

1.

Hirzebruch の比例原理 に ついて .

村馬 龍司 (学習院大)

I, 定義 1, $\bar{X}$ は compact complex manifold, D はその normal crossing な divisor, $X = \bar{X} - D$ とする。この時, $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ の subsheaf $\mathcal{O}_{\bar{X}}(\log D)$ を次の様に定義する。 $p \in \bar{X}$ のまわりの局所座標 $z_1, z_2, \dots, z_n$ ($n = \dim X$) によつて, $D = \{z_1 \cdots z_r = 0\}$ と書かれる時, $\mathcal{O}_{\bar{X}}(\log D)_p$ は $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, z_r \frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial z_{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ によつて生成されるものとする。 $\mathcal{O}_{\bar{X}}(\log D)$ は勿論 [2] で定義された $\Omega^1_{\bar{X}}(\log D)$ の dual である。そして, $\bar{c}_i(X) = c_i(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\log D))$ とおき, X の logarithmic chern class と呼ぶ。

第一の目標は Hirzebruch の比例原理を次の様に拡張することである。

定理 1, $\mathcal{D}$ は bounded symmetric domain, $\text{Hol}(\mathcal{D})$ はその biholomorphic isomorphism のなす group, $\Gamma(\text{Hol}(\mathcal{D}))$ は torsion free な discrete arithmetic subgroup, $\widetilde{\mathcal{D}/\Gamma} \in [1]$ で構成された, $D = \widetilde{\mathcal{D}/\Gamma} - \mathcal{D}/\Gamma$ なる normal crossing である。

?

る様な $\mathcal{D}/\Gamma$ の non-singular な compact 化, $\overline{\mathcal{C}}_i = \overline{\mathcal{C}}_i(\mathcal{D}/\Gamma)$ とする。また $n = \dim \mathcal{D}$ とし, $H^{2n}(\widetilde{\mathcal{D}/\Gamma}, \mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ と同一視する。この時,

$$\overline{\mathcal{C}}_{i_1}^{n_1} \cdots \overline{\mathcal{C}}_{i_R}^{n_R} = a_{i_1 \cdots i_R}^{n_1 \cdots n_R} \cdot v(\mathcal{D}/\Gamma).$$

ただし $n_1 \cdot i_1 + \cdots + n_R \cdot i_R = n$ で, v は $\mathcal{D}$ の不変測度, $a_{i_1 \cdots i_R}^{n_1 \cdots n_R}$ は $\mathcal{D}$ のみに依存する (Γ によらない) 定数である。

筆者はこの定理を $\mathcal{D} = \mathcal{H}_g$ (degree g の Siegel 上半平面), D^n (n 次元 disk) 等の場合に確認していたが, 一般には出来ていなかった。最近 [7] によって, 一般の bounded symmetric domain に対して証明された。

証明の方針は簡単の爲, $\mathcal{D} = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ とし説明すると, $\mathcal{D}$ の Bergman metric $\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2}$ によつて $\oplus_{\mathcal{D}} = \operatorname{Hol}(\mathcal{D})$ 不変な Hermitian metric が入るが, 不変性により $\oplus_{\mathcal{D}/\Gamma}$ の Hermitian metric を与える。 $\pi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\Gamma$ は projection, $p = \pi(i\infty) \in \widetilde{\mathcal{D}/\Gamma} - \mathcal{D}/\Gamma$ を cusp とすると, $\ell \in \mathbb{R} \rightarrow z \rightarrow z + \ell$ が Γ に含まれる最小の正数として, $\widetilde{\mathcal{D}/\Gamma}$ の p 近の局所座標は $\zeta = \exp(2\pi i \frac{z}{\ell})$ で与えられるから,

3,

$$\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\pi i}{x} \xi \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (= \text{よ}) ,$$

$$\left\langle \frac{2\pi i}{x} \xi \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{2\pi i}{x} \xi \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle = \frac{4\pi^2}{(\log |z|)^2}$$

として, $\oplus_{\mathbb{P}}(\log D)$ に metric ω を与えると言っている。
 ところで ω の右辺は $z \rightarrow 0$ の時, 0 になる。
 この "metric" は cusp z で退化している。
 従って, $\omega_1 = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left\{ \frac{4\pi^2}{(\log |z|)^2} \right\}$ が "chern
 class $\overline{c}_1$ を表す" とは直ちに結論できない。
 そこで ω の ω_1 と $\overline{c}_1$ との比較をしてみる。

