

音響共鳴管内の音響流とエネルギー流

北海道大学・大学院工学研究科 矢野 猛 (Takeru Yano)*
Graduate School of Engineering,
Hokkaido University

1 はじめに

音による質量・運動量・エネルギー輸送は、それ自体が非線形現象であって大振幅の音波の伝播過程に顕著に現れる。その質量輸送は音響流 (acoustic streaming) として古くから知られており、運動量輸送は音響放射圧 (acoustic radiation pressure) による音響浮揚 (acoustic levitation) などの応用例がある。また、音によるエネルギー輸送は、近年注目されている熱音響 (thermoacoustic) デバイスにおいて重要な役割を果たしている。

このように古くから知られ、そしてさまざまな応用例がある音の非線形現象であるが、その全貌はもちろんのこと、すでに応用例がある個別の現象の詳細さえも、いまだ十分な理解は得られていない。本稿では、音響共鳴管内の質量流とエネルギー流の基本原則 [1,2] を明示した上で、音による質量・運動量・エネルギー輸送の理解に立ちふさがる困難について述べる。

2 音響流とエネルギー流

音の媒質は理想気体であるとする。また、粘性と熱伝導性による散逸効果は、とくに断りのない限り無視できるほど小さいとする。

気体の密度を ρ^* 、圧力を p^* 、速度を u_i^* とし、音の無次元振幅 (速度の振幅の音速に対する比) を ϵ で表す。ただし、 $\epsilon \ll 1$ である。音が存在していない静止一様状態を基準状態として下付き添え字 0 で示せば、音の存在による気体の密度、圧力、速度の変動は、 ϵ のべき級数展開を用いて

$$\rho^*/\rho_0 = 1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \cdots, \quad (1)$$

$$p^*/(\rho_0 c_0^2) = 1/\gamma + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \cdots \quad (2)$$

$$u_i^*/c_0 = \epsilon u_{1i} + \epsilon^2 u_{2i} + \cdots \quad (3)$$

*2008 年 1 月より大阪大学大学院工学研究科機械工学専攻に勤務

と表される。ここで、 c_0 は基準状態における音速、 γ は理想気体の比熱比である。式(3)より、 ϵ が気体の速度の Mach 数のオーダーであることがわかるだろう。

これらを質量保存則に代入し、 ϵ のべきごとに整理すれば

$$O(\epsilon): \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

$$O(\epsilon^2): \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_{2i} + \rho_1 u_{1i}) = 0 \quad (5)$$

を得る。

連続発振される音波を考えれば、 ρ_1 と ρ_2 を時間の周期関数とみなすことができるから、式(5)を音波の周期で時間平均することにより

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_{2i} + \rho_1 u_{1i}}) = 0 \quad (6)$$

が導かれる。すなわち、 ϵ の 2 次の近似の範囲内で、無次元化された平均質量流束密度 $\overline{u_{2i} + \rho_1 u_{1i}}$ は非圧縮流れとしてふるまう。これが音響流として実験で観測されるものである。速度の次元をもつ有次元量を用いれば、音響流とは

$$\frac{\overline{\rho^* u_i^*}}{\rho_0} \quad (7)$$

によって定義される。

音波の無次元振幅 ϵ は通常、1 に比べて十分に小さいので、その 2 次の量である音響流の速度はさらに小さい。しかしながら、基準状態が静止状態であるときには線形音波の時間平均場も静止状態であるので、ゼロでない音響流が存在するならば、それは時間平均場に定性的な違いをもたらすという意味で重要となり得る。

なお、一般に、平面波や球面波のような“平行性 (collimation)” の高い音でなければ、(6) を満たすゼロでない質量流束が存在する。また、音の吸収あるいは境界層や衝撃波などの音のエネルギー散逸が顕著な場合には、平面波であっても音響流は発生する。

気体の全エネルギー (運動エネルギーと内部エネルギーの和) を E^* で表し、これを $\rho_0 c_0^2$ で無次元化した後、 ϵ のべき級数に展開すると

$$\begin{aligned} E^*/(\rho_0 c_0^2) &= \frac{1}{2}(\rho^*/\rho_0)(u_i^*/c_0)^2 + (\rho^*/\rho_0)c_v T^*/c_0^2 \\ &= \epsilon^2 \frac{1}{2} u_{1i}^2 + 1/\gamma(\gamma-1) + \epsilon p_1/(\gamma-1) + \epsilon^2 p_2/(\gamma-1) + \dots \\ &= \epsilon^2 \frac{1}{2} u_{1i}^2 + 1/\gamma(\gamma-1) + \epsilon p_1/(\gamma-1) + \epsilon^2 p_2/(\gamma-1) + \epsilon^2 \frac{1}{2} \rho_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

