

オイラーの数論とガウスの数論

九州大学大学院数理学研究院 高瀬正仁(Masahito Takase)

Graduate School of Mathematics

Kyushu University

1. はじめに

オイラーとガウスはヨーロッパ近代の数学の根柢を形成した二大数学者であり、この二人の数学者の数学研究の姿を回想することは、近代数学史の本質を理解するうえで不可欠の基礎作業である。オイラーの全集は現在76巻まで刊行されているが、第四シリーズの書簡集と未発表原稿の諸巻が出揃っていないため、なお未完結である。最終的にはどのようなものか、不明瞭な部分もあるが、おおよそ全89巻、91冊ほどになる見通しである。第一シリーズの数学著作集は全29巻、30冊で、これは完結した。巻1は著作『代数学完全入門』にあてられている。巻2から巻5までの四巻は「アリトメチカ論文集」である。オイラーの数論のすべてはこの四巻に収録されている。一昨年の秋、津田塾大学数学・計算機科学研究所で行われた数学史シンポジウムにおいて、オイラーの数論をテーマにして講演を試みたことがあるが、次に挙げるのはそのときの講演の記録である。

「オイラーの数論」, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報28, 2007.

また, Roger Baker篇 "Euler Reconsidered" (Kendrick Press)所収の論説

"Euler's Theory of Numbers"

も同主旨のエッセイである。

オイラーの数論はフェルマが書き残した数論の命題を証明しようとする試みから生れたが、その延長線上にオイラーに独自の数論的思索もまた発生した。ラグランジュはオイラーを継承し、ルジャンドルはオイラーとラグランジュの数論を集大成して『数の理論のエッセイ』(1798)という著作を執筆した。ここまでの近代の数論史の第一期である。

ガウスの全集は全12巻、14冊で編成されている。巻1の全体は一冊の著作『アリトメチカ

研究』(1801, 邦訳書名は「ガウス整数論」, 1995, 朝倉書店)にあてられている。巻2は数論の論文集だが, ここで展開されている数論は全体として巻1所収の著作『アリトメチカ研究』の補遺もしくは継続であり, 巻1と巻2を合わせて, ひとつの有機的な数論の世界が構成されている。ガウスの数論はこの二巻でほぼ尽くされている。

ガウスの数論については, 以前, 『ガウスの遺産と継承者たち』(1990, 海鳴社)において多少立ち入って論じたことがある。

ガウスの著作『アリトメチカ研究』には多くの参考文献が指示されているが, ガウスはガウス以前の諸研究を文字通り参考にするための目的で引用しただけにすぎず, ガウス自身の思索にとって不可欠というわけではない。『アリトメチカ研究』の緒言でガウス自身が明言しているように, ガウスはすべてを独力で発見し, しかも独自に証明したのである。他方, それはそれとしてガウスが実際に引用している諸論文を見ると, 大半はオイラーの作品である。ガウスがオイラーの著作や論文に幅広く目を通していているのは間違いなく, オイラーはガウスに深刻な数学的影響を及ぼすことのできたおそらく唯一の数学者なのである。

オイラーの深い影響はラグランジュにも及んでいるが, ラグランジュはオイラーの思索を忠実に継承し, オイラーが敷いた路線に沿って大きく歩を伸ばしたのであり, オイラーの影響の姿形は明瞭である。これに対し, ガウスに対するオイラーの影響はわかりにくく, 両者の数論の特質もまた似てはいるが本質的なところで異なっている。本稿ではこのあたりの消息を考察し, 所見を述べたいと思う。

