

Measure algebra における Taylor の問題について

東教大 理 泉池敬司

§1. 序. Taylor は measure algebra の maximal ideal space を表現するのに structure semigroup なるものを考えた。そして彼の一連の仕事により topology に関係している所の measure algebra の性質はかなり明確に取らえらる様になった。つまり structure semigroup の maximal group にのっている measure が G 上の L.C.A. group topology と 1 対 1 に対応しているのであるが、それに関係して 1 つの問題がでてくる。その Taylor の問題を肯定的に解くのがこの目的である。

§2. 記号及び定義. ここでは次の記号を用いる。

G : non-discrete locally compact abelian group.

$\hat{G}$: G の dual group

$E \subset \hat{G}$ に對して

$E^\perp$: E の G での annihilator, つまり $E^\perp = \{x \in G : (x, x) = 1 \text{ on } E\}$

すると $E^\perp$ は G の closed subgroup である。

$M(G)$: G 上の bounded regular Borel measure 全体よりなる Banach algebra, 積は convolution, norm は total variation norm.

$L^1(G)$: G 上の group algebra.

$\text{Rad } L^1(G)$: $L^1(G)$ の radical, つまり $L^1(G)$ を含む $M(G)$ の maximal ideal の共通部分。

$H \subset G$ compact subgroup に対して

m_H : H 上の normalized Haar measure, $\|m_H\|=1$, $m_H \in M(G)$.

G_H : H を open compact subgroup にする topology の備わった group G . $\{U_\alpha\}$ を G における 0 の open base とするとき $\{U_\alpha \cap H\}$ は 0 の open base とする G 上の L.C.A. group topology.

(注) $M(G_H) \subset M(G)$.

$\mu, \nu \in M(G)$ に対して,

$\mu \ll \nu$: μ は ν に 絶対連続.

$\mu \perp \nu$: μ と ν は 互いに singular.

$\mu^* \in M(G)$: $\mu^*(E) = \overline{\mu(-E)}$ for Borel subset E of G .

$\hat{\mu}$: μ の Fourier-Stieltjes 変換 $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma) d\mu(x)$, $\gamma \in \hat{G}$.

$\tilde{\mu}$: μ の Gelfand 変換

$N \subset M(G)$ closed ideal (subalgebra) に対して

N が L -ideal (L -subalgebra)

$\Leftrightarrow \lambda \in N, \forall \lambda \ll \nu$ for some $\nu \in N$.

$E \subset G$ が independent

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, \dots, x_k \in E$ に対して, $\exists \lambda$ $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_k x_k = 0$

ならば $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$.

§ 3. Structure semigroup と Taylor の問題.

Taylor は [3] で 次の定理を示した。

定理 1. (Taylor [3]). $M(G)$ に対し 次のみたす compact topological semigroup S と homomorphism $\theta: M(G) \rightarrow M(S)$ が存在する。

(1) θ : order-preserving isometric into isomorphism

$(\mu \ll \nu \text{ in } M(G) \Rightarrow \theta\mu \ll \theta\nu \text{ in } M(S))$

(2) $\theta(M(G))$ は $M(S)$ の weak* dense L -subalgebra.

(3) $M(G)$ の maximal ideal space は S 上の continuous semicharacter ($f(xy) = f(x)f(y), x, y \in S$) の集合 $\hat{S}$ と

1 対 1 の対応がある, $\hat{S}$ の対応は

$$M(G) \ni \mu \rightarrow \tilde{\mu}(f) = \int_S f d\theta\mu.$$

この定理によつて $M(G)$ の構造を考えるのには $M(S)$ の subalgebra として取らなければならないわけであるが, いまだに

$M(G)$ と $\mathcal{S}$ の関係は、至りわけ、正しいとはいえない。わかつたところという次の定理がある。

定理 2 (Taylor [4]) $\mathcal{S}$ の maximal group K_p に對して,
もし, $M(K_p) = \{\mu \in M(G) : \mu \text{ は } K_p \text{ に台をもつ}\} \neq \{0\}$ ならば
 G のもとの topology より強い G 上の L.C.A. group topology τ
が存在して $M(K_p) = \text{Rad } L'(G_\tau)$ である。又逆も成立する。