ω_1 を $\oplus_{\mathbb{P}}(\log D)$ の (退化していない本当の)
 Hermitian metric から作った, $\overline{c}_1$ を表す 2-form と
 すると, chern class ω connection α と関係によらない
 ということがよく知られている。

$$\omega_1 - \omega_1' = d\alpha, \quad (\alpha \text{ は 1-form})$$

と表わす。ここで ω_1 は cusp z で C^∞ ではないこと
 により, $\alpha \notin \text{cusp } z \text{ } C^\infty$ ではない。従って Stokes
 の定理で $\int d\alpha = 0$ とは言えないのである。
 α の cusp での挙動の特性を調べてみると,

$$\alpha = \frac{i dz}{4\pi z \log |z|} + (C^\infty \text{ term})$$

となる。

$$\int \omega_1 - \int \omega_1'$$

4.

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{\text{cusp}} \int_{|s|=r} \frac{-i ds}{4\pi s \log |s|}$$

$$= 0$$

2",

$$\bar{c}_1 = \int \omega_1' = \int \omega_1$$

とたり, この右辺が測度に比例するものは明らかであるから, $(\pi^* \omega_1$ が $H^2(\mathcal{D})$ 不変な 2-form になるの2", $\pi^* \omega_1$ は不変測度の定数倍である。) 定理が成立する。

一般の bounded symmetric domain に対しても, 問題になるのは Bergman metric の boundary へ行く時の増大度を評価することである。筆者は先に挙げた場合について, 具体的な Bergman metric の式を書き下すことにより, 定理を証明した。Mumford は Bergman metric の具体的な形は使わず, 不変性だけから証明している。なお, Mumford は, もう少し一般の vector bundle に対して, 定理を証明している。

この応用として直ちに次の定理を得る。

定理 2, S_R を $\mathcal{D}$ 上の Γ に関する weight R の cusp form のなる空間とし, $r = \max \dim \{ \mathcal{D} \text{ の rational}$

5,

boundary component $\{$ とすると, $k \geq 2$ の時 $\dim S_k$ は k の多項式となるが, ある $\mathcal{Q}$ に依存する多項式 $F(k)$ があつて, $(\deg F(k) = \dim \mathcal{Q})$

$$\dim S_k = F(k) \cdot v(\mathcal{Q}/p) + (k \geq r \text{ かつ } r \text{ 次以下の項}),$$

となる。

(証明), (Mumford の証明もほぼ同じである。) 一般の場合も全く同様であるから, $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_g$ として証明する。

定義 2, $\overline{X}, X, D$ を定義 1 と同様とする。
 D の irreducible component を $D_1, D_2, \dots, D_r$ とする。
 この時, $D_1, \dots, D_r$ の j 番目の基本対称式を Δ_j とする。ただし積は交わりである。

補題 1, $c_i = c_i(\overline{X})$, $\overline{c}_i = c_i(X)$ とする時,

$$c_i = \sum_{j=0}^i \overline{c}_j \cdot \Delta_{i-j}.$$

これは次の π^* の sheaf の exact sequence から, $\mathcal{O}_{D_i}(D_i)$ の chern character を 通りの方法で計算することによって証明される。

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\overline{X}} (\log \Delta_i) \rightarrow \bigoplus_{\overline{X}} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(D_i) \rightarrow \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \rightarrow 0$$

6,

$T = T^* L$, Δ_j と δ の cohomology class と $\in$ 同一視した。

さて定理の証明にもどると, G_g/p の佐武 compact 化を G_g/p^* と書くと, G_g/p^* 上には "weight" 1 の modular form の芽の sheaf L があり, これは invertible である。(weight に " " をつけたのは, 前に書いた weight と少し異なるから区別する為である。) L の定義を述べると, これは G_g/p 上では, G_g 上の automorphic factor

$$\det(CZ + D), \quad Z \in G_g, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{R})$$