2. フェルマの遺産とオイラーの数論

(2-1) フェルマの遺産

近代の数論がフェルマに始まることはよく知られている。フェルマは17世紀の前半を生きた数学者だが, 数論に向かう契機になったのは, バシェが翻訳したディオファントスの著作『アリトメチカ』との出会いであった。この「バシェのディオファントス」の実際の姿形はギリシア語のオリジナルにラテン語訳を添えた対訳書であり, 刊行年は1621年である。フェルマはこれ入手し, 余白にメモを書き遺したが, その時期はおおよそ1630年代の後半の一時と推定されている。近代数論はこのフェルマの「欄外ノート」に始まると見てよいと思う。ただし, このノートが広く人々の目に触れたのは1670年になってからのことで, すでに

フェルマの没後である。この年、フェルマの子どものサミュエルが「バシエのディオファントス」を再刊し、その際、父フェルマの「欄外ノート」も合わせて収録したのである。以下、この復刻版を「サミュエルのディオファントス」と呼びたいと思う。

数論に寄せるフェルマの関心は晩年にいたるまで継続し、幾人かの友人に宛てた書簡の中で多種多様な数論の命題を書き送った。どれもみなフェルマが発見したのである。めぼしいものを拾うと、1640年8月にはフレニクル宛書簡において「フェルマ数はすべて素数である」という言明を表明した(後にオイラーが反例を与え、これを否定した)。この言明はフェルマの書簡のあちこちに見られるが、1640年8月の手紙の記事はもっとも古い記録である。また、この年の10月18日の同じくフレニクル宛書簡では「フェルマの小定理」が表明された。翌1641年6月15日のフレニクル宛書簡を見ると、「直角三角形の基本定理」が現れている。これは、「 $4n+1$ 型の素数はどれも二つの平方数の和の形に書き表わされる」ということを主張する命題で、「直角三角形の基本定理」という呼称もまたフェルマ自身によるものである。1658年は歿年の7年前になるが、この年の6月のディグビー宛書簡には、素数の形状に関する5個の命題が書き留められた。

(2-2) オイラーによる証明の試み

フェルマは発見するばかりに留まらず証明も試みたようで、無限降下法と呼ばれる証明法を持っていることを示唆する記述もあるが、完結した証明は皆無である。この大きな欠如を埋めようとしたのがオイラーであり、オイラーの数論はその試みの総体の中から生い立ったのである。

数論におけるフェルマの遺産は、「ペルの方程式」に象徴される二次不定方程式の解法理論、フェルマの小定理、「直角三角形の基本定理」に象徴される素数の形状理論など、多岐にわたっているが、オイラーはこれらをほぼ全域にわたって取り上げて、証明を与える努力を重ねた。オイラーの一番はじめの数論の論文は、1738年の論文

[E26]「フェルマの定理とそのほかの注目すべき諸定理に関する所見」(ペテルブルク帝国科学アカデミー紀要6, 1732/3. 1738年刊行)

である。ここでは、「フェルマ数はすべて素数である」というフェルマの言明が反例を与えられて否定されたのをはじめ、フェルマの小定理が証明され、その一般化さえ提示された。フェルマの小定理は1640年10月18日のフレニクル宛書簡において表明されたのが初出であるから、ほぼ100年後に生起した進展であった。

1760年の論文

[E241]「 $4n+1$ という形のあらゆる素数はふたつの平方数の和になるというフェルマの定理の証明」(ペテルブルク帝国科学アカデミー新紀要5, 1754/5. 1760年刊行)

では、フェルマが発見した「直角三角形の基本定理」が証明され、素数の形状理論の出発点が確保された。この理論はラグランジュ、ルジャンドルに継承され、ガウス以前の数論を象徴する大掛かりな理論に成長した。ルジャンドルがラグランジュから引き継いだ時点ではなお未完成だったが、ルジャンドルはこれを完成の域に高めようと企図し、フェルマの小定理に手掛かりを求めて平方剰余相互法則を定式化したのである。