そこで $K \equiv \bigcup_{p \in P} K_p$ (すべての maximal group の union) とする。
あると $K = \{x \in G; |f(x)| = 0 \text{ or } 1, \forall f \in \mathcal{S}\}$ となる。

定義. $M(K) \equiv \{\mu \in M(G) : \mu \text{ は } K \text{ に concentrate している}\}$

$$M_1(G) \equiv \{\mu \in M(K) : |\mu|(K_p) = 0 \quad \forall p \in P\}$$

$$\mathcal{L}(G) \equiv \sum_{\tau} \text{Rad } L'(G_\tau).$$

すると定理 2 より $\mathcal{L}(G) \subset M(K)$, $M_1(G) \subset M(K)$
 $\mathcal{L}(G) \perp M_1(G)$ を得る。そこで次が Taylor の問題である。

Taylor の問題 1 ([4]).

$M_1(G) \neq \{0\}$ なる L.C.A. group G は存在するのか?

もう 1 つ別の所から $M(K)$ に関係する所がわかつたところがある。
 $\mathcal{M} \equiv \{\mu \in M(G) : \hat{\mu}^*(f) = \overline{\hat{\mu}(f)}, \forall f \in \mathcal{S}\}$
symmetric measure 全体とする。

定理 3 (Taylor [3]) $\mathcal{L}(G) \subset \mathcal{M} \subset M(K)$.

Taylor の問題 2 ([3]) $\mathcal{M} = M(K)$?

以下に二種はある種の L.C.A. group G に対して次の性質をもつ $\mu \in M(G)$ の存在を示す。1) $\mu \neq 0$ 2) $\mu \in M_1(G)$ 3) $\mu \in \mathcal{M}$
これは Taylor の問題 1 に対する肯定的な解答であるが、Taylor の問題 2 はまだわからない。

④ 後で使う記号と性質.

$f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して

$S_0(f) \equiv \{x \in S : f(x) = 0\}$, $S_1(f) \equiv \{x \in S : f(x) = 1\}$

$M(S_j(f)) \equiv \{\mu \in M(G) : \mu \text{ は } S_j(f) \text{ に台をもつ}\} \quad (j = 0, 1)$

Proposition 1 ([3]) $M(S_0(f))$ は L-ideal, $M(S_1(f))$ は

L-subalgebra である。

Proposition 2 ([3]) $f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して

$M(S_1(g_f)) = M(S_1(f))$ なる $g_f \in \hat{S}$, $g_f^2 = g_f$ が存在する。

Proposition 3 ([3]) $f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して

$M(S_0(h_f)) = M(S_0(f))$ なる $h_f \in \hat{S}$, $h_f^2 = h_f$ が存在する。

§ 4. 定理とその証明.

R を実数とする。すると $\bar{R} = R$ である。 $\bar{R}$ を R の Bohr compactification とする。つまり $\bar{R} = \hat{R}_d$.

定理. 次をみたす non-zero $\mu \in M(\bar{R})$ が存在する。

- (1) $\mu \geq 0$ (2) $\mu \in M_1(\bar{R})$ (3) $\mu \in \mathcal{M}$ (4) $\mu * \mu \in \mathcal{L}(\bar{R})$
 (5) μ の spectrum は countable set.