によって誘導されるものである。 G_g/p^* の cusp 上では, これは Siegel の Φ -operator 上延長したものである。

$\pi: \widetilde{G}_g/p \rightarrow G_g/p^*$ という G_g/p 上 identity である様な morphism が $\widetilde{G}_g/p$ の構成法により, 存在するが, 容易に $\pi^*((g+1)L) \cong K_{\widetilde{G}_g/p} + \Delta_1$ である。 $T = T^* L$ $K_{\widetilde{G}_g/p}$ は $\widetilde{G}_g/p$ の canonical bundle。

(従って weight $k =$ "weight" $k(g+1)$.) により,

$$S_k \cong \Gamma(\widetilde{G}_g/p, \mathcal{O}_{\widetilde{G}_g/p}(k(K_{\widetilde{G}_g/p} + \Delta_1) - \Delta_1))$$

であり, 後者の次元は $k \geq 2$ の時, vanishing

Theorem [11] により

$$X(\widetilde{G}_g/P, \mathcal{O}_{\widetilde{G}_g/P}(K(\widetilde{K}_{\widetilde{G}_g/P} + \Delta_1) - \Delta_1))$$

に等しく、これは Riemann-Roch の定理により、
多項式 Q が存在し、

$$Q(c(K(\widetilde{K}_{\widetilde{G}_g/P} + \Delta_1) - \Delta_1), c_1, c_2, \dots, c_n)$$

に等しい、ただし $c(\quad)$ は cohomology class, c_i は $c_i(\widetilde{G}_g/P)$ である。 $c(K(\widetilde{K}_{\widetilde{G}_g/P} + \Delta_1) - \Delta_1) = -\overline{c}_1(\widetilde{G}_g/P)$ であるから、 $\overline{c}_1 = \overline{c}_1(\widetilde{G}_g/P)$ とおいて補題 1 を使えば、上の多項式を $\overline{c}_1$ と Δ_j との式に展開する。即ち

$$\begin{aligned} \dim S_k &= \overline{c}_1 \text{ と } \Delta_j \text{ との多項式} \\ &= (\overline{c}_1 \text{ だけの項}) + (\Delta_j \text{ が入る項}) \end{aligned}$$

と書けるが、この前者は定理 1 により、ある多項式 $F(k)$ が存在して、 $F(k) \cdot \overline{c}_1(\widetilde{G}_g/P)$ に等しい。従って定理の証明の為に、後者が k について r 次以下になることを証明すればよいが、
これは $D(\widetilde{G}_g/P - G_g/P)$ を irreducible divisor, E を $2n-2r-4$ 次の cohomology class とする時、

$$\overline{c}_1^{r+1} \cdot D \cdot E = 0$$

が証明できればよい。何故ならば、 k は $\overline{c}_1$ しかかかるといえるからである。(ここでは、

8.

$$r = \frac{1}{2}g(g-1), \quad n = \frac{1}{2}g(g+1).$$

と 3 2", G_g/Γ^* の cusp は $\Gamma' = G_g$ のある boundary component G_{g-1} を fix する Γ の subgroup, と し G_{g+1}/Γ' の union と 2 3 2", $\widetilde{G}_g/\Gamma$ の構成法により, D はある G_{g+1}/Γ' 上の fiber space の構造をもつ 2 3 2". 即ち $\pi|_D: D \rightarrow G_{g+1}/\Gamma'$.

従って,

$$\begin{aligned} \overline{c}_1^{r+1} \cdot D \cdot E &= (\overline{c}_1|_D)^{r+1} \cdot E|_D \\ &= (- (g+1) \pi|_D^* (L|_{G_{g+1}/\Gamma'}))^{r+1} \cdot E|_D \end{aligned}$$

2 3 2"ある 2 3 2", G_{g-1} 2 3 2" r 次 2 3 2"ある 2 3 2"により, 2 3 2"は 0 に等しい。

II, 以上により, $\dim S_R$ 2 3 2" k について漸近的に求まったわけであるが, 今度は $\mathcal{O} = G_3$ の場合には, これを定数項まで完全に求めることを目標とする。なお $\mathcal{O} = G_2$ の場合は, [10] によって, Riemann-Roch の定理の井草井の theta constant の理論を用いて計算され, また [6] によって Selberg の trace formula を用いて計算されたが, 定理 1 を用いれば Riemann-Roch の定理だけから計算で

9.