と書ける。ただし、2 行目から 3 行目にいたる式変形では、ここで示された近似の範囲内で有効な圧力と密度の断熱関係式を利用している。これと式(1)–(3)を理想流

体のエネルギー保存則に代入し、 ϵ のべきごとに整理すれば

$$O(\epsilon) : \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_1}{\gamma-1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{1i}}{\gamma-1} \right) = 0 \quad (9)$$

$$O(\epsilon^2) : \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_{1i}^2}{2} + \frac{\rho_1^2}{2} + \frac{\rho_2}{\gamma-1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma p_1 u_{1i} + u_{2i}}{\gamma-1} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_{1i}^2}{2} + \frac{\rho_1^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (p_1 u_1) = 0 \quad (11)$$

が得られる。線形近似の断熱関係式 $p_1 = p_1$ を考慮すると、式(4)と式(9)は等しい。これと線形化された運動方程式

$$\frac{\partial u_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x_i} = 0$$

を組み合わせれば、密度 ρ_1 と圧力 p_1 のいずれに対しても同等の線形波動方程式が導かれる。速度も、渦なしの制限を加えれば、同等の線形波動方程式に従う。あるいは、速度場をスカラーポテンシャル場(渦なし)とベクトルポテンシャル場(渦あり)に分解したとき、スカラーポテンシャル場の成分が波動方程式に従うと言ってもよい。ベクトルポテンシャル場の成分は、ここで展開される理論の枠組みでは、 $O(\epsilon)$ の近似の範囲内で静止する。

エネルギー保存則の展開(11)において、

$$\frac{1}{2}(u_1^2 + \rho_1^2) \quad (12)$$

を無次元化された音響エネルギー密度といい、

$$\overline{p_1 u_1} \quad (13)$$

を音響強度 (acoustic intensity) という。音響強度は音によるエネルギー輸送の時間平均である。

3 平面波の場合

非線形の平面進行波は、初期に正弦波形であっても、伝播にともなって非線形効果による波形ひずみが生じ、かならず衝撃波が形成される。とくに、任意の振幅の非線形平面進行波に対して、衝撃波形成前の厳密解を利用して、質量・運動量・エネルギー流の時間平均の厳密な解析的表現が得られているが[3]、それによると

$$\overline{\rho^* u_i^*} = 0 \quad (14)$$

である。衝撃波形成後[4]は、強非線形問題($\epsilon = O(1)$)は数値解析によって、弱非線形問題($\epsilon \ll 1$)は漸近展開によって、音響流が生じることが示されている。

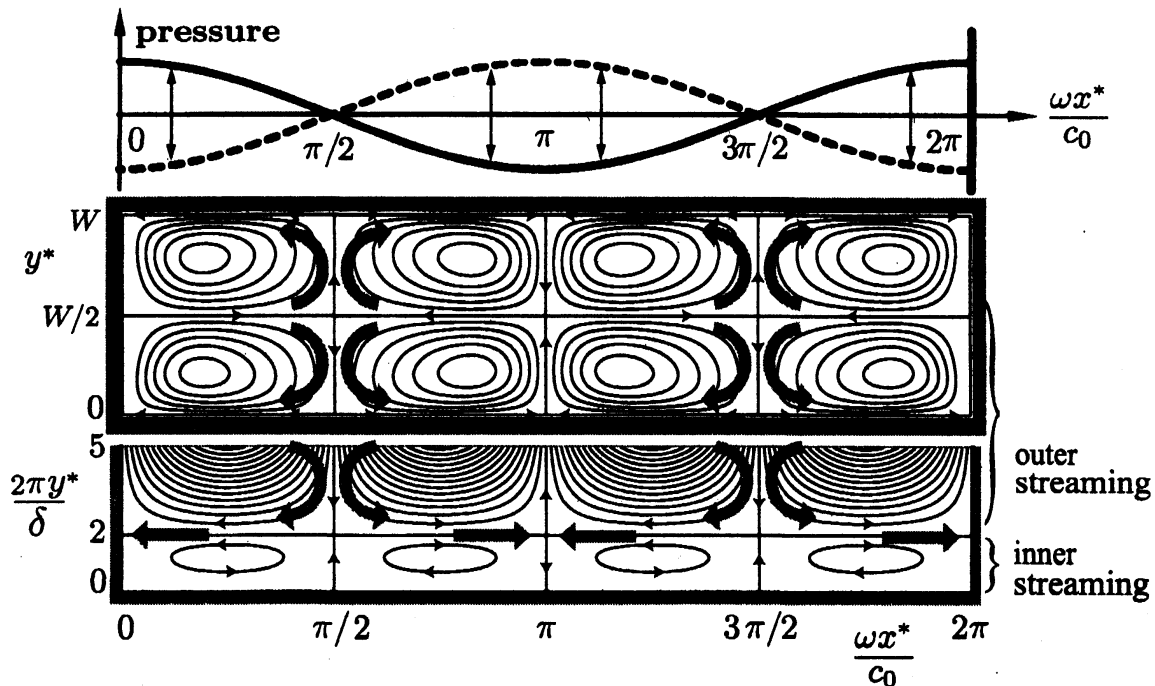


図 1: 定在波と Rayleigh 型音響流の概念図. 1 番上の図は第 2 モードの平面定在波の圧力分布, 2 番目の図は境界層外部に誘起される Rayleigh 型音響流の流線, 3 番目の図は境界層内部の 2 次流れの流線 (δ は振動境界層の厚さ).