定理を満たす $\mu \in M(\bar{R})$ の作り方

$$\mathcal{L}_n \equiv \{(d_0, d_1, \dots, d_n); d_0 = 0, d_i = 0 \text{ or } 1 \ (i=1, 2, \dots, n)\}$$

$$\mathcal{L} \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n \text{ とおく。}$$

$$d \in \mathcal{L} \text{ に } \exists! n \text{ して } |d| \equiv n \text{ if } d \in \mathcal{L}_n.$$

$$d = (d_0, d_1, \dots, d_n), \beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathcal{L} \text{ に } \exists! n \text{ して}$$

$$d \wedge \beta \equiv (d_0, d_1, \dots, d_k) \text{ if } d_0 = \beta_0, d_1 = \beta_1, \dots, d_k = \beta_k, d_{k+1} \neq \beta_{k+1}.$$

補題 1. 次をみたす R の subset の family $\{E_d\}_{d \in \mathcal{L}}$ が存在する。

$$(1) E_d \subseteq E_{d,0}, E_d \subseteq E_{d,1} \text{ for } d \in \mathcal{L}$$

$$(2) E_d \cap E_\beta = E_{d \wedge \beta} \text{ for } d, \beta \in \mathcal{L}$$

$$(3) \bigcup_{d \in \mathcal{L}} E_d \text{ is independent set.}$$

(証) R は infinite independent set を含むから。

E_α より生成される subgroup を H_α で表わし, その $\bar{R}$ での annihilator を G_α で表わす。すると $E_\alpha^\perp = H_\alpha^\perp = G_\alpha$ 。

補題 2. $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ は $\bar{R}$ の compact subgroup の family としてみたす。

$$(1) \quad G_\alpha \not\supseteq G_{\alpha,0}, \quad G_\alpha \not\supseteq G_{\alpha,1} \quad \text{for } \alpha \in \Lambda.$$

$$(2) \quad G_\alpha / G_{\alpha,0}, \quad G_\alpha / G_{\alpha,1} \text{ は infinite compact group}$$

$$(3) \quad G_\alpha + G_\beta = G_{\alpha \wedge \beta} \quad \text{for } \alpha, \beta \in \Lambda$$

$$\therefore \text{ として } \mu_n \equiv \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{\alpha \in \Lambda_n} \chi_{G_\alpha} \quad (n=0,1,2,\dots) \text{ とおく。}$$

すると $\mu_n \in M(\bar{R})$, $\mu_n \geq 0$, $\|\mu_n\|=1$ をみたす。

補題 3. $\{\mu_n\}$ の Fourier-Stieltjes 変換は次の性質をもつ。

$$(1) \quad \hat{\mu}_n(\gamma) = 1 \quad \text{for } \gamma \in H_0 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$(2) \quad \gamma \in H_{d_0, d_1, \dots, d_k} \setminus H_{d_0, d_1, \dots, d_{k-1}} \quad \text{に 対して}$$

$$\hat{\mu}_n(\gamma) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{for } n \geq k$$

$$= 0 \quad \text{for } n < k$$

$$(3) \quad \text{もし } (\gamma \in \bar{R} \setminus H_\alpha \quad (\forall \alpha \in \Lambda)) \text{ ならば}$$

$$\hat{\mu}_n(\gamma) = 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

(証) $\gamma \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma \neq 1$ on G_d ならば $\hat{m}_{G_d}(\gamma) = 0$ より明らか:

補題 3 より $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ は唯一の weak* cluster point $\mu \in M(\bar{\mathbb{R}})$ をもつ。そして次の性質をもつ。

補題 4. (1) $\mu \in M(\bar{\mathbb{R}})$, $\mu \geq 0$, $\|\mu\| = 1$.

(2) $\hat{\mu}(\gamma) = 1$ for $\gamma \in H_0$.

(3) $\hat{\mu}(\gamma) = (\frac{1}{2})^k$ for $\gamma \in H_{d_0, d_1, \dots, d_k} \setminus H_{d_0, d_1, \dots, d_{k-1}}$.