きる。 $\mathcal{C} = \mathcal{G}_3$ の場合には、交点数を 50 個ほど計算することが必要となるが、定理 1 により、そのうちの 11 個が計算され、定理 2 (の証明) により、そのうちの 3 個が 0 になることがわかる。とこが次の定理 3 により、この 3 個を含めて 22 個が 0 になることがわかり、従って計 33 個が自動的に計算され、残りは 17 個である。

以下 $\widetilde{\mathcal{G}_3/p}$, $\widetilde{\mathcal{G}_2/p'}$ として, [8], [9] で研究された $\mathcal{G}_3/p$, $\mathcal{G}_2/p'$ の Voronoi compactification をとる。 $T = \mathbb{C}$, $\Gamma = \Gamma_3(l)$, $\Gamma' = \Gamma_2(l)$ ($l \geq 3$) は, level l の principal congruence group である。なお $\widetilde{\mathcal{G}_3/p}$, $\widetilde{\mathcal{G}_2/p'}$ は [3] で構成された, 井草の desingularization というものに等しい。

$D \subset \widetilde{\mathcal{G}_3/p} - \mathcal{G}_3/p$ を irreducible divisor とすると, 定理 2 の証明により D は $\mathcal{G}_2/p'^*$ 上の fiber space の構造をもつが, π を 2- 次の map φ と考える。

$C = \widetilde{\mathcal{G}_2/p'}$ とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{\mathcal{G}_3/p} \supset D & & \xrightarrow{\varphi} & & \widetilde{\mathcal{G}_2/p'} = C \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \cong & \swarrow & \\
 \mathcal{G}_3/p^* \supset \mathcal{G}_2/p'^* & & & &
 \end{array}$$

φ は equidimensional $\mathbb{A}^1$ morphism になるから、次が成り立つ。

定理 3, C 上の $2i$ 次元の cohomology class e_i が存在して,

$$\overline{c}_i|_D = \varphi^*(e_i)$$

が成り立つ。また $\overline{c}_i = \overline{c}_i(\mathcal{O}_3/p)$ $1 \leq i \leq 6$ 。

また adjunction formula により次が成り立つ。

補題 2, $\widetilde{\mathcal{O}_3/p} - \mathcal{O}_3/p$ を irreducible component $D_1 = D, D_2, \dots, D_r$ に分割し, $\Delta'_1 = D_2 + \dots + D_r$ とし, $\Delta'_1|_D = \Delta'_1 \cap D$ とする。この時

$$\overline{c}_i|_D = \overline{c}_i(D - \Delta'_1|_D).$$

定理の証明に入る。 $E = \widetilde{\mathcal{O}_2/p'} - \mathcal{O}_2/p$ とし、 $\mathcal{O}_2$ sheaf の exact sequence

$$0 \rightarrow \varphi^* \Omega^1_C(\log E) \rightarrow \Omega^1_D(\log \Delta'_1|_D) \rightarrow \Omega^1_{D/C}(\log \Delta'_1|_D) \rightarrow 0$$

がある。ここには $\varphi^* \Omega^1_C(\log E), \Omega^1_{D/C}(\log \Delta'_1|_D)$ は、locally free である。従って補題 2 より、定理の証明の為に、 C 上に rank 2 の locally free sheaf F が存在して、 $\Omega^1_{D/C}(\log \Delta'_1|_D) \cong \varphi^*(F)$ とする必要がある。

証明の方針を例で説明しよう。 C の不変

11.

微分形式 dz を, $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*$ に落とすと, $\mathbb{C}^*$ の座標を w として, $\mathbb{C}^*$ 上の微分形式 $\frac{dw}{w}$ を与える。この $\frac{dw}{w}$ は $\mathbb{P}^1 - \mathbb{C}^*$ の boundary を与えて, $z = z''$ log pole を与えている。即ち最初の dz が $\mathbb{C}^*$ に落ちて $\oplus \rho_i(\log D)$ の trivialization を与えている。これと似たことをやると, $\Omega_{D/C}^1(\log \Delta'_{1D})$ の縦方向の trivialization を構成することができる。

まず D の座標は symbolical に

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & w_1 \\ z_2 & z_3 & w_2 \\ w_1 & w_2 & \infty \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}_2$$

と書ける。(3.3) 成分が ∞ というのも、この点が D 上に存在するということ、 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ が C の座標であり、 (w_1, w_2) が φ の fiber の座標である。