進行波ではなく定在波である場合は, 少なくとも弱非線形であれば音響流は発生せず, また音響強度もゼロとなる. 単なる定在波ではなく, 共鳴によって音波が大振幅となって衝撃波をともなう場合に, 質量流とエネルギー流がどのようにふるまうかを以下で述べる.

4 共鳴管内の音響流とエネルギー流

図 1 に, 幅 W , 長さ L の管内に管の長手方向に第 2 モードの共鳴が生じる場合を模式的に示す. 音の振幅が, 衝撃波が発生しないほど小さければ, 図に示したように, 境界層内部の定常 2 次流れによって, その外側に Rayleigh 型の定常な音響流が駆動される. この場合, 境界層外部では ρ_1 と u_1 は線形平面定在波であり, $\overline{\rho_1 u_1} = \overline{p_1 u_1} = 0$ となる. すなわち, 音響強度はゼロであり, 音響流は $\overline{u_2}$ そのものである.

今, $x^* = 0$ に音源があつて第 2 モードの共鳴振動数で正弦振動しているとする. すなわち, 管壁の $x^* = 0$ かつ $0 \leq y^* \leq W$ の部分が角振動数 $\omega = 2\pi c_0/L$ で正弦振動しているとする. 管壁の振動の振幅を a とすると, 振動速度の Mach 数 M は $M = a\omega/c_0$ で与えられる. この Mach 数 M が 1 に比べて小さくても ($M \ll 1$), 境

