

Real rank 1 の半単純リー群に関する ある系列の既約表現について

津田 勉大 三島川 寿一

§1. 序 V. Bargmann による $G_0 = SU(1, 1)$ の既約表現 $D_{\frac{1}{2}}^+$, $D_{\frac{1}{2}}^-$ は次の様にして構成される。($D_{\frac{1}{2}}^+$, $D_{\frac{1}{2}}^-$ は離散系列に属し $D_{\frac{1}{2}}^+ \oplus D_{\frac{1}{2}}^-$ は主系列に属する)

G_0 の元 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ ($|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$) を $10 \rightarrow X - Y$

$g = (z, \theta)$ ($|z| < 1, z \in \mathbb{C}, 0 \leq \theta < 4\pi$) を用いて表わすことにする。但し $z = \frac{\beta}{\alpha}$, $e^{\frac{i\theta}{2}} = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ 。このとき G_0 の不変測度 dg は $dg = (1 - |z|^2)^{-2} dx dy d\theta$, $z = x + iy$ で与えられる。

さて G_0 上の関数空間 $\mathcal{H}_0^+, \mathcal{H}_0^-$ を

$$\mathcal{H}_0^{\pm} = \left\{ f^{\pm} \in C^{\infty}(G_0) \mid f^{\pm}(gk_{\theta}) = e^{\mp \frac{i\theta}{2}} f^{\pm}(g), \Delta f = -\frac{1}{4}f \right.$$

$$\left. , \sup | (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{2}} f(z, \theta) | < +\infty \right\}.$$

とする。但し Ω は G_0 上のカシミール作用素とし、

$$K_Q = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & e^{+\frac{i}{2}\Omega} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

よって $\mathcal{H}_0^\pm$ のセミノルム $\|\cdot\|_\pm$ を

$$\|f\|_\pm^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int |f^\pm(z, 0)|^2 (1 - |z|^2)^{2+\varepsilon} dx dy d\theta$$

により定義すると $\mathcal{H}_0^\pm$ は pre-Hilbert 空間となることわかる。即ち $\|f^\pm\|_\pm = 0 \Rightarrow f^\pm = 0 \text{ on } G$ 。

$\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-$ を各々 $\mathcal{H}_0^+, \mathcal{H}_0^-$ の完備化として $D_\pm^+, D_\pm^-$ は次の様にして与えられる。

$$(D_\pm^\pm(g) f^\pm)(x) = f^\pm(g^{-1}x) \quad g, x \in G_0, f^+ \in \mathcal{H}^+, f^- \in \mathcal{H}^-.$$

おまかかに言えば $D_\pm^+$ は単位円盤内で複素解析的な空間に作られた表現であり、 $D_\pm^-$ は反解析的な表現である。一方単位円上で構成されたある主系列表現 $C_\frac{1}{2}$ は又

$D_\pm^+ \oplus D_\pm^-$ と同型となる。 ここで一般の G に対して同様な議論が成り立つか という問題は次の節で考える。

§2.

G_c を複素単純リー群とし、 G を G_c の一つの実型とする。このとき G を real rank 1 と仮定する。¹⁾ G が real rank

1で、コンパクトなカルタン部分群をもたぬ時、主系列表現は総て可約なので、我々の問題を考えるには、 G がコンパクトなカルタン部分群を持つ場合のみが適当である。以下
 2) G はコンパクトなカルタン部分群をもつと仮定しておく。

$\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ を各々 G_c, G, K (K は G の極大コンパクト部分群) のリー環とし $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする。 $\mathfrak{g}_c$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環として $\mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ とする様にとる。2)の仮定から $\dim \mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{p} = 1$ 。そこで $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{p}$ $\mathfrak{g}_I = \mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{k}$ とおく。 Σ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c)$ に関するroot系とすれば、リカウ $\alpha_0 = 0$ on $\mathfrak{g}_I$ となる様子の Σ の元 α_0 をとれる。 α_0 を以後固定して議論を進める。 Σ の順序として $(\alpha, \alpha_0) > 0$ であれば常に $\alpha > 0$ となるものを選んでおく。

$\mathcal{U}$ を $\mathfrak{g}_c$ の展開環, $\mathfrak{z}$ を $\mathcal{U}$ の中心とする。そこで $\mathcal{U}$ の元は次の様にして G 上の左不変微分作用素と考えられる。

W を有限次元ベクトル空間, $C^\infty(G, W) = \{f: G \rightarrow W \mid f \text{ は } G \text{ 上 } C^\infty\text{-級}\}$ とし

$$(Xf)(x) = \left. \frac{d}{dt} f(x \exp tX) \right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(G, W)$$

$$X \in \mathfrak{g} \subset \mathcal{U}.$$

$I(\mathfrak{g}_c)$ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c)$ のワイル群に関する $\mathfrak{g}_c$ 上の不変多項式全体とし $\mu: \mathfrak{z} \rightarrow I(\mathfrak{g}_c)$ を シュバレー同型とする。

λ を $\mathcal{O}_c$ 上の線型形式とすれば次の様にして無限小指標 $\chi_\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ が定義される。

$$\chi_\lambda(z) = \lambda(\mu(z)) \quad z \in \mathfrak{g}.$$

さて前節での $H_0^\pm$ にあたる空間を定義する。これを K の既約表現とし、 W をその表現空間とする。そこで $C^\infty(W, G)$ のセミノルム達 $\{\nu_b\}_{b \in \mathcal{U}}$ を次の様に定義する。

$$\nu_b(f) = \sup_{x \in G} |(bf)(x)| e^{d(x_0, 0)} \quad , \quad f \in C^\infty(W, G).$$