証明すべきことは、 (dw_1, dw_2) が Γ で割った時に $\Omega_{D/C}^1(\log \Delta'_{1D})$ の section として D に落ちて、 $z = z''$ 縦方向の trivialization を与えているということである。正確に述べると、 $p \in C$ の近傍 U があって $\varphi^{-1}(U)$ にあって、 (dw_1, dw_2) が $\Omega_{D/C}^1(\log \Delta'_{1D})$ の section として落ちて Γ もの、 $z = z''$ 一次独立であること、従って $z = z''$ $\Omega_{D/C}^1(\log \Delta'_{1D})$ の trivialization

を与えるわけであるが、 $U, V \subset C$ の時、 $U \cap V \neq \emptyset$ であれば、 $\varphi^{-1}(U)$ と $\varphi^{-1}(V)$ 上での $\Omega_{D/C}^1(\log \Delta_{1|D})$ の trivialization の変換行列が $\varphi^{-1}(U \cap V)$ 上で (w_1, w_2) に依らない、 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ だけの正則関数になっているということがある。これらのことは具体的に (dw_1, dw_2) を計算することによって確かめられる。これ定理3は証明される。

定理2によつて、 $\overline{C}_1^5 \cdot D = 0$ 等が結論されるが、定理3によると、 $\overline{C}_1 \cdot \overline{C}_2^2 \cdot D = 0$ 等も結論される。以上によつて残りは17個の交点数である。

$\widetilde{G}_{3/p}$ は torus embedding の理論を応用して構成されるのであるが、torus embedding は rational partial polyhedral decomposition で分類される ([5]). [5] の定理を使うことによつて、torus embedding の boundary に関する交点数を、rational partial polyhedral decomposition の係数から直接計算する方法を見出すことができる。 $\widetilde{G}_{3/p}$ は torus embedding を割つたものを張り合わせることによつて構成されるのであるが、例としては $D_1, D_2, D_3 \subset \widetilde{G}_{3/p} - G_{3/p}$ が irreducible divisor である時、 $\pi(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$ が0次元

でなければ" (π は G_3/p^* への map), $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ は 1 つの torus embedding を割ったもののうちに含まれている。従って $\Sigma = 0$ の時、前に述べた方法で、 $D_1^4 D_2 D_3$, $D_1^3 D_2^2 D_3$ 等の交点数が計算できる。

次は残った交点数に関する関係式を求めることである。 $E_1 \subset \widetilde{G_2/p^*} - G_2/p^*$ を irreducible な divisor とする時、 $\widetilde{G_3/p^*}$ が 3 次元であることにより、前の様に $\varphi: D \rightarrow \widetilde{G_2/p^*}$ として、 D と Σ の交点数、 $\varphi^*(E_1)^5$, $\varphi^*(E_1)^4 \cdot D$ は 0 になる。ただし、divisor とそれから誘導される line bundle、及びその cohomology class 等を適当に同一視している。従って $\widetilde{G_3/p^*}$ 上の交点数 $\varphi^*(E_1)^5 \cdot D$, $\varphi^*(E_1)^4 \cdot D^2$ が 0 になり、これから関係式が導かれる。また、 $\varphi^*(E_1)^3 \cdot D^3$, $\varphi^*(E_1) \cdot \varphi^*(E_1)^2 \cdot D^3 = \overline{C_1} \cdot \varphi^*(E_1)^2 \cdot D^3$ 等は、0 にはならないが、前に述べた方法で求めた交点数の結果から計算できる。

次も同様の方法であるが、 $\varphi^*(E_1)$ は 2 つの 4 次元多様体がお互いに交わり、互いに交わったものであるが、その一つの 4 次元多様体、および一つの交わりとなる 3 次元多様体は、

irreducible divisor $D', D'' \in \widetilde{G_3/p} - G_3/p$ があり、 $D \cap D'$ および $D \cap D' \cap D''$ と表わされるのであるが、 $\widetilde{G_2/p'}$ 上の cohomology class E_1^3 は E_1 の外の点に与えられるので、 D 上の cohomology class $\varphi^*(E_1)^3$ は $D \cap D', D \cap D' \cap D''$ と交わることはない。従って、 $\varphi^*(E_1)^3 \cdot D \cdot D' \cdot D''$, $\varphi^*(E_1)^3 \cdot D^2 \cdot D'$ 等は 0 になる。また前と同様に、 $\varphi^*(E_1)^2 \cdot D^2 \cdot D' \cdot D''$ 等は 0 にはならないが、前に求めた交点数の結果から計算できる。