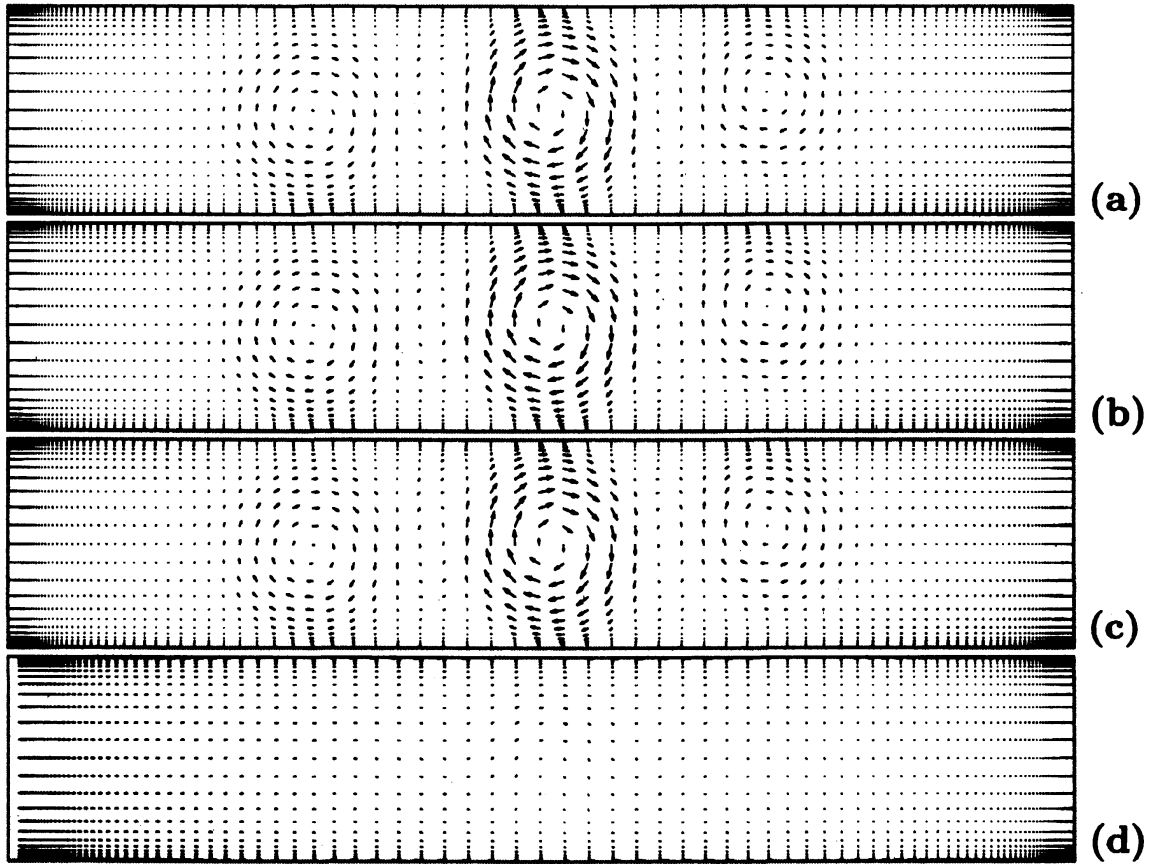


図 2: 衝撃波形成時の音響流とエネルギー流. (a): 音響流, (b): 全エネルギー流, (c): 平均速度, (d): 一般化された音響強度.

界面厚さ δ がさらに小さく, $\omega\delta/c_0 \ll M$ である場合には, 音の無次元振幅は共鳴によって大振幅となり衝撃波が形成される. 衝撃波面によるエネルギー散逸によって振幅の増大は頭打ちとなり, 無次元振幅 $O(\sqrt{M})$ の準定常的な振動状態に至る [5].

この振動状態を, 衝撃波を含めて記述する第 1 近似解は Chester [6] によって得られているが, 音響流とエネルギー流のふるまいを記述するためには, 境界層内部も含めた第 2 近似解が必要となる. しかしながら, そのような理論解析はいまだなされておらず, ここでは数値解析の結果を示す. 数値計算法は文献 [5] と同じである.

図 2 に, $M = 0.001$, $\delta\omega/c_0 = 10^{-5}$, $L/W = 5$ の場合に, 音源が振動を開始してから 2620 周期目の音響流と時間平均されたエネルギー流を示す. 図 2(a) は無次元音響流 $\overline{p^* u_i^*}/\rho_0 c_0$, 図 2(b) は無次元全エネルギー流 $\overline{(E^* + p^*) u_i^*}/\rho_0 c_0^3$, 図 2(c) は無次元平均速度 $\overline{u_i^*}/c_0$, 図 2(d) は $\overline{(p^* - p_0) u_i^*}/\rho_0 c_0^3$ の, それぞれ, ベクトル分布を示している. とくに図 2(d) は, 一般化された音響強度とみなすことができることを注意しておく. 図では示さないが [5], 衝撃波形成後の波動場は Chester の第 1 近似解と定性的な差はない.

まず、図 2(a) の音響流であるが、図 1 に示したような、Rayleigh 型の音響流のもつ上下対称性と第 2 モードゆえの左右で 2 組の渦対構造という 2 つの特徴を失っている。また、音の周期に比べてゆっくりと変化する。図 2(a) と図 2(b)(c) を比較すると、明らかに、これら 3 つの図は酷似している。このことは、共鳴管内に衝撃波が発生し、音響流の速度分布が Rayleigh 型とはまったく異なる状況になっても、定在波の場合と同様に、音響流の主成分は時間平均速度であることを意味している。さらに、図 2(d) からわかるように、一般化された音響強度が音響流よりもずっと小さいことも、定在波の場合と同じである。なお、一般化された音響強度ベクトルは、図では判別しづらいが、概ね右から左へ向いており、音源から管内に運び込まれたエネルギーが管端へ伝えられている様子を表している。

5 おわりに

共鳴管内に衝撃波が形成される場合、そこに現れる音響流とエネルギー流の分布を数値計算によって明らかにし、定在波から予測される結果との類似点と相違点を示した。この事実は、波動場自体が Chester の第 1 近似解と定性的な差がないことと整合する。よって、本質的な問題点は、音響流のパターンがなぜ Rayleigh 型から大きく異なるのかという点に集約されることになる。しかし、熱音響問題のように管壁にそって温度分布の勾配が存在する場合には、エネルギー流がより本質的となるであろう。いずれの場合も、完全な理解にはさらに詳細な検討が必要である。

参考文献

- (1) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* 2nd Edition, Pergamon Press, New York, 1987.
- (2) A. D. Pierce, *Acoustics*, Acoustical Society of America, New York, 1989.
- (3) T. Yano, "The mean pressure and density in a strongly nonlinear plane acoustic wave," *J. Acoust. Soc. Am.*, **100**, 666–668 (1996).
- (4) T. Yano and Y. Inoue, "Quasisteady streaming with rarefaction effect induced by asymmetric sawtooth-like plane waves," *Phys. Fluids*, **9**, 2537–2551 (1996).
- (5) T. Yano, "Numerical study of high Reynolds number acoustic streaming in resonators," in *Innovations in Nonlinear Acoustics*, AIP Conference Proceedings **838**, pp.379–386 (2006).
- (6) W. Chester, "Resonant oscillations in closed tube," *J. Fluid Mech.* **18**, 44–65 (1965).