オイラーの数論は総じてこのように展開したが、フェルマの遺産の及びうる領域を越えて、独自の世界に分け入っていくこともあった。平方剰余相互法則を例に挙げると、ルジャンドルは独自のアイデアに基づいて平方剰余相互法則を発見したが、オイラーもまたルジャンドルとは異なる思想圏において同じ法則に到達した。オイラーによる把握の様式を観察すると、視点の定め方において、ルジャンドルよりもガウスにそっくりである。オイラーにはこのような独自の面が確かにあり、しかも相当に大きな部分を占めているが、オイラーの数論の姿が基本的にフェルマの遺産に規定されているのは間違いない。そうしてそのフェルマはといえば、ディオファントスの著作に手掛かりを求めて出発したのであった。

(2-3) 近代の第一期の数論史

ディオファントスの著作は紀元3世紀ころ成立したと推定されるが、フェルマが「バシェのディオファントス」を読んで欄外にノートを書いたのは1630年代と考えられるから、この間、おおよそ1400年ほどの歳月が流れている。それからおおよそ100年の後にオイラーが登場し、フェルマの遺産に着目するという出来事が生じた。フェルマがディオファントスに触発されて近代数論の所在を指し示し、オイラーが扉を開いたのであり、フェルマの遺産が歴史を創造しうるためには、オイラーというもうひとりの継承者が必要だったのである。オイラーに続いてラグランジュという継承者が登場し、次いでフェルマ、オイラー、ラグランジュの数論の集大成を目指すルジャンドルが現れた。この四人の数学者が手を携えて形成したのが、近代数学史の一角を占める第一期の数論史である。おおよそ170年ほどの期間にわたって繰り広げられた小さな歴史のドラマである。

これに対し、ガウスの数論はまったく様相を異にしている。ガウスには先行者が存在せず、ガウスの数論は真にガウスひとりの数学的感受性の泉から流れ始めたのである。以下、この

論点を詳述し、オイラーとの相違を指摘したいと思う。

3. ガウスの数論と相互法則

(3-1) 『アリトメチカ研究』に見る初等整数論

ガウスの数論の形成過程を考えると、真っ先に念頭に浮かぶ特色は、ガウスには数論研究の先行者がいなかったという端的な事実である。他方、ガウスに及ぼされたオイラーの影響が比類なく大きいこともまた否定することはできない。オイラーと、オイラーを継承したラグランジュの数論がなかったなら、ガウスの数論もまた成立の契機をみいだしえなかったことであろう。これらは一見すると背反する事象だが、ガウスはオイラーの数論に深く通じ、影響を受け、しかも圧倒されて祖述に甘んじるようなことはなく、まったく独自の数論の方向にひとりで歩いていったのである。

ガウスの著作『アリトメチカ研究』は七つの章で構成されている。第一章から第三章までは今日のいわゆる初等整数論に相当する諸事実の記述が続き、第四章にいたって平方剰余相互法則が提示され、数学的帰納法による証明が与えられて一段落する。第一章の書き出しの部分で合同式のアイデアが表明され、合同を表す記号「 $\equiv$ 」も導入された。この記号はオイラーにはなかったが、ある数 p を固定して、他の数 a を次々と p で割っていくときの剰余を観察しようとするアイデアはオイラーもすでにもっていた。ガウスは有理整数の素因子分解の一意性を数学史上はじめて正確に証明したが、この事実そのものはオイラーもすでに認識していた。原始根の存在証明、ウィルソンの定理、フェルマの小定理の提示とその証明等々、『アリトメチカ研究』の前半部にはめざましい事象が次々と立ち現れるが、オイラーはこれらの事実をみな知っていて、証明を試みている(成功したものもあれば、失敗したものもある。原始根の概念はもっていたが、存在証明には不備があった)。これに対し、『アリトメチカ研究』の緒言の記述によれば、ガウスはオイラーが承知していたことは知らずに思索を続け、すべてを独自に発見し、単独で証明したということである。

(3-2) 平方剰余相互法則

『アリトメチカ研究』の緒言に書き留められた記述を見ると、ガウスの関心が数論に向かい始めたのは1795年のはじめのころと回想されている。ガウスが生れたのは1777年の4月