(4) $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ for $\gamma \in \mathbb{R} \setminus H_d$ ($\forall d \in \mathcal{L}$)

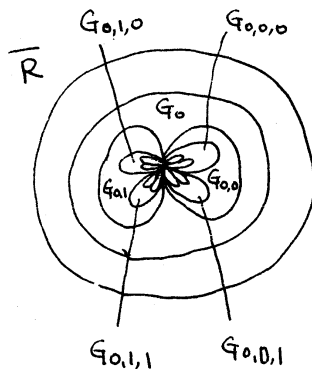
我々の目標はこの μ が定理の条件を満たすことを示すことである。そのために μ の持つ性質をもう少し調べる。

$d \in \mathcal{L}$, $n \geq |d|$ に対して

$\mathcal{L}_n^d \equiv \{\beta \in \mathcal{L}_n : \beta \wedge d = d\}$ $\mathcal{L}^d \equiv \bigcup_{n \geq |d|} \mathcal{L}_n^d$ とおく。

そして $\mu_n^d \equiv \sum_{\beta \in \mathcal{L}_n^d} (\frac{1}{2})^n m_{G_\beta}$ for $n \geq |d|$ とおく。

すると $\mu_n^d \geq 0$, $\|\mu_n^d\| = (\frac{1}{2})^{|d|}$, $\mu_n = \sum_{d \in \mathcal{L}_n} \mu_n^d$ である。



(これは μ_n を support G_d ($d \in \mathcal{L}_n$) におよそ分解したものである。)

μ_n の時と同じく, $\{\mu_n^d\}_{n=|d|}^{\infty}$ は唯一の weak* cluster point $\mu^d \in M(\bar{\mathbb{R}})$ をもち、次の性質をもつ。

補題 5. (1) $\|\mu^\alpha\| = (\frac{1}{2})^{|\alpha|}$ (2) $\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}_n} \mu^\alpha$ ($n \geq 0$)

(3) $\hat{\mu}^\alpha(\gamma) = (\frac{1}{2})^{|\alpha|}$ for $\gamma \in H_\alpha$

(4) $\gamma \in H_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k} \setminus H_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}}$ ($k \geq |\alpha|$) $\models \hat{\mu}^\alpha(\gamma) = (\frac{1}{2})^k$ if $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathcal{L}^\alpha$ ($\beta \wedge \alpha = \alpha$)
 $= 0$ if $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \notin \mathcal{L}^\alpha$ ($\beta \wedge \alpha \neq \alpha$)

(5) $\hat{\mu}^\alpha(\gamma) = 0$ for $\gamma \in R \setminus H_\alpha$ ($\forall \alpha \in \mathcal{L}$)

補題 6. (1) $\mu^\alpha \in M(\bar{R}/G_\alpha)$, $\mu^\beta \perp M(\bar{R}/G_\alpha)$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$.

(2) $\mu^\alpha * \mu^\beta = (\frac{1}{2})^{|\alpha|+|\beta|} m_{G_\alpha \wedge \beta}$.

(証明)

(2) 補題 5 より次を得る.

$$\widehat{\mu^\alpha * \mu^\beta}(\gamma) = \hat{\mu}^\alpha(\gamma) \hat{\mu}^\beta(\gamma) = (\frac{1}{2})^{|\alpha|} (\frac{1}{2})^{|\beta|} \text{ if } \gamma \in H_{\alpha \wedge \beta}$$

$$= 0 \text{ if } \gamma \notin H_{\alpha \wedge \beta}.$$

ゆえに $\mu^\alpha * \mu^\beta = (\frac{1}{2})^{|\alpha|+|\beta|} m_{G_\alpha \wedge \beta}$ であることが示す。

(1) $\phi: \bar{R} \rightarrow \bar{R}/G_\alpha$ canonical homomorphism とする。

$\lambda \in M(\bar{R})$ $\models \hat{\lambda} \in M(\bar{R}/G_\alpha)$ とする。

$\hat{\lambda}(E) \equiv \lambda(\phi^{-1}(E))$ for every Borel subset E of $\bar{R}/G_\alpha$ とする。

