrix algebras, Rep. Math. Phys., 10 (1976), 165-183.
8. D. E. Evans, Positive linear maps on operator algebras. Comm. Math. Phys., 48 (1976), 15-22