であるから、1775年の年初といえ、満年齢数えて、まだ17歳にすぎなかった。第四章までの内容を構成するあれこれの事柄の中には、オイラーやラグランジュの手ですでに確立されたものが多いが、そのような状況をガウス知ったのは後日のことであり、実際にはすべて単独で仕上げたという。該当箇所にオイラーやラグランジュの諸論文を参照するようにと指示されているが、ガウスの言葉の通りであれば、既知の諸事実を再発見したことに気づいたのは『アリトメチカ研究』の執筆中ということになるのであろうか。それでも、有理整数の素因子分解の一意性の観念や原始根の概念の把握のなどは、単独で到達するのはいかにもむずかしいように思う。このようなところはガウスもやはりオイラーに学んだのであり、ガウスの独自性は証明に踏み込んだところにあると考えるのが妥当なのではないかと思う。

『アリトメチカ研究』のはじめの四つの章の白眉は平方剰余相互法則である。この法則それ自体はガウスが第一発見者というわけではなく、クロネッカーの精密な考証によれば、時系列に沿う限り一番はじめにこの法則を発見したのはオイラーであり、ルジャンドルもまた少し後にまったく別の経路を通して同じ法則を把握した。だが、ルジャンドルもガウスもオイラーの発見を認識していなかったし、ガウスはルジャンドルの発見もまた知らなかった。三人とも別個に発見したのである。『アリトメチカ研究』の緒言によれば、1795年のはじめ、まだ17歳のガウスはまずはじめに平方剰余相互法則の第一補充法則を発見し、次いでこの法則の本体と第二補充法則を発見し、証明にも成功した。

これだけであればオイラー、ルジャンドルの数論と大きく離れているとは言えないが、ガウスの真の天才は、平方剰余相互法則の発見とともに高次の冪剰余相互法則が存在することをもまた予見したという一事に、このうえもなく鮮明に現れている。四次剰余の概念はすでに『アリトメチカ研究』に提示され、第四章、第115条には、「 $8n+1$ という形の素な法に関して、 -1 はある四乗数と合同になりうる」という命題さえ証明されている。これを合同式の言葉で書くと、 p は $8n+1$ 型の素数とすると、四次の合同式

$$x^4 \equiv -1 \pmod{p}$$

は必ず整数解をもつこと、すなわち -1 は p の四次剰余であることが主張されていることになる。

「相互法則」の一語こそ、ガウスの数論の本質をもっともよく象徴する魔法の言葉である。

(3-3) 平方剰余相互法則の一系の別証明

数学的帰納法を駆使して平方剰余相互法則を正しく証明したガウスは、さまざまな別証明

を探究し、全部で8通りの証明を発見した(そのうち二つは本質的に異なるとは言えないので、7通りと数えることもある)。『アリトメチカ研究』の第五章は長大な二次形式論だが、ねらいは平方剰余相互法則の証明にあり、「種の理論」と言われる理論により第二の証明が与えられる。第七章の円の等分理論は、代数的に見れば円周等分方程式の代数的解法の理論であり、幾何学的に見れば正多角形の作図問題である。いずれにしても数論とは無縁のように見えるが、ここから発生する「ガウスの和の符合決定問題」に決着がつけば、そこからまたしても平方剰余相互法則の証明が取り出されるのである。ガウスは『アリトメチカ研究』が出版された時点ではガウスの和の大きさ、すなわち絶対値の算出には成功したが、符合決定にはいたらなかった。究明はその後も続き、1811年の論文

「ある種の特異な級数の和」(ゲッチンゲン王立協会新報告集1)