すると $M(\bar{R}) \ni \lambda \rightarrow \hat{\lambda} \in M(\bar{R}/G_\alpha)$ は homomorphism である。

また $\hat{\lambda}(\gamma \circ \phi) = \hat{\lambda}(\gamma)$ for $\gamma \in \widehat{\bar{R}/G_\alpha} = H_\alpha$ である。

よって補題 4 より $\hat{\mu} = \frac{1}{2} m_{D_\alpha} + (\frac{1}{2})^2 m_{D_\alpha, \alpha_1} + \dots + (\frac{1}{2})^{|\alpha|} m_{D_\alpha, \dots, \alpha_{|\alpha|-1}} + (\frac{1}{2})^{|\alpha|} S_\alpha$

を得る。ここで $D_\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_j$ は $H_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j} \subset H_\alpha$ の $\bar{R}/G_\alpha$ である。

の annihilator である。 S_0 は $0 \in \bar{R}/G_d$ の point mass である。

次に $H_d/H_{d_0, d_1, \dots, d_j}$ が infinite group であることに注意。

すれば $m_{D_{d_0, d_1, \dots, d_j}}$ は $\bar{R}/G_d$ 上の continuous measure である。

又 μ_n^α ($n \geq 1$) が G_d に concentrate (21) であることに注意す

れば, $\mu^\alpha = (\frac{1}{2})^{|\alpha|} S_0$ である。 (21) により)

$\sum_{\beta \neq \alpha, |\beta| = |\alpha|} \mu^\beta$ は continuous measure on $\bar{R}/G_d$ である。

$\mu^\alpha \in M(\bar{R}/G_d)$, $\mu^\beta \perp M(\bar{R}/G_d)$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$ を得る。

(注意) $\mu^\alpha \perp \mu^\beta$ if $\alpha \neq \beta$, $|\alpha| = |\beta|$.

命題 1. $0 \mu(K_p) = 0$ for every maximal group K_p of S .

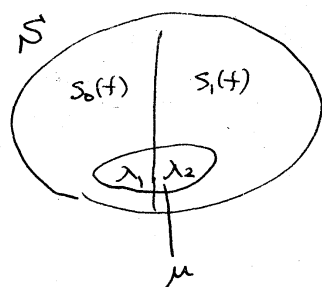
(証) 補題 5 の (1), 補題 6 の (1) より得られる。

補題 7. $f \in \hat{S}$, $f^2 = f$, $\hat{\mu}(f) \neq 0$ とする。すると次を満たす $\alpha \in \mathcal{L}$ が存在する。

(1) $\mu^\alpha \in M(S_1(f))$

(2) $\mu^\beta \in M(S_0(f))$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$.

(証明)



$\hat{\mu}(f) \neq 0$ であるから $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 \in M(S_0(f))$, $\lambda_2 \in M(S_1(f))$ と分解できる。そこで μ^α の $n \geq 1$ に対して

$\mu_m \in M(S_0(+))$ と仮定する。すると $(\frac{1}{2})^{m_0} < \|\lambda_2\|$ なる自然数 m_0 に対して $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{m_0}$, $\mu^\alpha \notin \lambda_2$, $\mu^\beta \notin \lambda_2$ なるものが存在する。補題 6 の (2) より, $\mu^\alpha * \mu^\beta = (\frac{1}{2})^{2m_0} m_{\mathbb{Q}_{\alpha, \beta}}$ と $\mu^\alpha * \mu^\beta \in M(S_0(+))$ を得る。しかし $M(S_1(+))$ は L -subalgebra であることより $\mu^\alpha * \mu^\beta \notin M(S_0(+))$ を得て矛盾を生ずる。