以上の様にして、様々の関係式が導かれるのであるが、これだけだけでは不十分である。何故ならば以上の関係式には、 D^6 という項は出て来ないからである。そこで次の結果を使う。

定理 [4] G_3 上の $\Gamma_3(1)$ に関する "weight"

18 と 140 の cusp form が存在して、それらの共通零点は reducible point の集合である。ただし、reducible point というのは、 $\Gamma_3(1)$ に関して $\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}$, $\tau_1 \in G_2, \tau_2 \in G_1$ という点と同値な点のことである。

これは 1), "weight" 18 の cusp form の G_3/p 上の零点, "weight" 140 の cusp form の G_3/p 上の零点を、それぞれ

れ F, G とすると、 $\overline{F}, \overline{G} \in \mathbb{Z}$ の $\widetilde{G_3/p}$ の中で
の閉包として、

$$-\frac{18}{4}\overline{C_1} = \overline{F} + 2\ell\Delta_1,$$

$$-\frac{140}{4}\overline{C_1} = \overline{G} + 15\ell\Delta_1.$$

が成り立つ。ただし、 Δ_1 の係数は $\mathfrak{o}_K$ の $\mathfrak{o}_K$ の
cusp form の定義式から直接求まる。 $\overline{F} \cap \overline{G}$ は幾何
的に非常にわかり易いものがある。何故なら
 $\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}$, $\tau_1 \in G_2, \tau_2 \in G_1$ という点の集合の G_3/p への
image の $\widetilde{G_3/p}$ での閉包は、 $\widetilde{G_2/p'} \times \widetilde{G_1/p''}$ になる
ことがわかる。ただし、 $p'' = p_1(\ell)$ 。従って、
 $D_1, D_2 \subset \widetilde{G_3/p} - G_3/p$ を irreducible な divisor とする時、
 $\overline{F} \cdot \overline{G} \cdot D_1^4 = \overline{F} \cdot \overline{G} \cdot D_1^2 \cdot D_2^2 = 0$ 等が容易にわかる。

$$\overline{F} \cdot \overline{G} \cdot D_1^4 = \left(-\frac{18}{4}\overline{C_1} - 2\ell\Delta_1\right) \cdot \left(-\frac{140}{4}\overline{C_1} - 15\ell\Delta_1\right) \cdot D_1^4 = 0$$

$$\overline{F} \cdot \overline{G} \cdot D_1^2 \cdot D_2^2 = \left(-\frac{18}{4}\overline{C_1} - 2\ell\Delta_1\right) \cdot \left(-\frac{140}{4}\overline{C_1} - 15\ell\Delta_1\right) \cdot D_1^2 \cdot D_2^2 = 0$$

等の関係式が導かれる。

以上にして、必要な関係式は全て求まる
ので、これらを解くことにより交点数が全
て求まるものがあるが、これを解くところ
は一部に一部の交点数が、分数になる
可能性がある。現在このあたりが検討中である。

16.

References

- [1] Ash,A. et al. : Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties. Math.Sci.Press,(1975)
- [2] Deligne,P. : Theorie de Hodge II. Publ.Math.IHES,40,5-58,(1973)
- [3] Igusa,J. : A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions. Math.Ann.168,228-260,(1967)
- [4] Igusa,J. : Modular forms and projective invariants. Amer.J.Math. 89,817-855,(1967)
- [5] Kempf,G. et al. : Toroidal Embeddings I. Springer Lect.Notes 339 (1973)
- [6] Morita,Y. : An explicit formular for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two. J.Fac.Sci.Univ.Tokyo
- [7] Mumford,D. : Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case. Invent.Math.42,239-272,(1977)
- [8] Nakamura,I. : On moduli of stable quasi-abelian varieties. Nagoya Math.J.58,149-214,(1975)
- [9] Namikawa,Y. : A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties. I,II. Math.Ann.221,97-141,201-241,(1976)
- [10] Yamazaki,T. : On Siegel modular forms of degree two. Amer.J.Math. 98,39-53,(1973)
- [11] Mumford,D. : Pathologies III. Amer.J.Math.89,94-104,(1967)