において公表された。ガウスが34歳のときのことで、『アリトメチカ研究』の刊行後、実に10年の歳月を要したのである。

(3-4) 四次剰余の理論

ガウスが生涯を通じて構築した数論の世界の全容を顧みて、もっとも神秘的な印象を受けるのは四次剰余の理論である。ガウスは1795年のはじめ、平方剰余相互法則を発見したころからすでに高次冪剰余相互法則の存在を確信したと見られるが、まとまった果実を摘んで公表に至ったのは、「四次剰余の理論」という標題をもつただ二篇の論文であった。一遍は1828年に公表された第一論文

「四次剰余の理論 第一論文」

であり、このときガウスは51歳。もう一遍は1832年の論文

「四次剰余の理論 第二論文」

であり、55歳のときの作品である。

これらの二論文のテーマは四次剰余相互法則である。第一論文では有理整数の圏内において二つの補立法則がみいだされて提示され、証明が与えられた。ガウスは多くの計算例を踏まえ、帰納的な考察を経て法則に到達したが、この第一論文には思索の足跡が諸例とともにそのまま書き留められている。第二補立法則については、二通りのスタイルで命題が表明された。

第二論文では四次剰余相互法則の本体の発見がめざされた。書き出しの数節には考察の痕

跡が生々しく残されているが、ガウスは第一論文でそうしたように、計算例を積み重ねることにより、有理整数の圏内で四次剰余相互法則を見つけようとした。実際に四次剰余相互法則のように見える諸命題がいくつか記されたが、それらはそのままにしたうえで、ガウスは中途半端な状態で突如方針を転換し、新たに数域の拡大へと歩を進めた。

(3-5) 数域の拡大

数域の拡大というアイデアは真にガウスに固有であり、ガウスの数論の正否を握る究極の鍵である。四次剰余相互法則の全容を認識するには有理整数域に留まっているのではならず、数域を拡大してガウス整数域へと移らなければならない。ガウス整数というのは、 a, b は有理整数として、 $a + b\sqrt{-1}$ という形の複素数のことであり、ここに現れる虚数 $\sqrt{-1}$ は、数 1 の原始4乗根である。

次に挙げるのは数域の拡大の必要性を語るガウスの言葉である。「高等的アリトメチカの領域をいわば無限に拡大することが必然的に要請される」とはっきりと述べられている。

《平方剰余の理論は、とびきりみごとな高等的アリトメチカの宝物に数え入れるべき少数の基本定理に帰着されるが、それらの定理は、周知のように、まずはじめに帰納的な道筋を通ってたやくす発見され、それからいろいろな方法で証明されて、これ以上望まれることは何も残されていない。

だが、三次剰余と四次剰余の理論はいっそう困難である。われわれが1805年に究明を開始したとき、さながら入り口のあたりに置いてあるかのようなあれこれの事柄のほかに、二、三の特別な定理もたしかにもたらされた。それらの定理は簡明さと証明の困難さのためにあまりにも際立っている。だが、われわれはすぐに、これまでに用いられていたアリトメチカの原理は一般理論の基礎づけのためには十分とは言えないこと、および高等的アリトメチカの領域をいわば無限に拡大することが必然的に要請されるということを認識するにいたった。これをどのような意味合いにおいて諒解すべきなのかということは、この研究のこれからの流れの中で明らかになるであろう。ひとたびこの新たな領域に足を踏み入れたなら、帰納的な道筋を通して、全理論を汲み尽くしてしまうきわめて単純な諸定理の認識への通路が即座に開かれていく。だが、それらの定理の証明は非常に深い場所に隠されていて、数々の無益に終わった試みの後に、最後にようやく明るみに出すことができたのである。》(「四次剰余の理論 第一論文」の第1節より)

三次剰余の理論にも触れられているが、ガウスは1の三乗根 $\epsilon = \frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}$ を有理整数域に添加して生成される数域において三次剰余相互法則を発見した。ただし、論文の形で公表されることはなく、痕跡が遺稿中に散見するのみであった。