よって $\mu_m \notin M(S_0(+))$ なる自然数 m がある。そこで

$\mu_m \notin M(S_0(+))$ なる一番小さい自然数を m_1 とする。すると補題 2 の (3) より $\alpha \in \mathcal{L}_{m_1}$ が存在して $m_{\mathbb{Q}_\alpha} \in M(S_1(+))$, $m_{\mathbb{Q}_\beta} \in M(S_0(+))$ for $\beta \in \mathcal{L}_{m_1}$ ($\beta \neq \alpha$) が成立する。そして $M(\bar{\mathbb{R}}_{\mathbb{Q}_\alpha}) \subset M(S_1(+))$ であるから, 補題 6 の (1) より $\mu^\alpha \in M(S_1(+))$ を得る (1) の証明終り)。そこで $\mu^\beta \notin M(S_0(+))$ for some $\beta \in \mathcal{L}_{m_1}$ ($\beta \neq \alpha$) とする。すると $\mu^\beta * \mu^\alpha \notin M(S_0(+))$ である。しかし補題 6 の (2) より $\mu^\beta * \mu^\alpha = (\frac{1}{2})^{|\beta|+|\alpha|} m_{\mathbb{Q}_{\alpha, \beta}}$ を得る。しかしこれは $\mu^\alpha * \mu^\beta \in M(S_0(+))$ を示す。よって矛盾である。

命題 2. $\theta\mu$ は K に concentrate している。

(証明)

$f \in \hat{S}$, $f \geq 0$, $f^2 = f$, $\tilde{\mu}(f) \neq 0$ とする。Proposition 3 より $t_f \in \hat{S}$ ($t_f^2 = t_f$) が存在して $\tilde{\mu}(t_f) \neq 0$ である。すると補題 7 をみたす $\alpha \in \mathcal{L}$ が存在して $\mu^\alpha \in M(S_1(t_f))$, $\mu^\beta \in M(S_0(t_f))$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$ である。そして

$M(\bar{R}_{G_d}) \subset M(S_1(h_f))$, $m_{G_d} \in M(S_1(g_f))$ であるから,
 $M(\bar{R}_{G_d}) \subset M(S_1(g_f))$, $\mu^d \in M(S_1(g_f))$ を得る。このことは
 μ が K に concentrate していることを示している。

以上により我々の定理が成立する。一般には次を得る。

定理'. $G \in$ compact abelian group とする。もし $\hat{G}$ が
infinite independent set を含むならば $M_1(G) \neq \{0\}$ である。

系. $M_1(G) \neq \{0\}$ なる compact metrizable abelian group G
が存在する。

(証明)

補題1で $E_d \in$ countable set にとる。 $H \in \{H_d\}_{d \in \Lambda}$ から
生成される subgroup とすると、 H は countable subgroup of
 R である。 $H^\perp$ を H の $\bar{R}$ での annihilator とすると $H = \widehat{\bar{R}/H^\perp}$
であるから $\bar{R}/H^\perp$ は compact metrizable abelian group
である。あとは同じ様に $\bar{R}/H^\perp$ 上で話を進めていけばよい。

$M_1(G) \neq \{0\}$ なる group G の存在はわかったのだが、一番簡単
な group, R , と $\mathbb{T}$ (circle group) に関し (これはまだわかって
いない)。予想としては, $M_1(R) = \{0\}$, $M_1(\mathbb{T}) = \{0\}$ である。

最後に、清水氏 ([6]) も同様の結果を得ています。idea
はだいたい同じです。

参考 文献

1. K. Izuchi : On a problem of J. L. Taylor, to appear.
2. W. Rudin : Fourier analysis on groups, Interscience,
New York, 1962.
3. J. L. Taylor : The structure of convolution measure
algebras, Trans. A.M.S. 119 (1965), 150 - 166.
4. ——— : L-subalgebras of $M(G)$, Trans. A.M.S.
135 (1969), 105 - 113.
5. ——— : Measure Algebras, Regional conf. ser.
Math. (Amer. Math. Soc.) No. 16 (1973).
6. T. Shimizu : Independent sets and measure
algebras, to appear.