但し d は対称空間 G/K 上の G -不変リーマンメトリックで

$$e^{d(\exp H_0, 0)} = e^{P_+(H)} \quad H \in \mathcal{O}_R \quad \left(P_+ = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \alpha_0) > 0} \alpha \right)$$

となるものとする。

$H_0(\lambda, \tau)$ (λ は $\mathcal{O}_c$ 上の整型式) を次の様に定義する。

$$H_0(\lambda, \tau) = \left\{ f \in C^\infty(W, G) \mid \nu_b(f) < +\infty \quad \forall b \in \mathcal{U}, \right. \\ \left. \begin{array}{l} \hookrightarrow \tau f = \chi_\lambda(z) f, \quad f(kx) = \pi(k) f(x) \quad \forall x \in G \quad \forall k \in K \end{array} \right\}$$

又 $H_0(\lambda, \tau)$ のセミノルムは

$$\|f\|^2 = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \int_G |f(x)|^2 e^{-\tau d(x_0, 0)} dx$$

(dx は G 上のハール測度) により与えらる。

λ は $\mathcal{O}_c$ 上の整型式であったが必ずしも $H_0(\lambda, \tau)$ の元 f

に対して $\|f\| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ on G は成り立たない。

よって λ として次の様なものに制限する。

$$\star I \quad (\lambda, \alpha_0) = 0, \quad \pi(\lambda, \alpha) \neq 0, \quad (\lambda, \beta) > 0$$

$\alpha \neq \pm \alpha_0$

$$(\beta; \beta > 0 \text{ かつ } (\beta, \alpha_0) = 0)。$$

Lemma

λ を上の条件 $\star I$ を満たす整型式 とすれば $H_0(\lambda, \tau)$ は pre-Hilbert 空間。

$H_0(\lambda, \tau) \neq \{0\}$ は一般の τ に対しては必ずしも成り立たない。よって τ を次の様に制限をする。

$M \neq K$ に於ける $\mathfrak{g}_R$ の中心 とすれば

$$\dim G = 3 \Rightarrow M = \{\pm 1\} \quad (1 \text{ は } G \text{ の単位元})$$

$$\dim G > 3 \Rightarrow M \text{ は連結。}$$

$$\rho_- = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha > 0 \\ (\alpha, \alpha_0) = 0}} \alpha, \quad \lambda_- = \lambda - \rho_- \quad \text{とおき } \sigma \lambda_- \text{ を } \lambda_- \text{ と}$$

最高ウェイトとする M の既約表現 Γ をその表現空間とする。

$$(M = \{\pm 1\} \text{ のとき } \sigma \lambda_-(-1) = -1 \text{ とする様にする})$$

この時次の補題が成り立つ。

Lemma

$$(\star 2) \quad |\tau|_M : \sigma_{\lambda-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad H_0(\lambda, \tau) \neq 0$$

但し $\tau|_M$ は τ の M への制限であり、

$|\tau|_M : \sigma_{\lambda-1}$ は $\tau|_M$ の中に 現われる重複度。

(λ, τ) を $\star 1, \star 2$ を満すとしよう。 $\lambda = \tau$

$$[U(\lambda, \tau; g)f](x) = f(gx) \quad f \in H(\lambda, \tau)$$

によって G の表現 $U(\lambda, \tau)$ を定義する。但し $H(\lambda, \tau)$ は $H_0(\lambda, \tau)$ の完備化。

定理

(λ, τ) が $\star 1, \star 2$ を満すとき、

$U(\lambda, \tau)$ はユニタリ表現で、特に $|\tau|_M : \sigma_{\lambda-1} = 1$ とすれば $U(\lambda, \tau)$ は既約。

注. $\star$ を満す λ に対して $|\tau|_M : \sigma_{\lambda-1} = 1$ を満す τ は必ず存在する。

次に主系列表現と上に得られた $U(\lambda, \tau)$ との関係を示す。
 $G = K A_R N$ を岩沢分解、 dk を K の不変測度とす。又

$$\mathcal{H}(\lambda-) = \{f: K \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_K |f(k)|^2 dk < \infty, f(km) = \sigma_{\lambda-1}^{-1}(m) f(k)\}$$

$\forall k \in K \quad \forall m \in M ?$ とおく。

$s \in \mathbb{R}$ を一つ固定し

$$[V(\lambda-, is; x)f](k) = e^{-(1+si)} p_+(H(x^{-1}, k)) f(kx^{-1})$$

$$f \in \mathcal{B}(\lambda-), \quad k \in K, \quad x \in G, \quad x^{-1}k = kx^{-1} g_p^{H(x^{-1}, k)} \eta(x^{-1}, k)$$

により G の表現 $V(\lambda-; is)$ を定義する。

$V(\lambda-; is)$ は主系列表現と呼ばれる。 $V(\lambda-; is)$

$(s \neq 0)$ は既約ユニタリ表現で $V(\lambda-; 0)$ は可約

であること知られている。

定理. $\lambda \in \Lambda$ を満たすかつ $| \tau(M; \tau_\lambda) | = 1$ とすると

$U(\lambda, \tau)$ は $V(\lambda-, 0)$ の既約成分。