数論の真理の中に、数域を拡大してはじめて真相が明るみに出されるものがあるという認識はオイラーにも見られなかったものであり、数学における虚数の実在感を確定する力があつた。また、ガウス以降一世紀余の数論の展開を顧みれば、このアイデアとともに代数的整数論の端緒が開かれたと言えるのである。

4. 数論の二つの世界

(4-1) 四次剰余相互法則と証明の試み

第二論文では第二補充法則が三たび取り上げられ、ガウス整数域において定式化され、証明も与えられた。これで第二補充法則は三種類になった。四次剰余相互法則の本体もまたガウス整数域において発見され、四次剰余相互法則の名に値する法則をみいだそうとするガウスの数学的意図は、ここにようやく日の目を見たのである。証明は欠如していたが、実際には手にしていたようで、アイゼンシュタインからリーマンを経てシェリングに伝えられた証言が記録されている。アイゼンシュタインに宛てたガウスの書簡の中に証明が記されていたというのである。ガウスの没後、証明の道筋を書き留めた遺稿が見つかり、この推定が確認された。

ガウスが四次剰余の観念を把握した日は早く、その片鱗は『アリトメチカ研究』にもすでに現れていることは既述の通りである。いっそう一般的に、『アリトメチカ研究』では高次合同式

$$x^n \equiv A \pmod{p} \quad (A \text{ は与えられた有理整数, } p \text{ は有理素数})$$

の考察も行われた。フェルマの小定理や原始根も広く高次合同式の世界の中で取り扱われたのである。「四次剰余の理論 第二論文」に附された脚註を見ると、四次剰余の理論ではガウス整数、三次剰余の理論では1の三乗根が要請されることを述べた後に、

《高次冪剰余の理論では他の虚量の導入が必要になる》

と明記されている。このときガウスの念頭にあつたのは、高次合同式の世界における高次冪

剰余相互法則と見て間違いないと思う。では、ガウスはどうしてそのような法則の存在に確信をもつことができたのであろうか。

(4-2) オイラーの数論とガウスの数論

若い日のガウスの脳裡に映じた四次剰余相互法則の姿は明確な形をもっていたわけではなく、実際に起った事象はといえば、ただ単に相互法則の名に値する何ものかが存在するという確信を抱いただけのことにすぎない。オイラーの眼前には100年前にフェルマが表明した一群の命題が浮遊していたが、ガウスには確信を支える具体的な兆候は何もなく、手中にあったのは強固な実在感のみであった。

オイラーにとって、証明すべき命題の姿形は明確であり、要請されたのは正否を明らかにすることである。ところがガウスはありやなしやというほどのものを追い求めるのである。もともと存在しないのかもしれないし、もしそうなら、たとえ30年の探索を積み重ねても結果はむなしいであろう。造型された問題群に立ち向かうオイラーと、みずから問題群を造型して、行く末の見えない探索に赴こうとするガウス。ここにおいて、オイラーとガウスのそれぞれの数論研究の性格は本質的に分かれたのである。

ガウスによる四次剰余相互法則の探索は「数域の拡大」という奇抜なアイデアを伴いつつ成功したが、証明は公表されなかった。そこで、四次剰余相互法則の証明と、ガウスがわずかな言葉で示唆した高次冪剰余相互法則の発見をめざすことが、ガウス以降の世代に課されたガウスの遺産になった。ガウスの遺産の継承は20世紀のはじめまで続き、類体論が生れて大団円を迎えたが、当初は理論形成の可能性を予感させるものは、ガウス自身の確信のほかには皆無なのであった。

あるともないともわからないものの存在を確信し、生涯をかけていくということが、ガウスはどうしてできたのであろうか。ガウスの数論研究の姿を回想するとき、もっとも不思議で、神秘的な感慨に襲われるのはこのようなところである。ガウスの数論は数学の誕生の根源にあるものの所在を明示しているのである。

[凡例]

オイラーの論文のタイトルの冒頭に添えた記号[E...]は、エネストレームナンバーである。

(平成20年11月30日)