

Separability cone and its dual cone

北海道大学（名誉教授） 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

Hokkaido University (Emeritus)

Email: ando@es.hokudai.ac.jp

1. Introduction. この講演は解説的な性質のものである. M_k は $k \times k$ 複素行列の空間とする. これは自然な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で Hilbert 空間になる. その norm を $\|\cdot\|_2$ で表す. M_k の positive semi-definite matrix の なす cone を M_k^+ で表す.

この講演の主題は tensor 積 $M_m \otimes M_n$ であるが, 簡単のため $m = n$ の場合のみを考察することとする.

$M_n \otimes M_n$ には幾つかの自然な同一視がある: $A = [\alpha_{j,k}], B = [\beta_{j,k}] \in M_n$ に対して

$$\begin{aligned} M_n \otimes M_n &\sim M_n(M_n) \sim M_{n^2} \\ A \otimes B &\sim [\alpha_{j,k} B]_{j,k} \sim [\alpha_{j,k} \beta_{p,q}]_{j,p;k,q}. \end{aligned}$$

ここで $M_n(M_n)$ は $n \times n$ matrix を entry にもつ $n \times n$ block-matrix の空間である.

重要なのは, この同一視の下で $A, B \in M_n^+ \implies A \otimes B \in M_{n^2}^+$ なる事実である. この事実の下に 3 つの cone を $M_n \otimes M_n$ に導入しよう.

$$\mathfrak{P}_0 := M_{n^2}^+, \quad \mathfrak{P}_+ := \text{Conv}(M_n^+ \otimes M_n^+), \quad \mathfrak{P}_- := \text{dual cone of } \mathfrak{P}_+.$$

すなわち $T \in \mathfrak{P}_- \stackrel{\text{def}}{\iff} T = T^*, \langle T | S \rangle \geq 0 \quad \forall S \in \mathfrak{P}_+.$

明らかに

$$\mathfrak{P}_+ \subset \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_-$$

であり, $\mathfrak{P}_+$ は $\mathfrak{P}_-$ の dual cone になり, $\mathfrak{P}_0$ は selfdual である.

Matrix $T \in \mathfrak{P}_0$ が $\mathfrak{P}_+$ に属するとき T は *separable* であると言い, そうでないときは *entangled* と言われる. すなわち T が separable とは

$$T = \sum_p A_p \otimes B_p \quad \exists A_p, B_p \in M_n^+$$

のことである. $\mathfrak{P}_+$ を *separability cone* と呼ぼう.

M_n の linear map の空間 $\mathfrak{L}(M_n)$ も以下の対応で $M_n(M_n)$ と同一視される:

$$\mathfrak{L}(M_n) \ni \Phi \sim C_\Phi := [\Phi(E_{j,k})]_{j,k} \in M_n(M_n).$$

ここで $E_{j,k}$ ($j, k = 1, 2, \dots, n$) は M_n の *matrix unit* である. すなわち $\mathbb{C}^n$ の canonical O.N. 系 e_j ($j = 1, 2, \dots, n$) を使って $E_{j,k} = e_j e_k^*$ と書かれる. ここで注意するのは, vector $x, y \in \mathbb{C}^n$ は column vector として扱う. したがって $\langle y | x \rangle = y^* x$ であるが, xy^* は

$\mathbb{M}_n$ の元である. この同一視の下での $\mathfrak{L}(\mathbb{M}_n)$ の norm は Hilbert-Schmidt norm になる. この block-matrix $\mathbf{C}_\Phi$ を linear map Φ の *Choi matrix* と呼ぶ.

Linear map Φ の *positivity* は $\Phi(\mathbb{M}_n^+) \subset \mathbb{M}_n^+$ で定義される最も familiar なものである. Φ の *completely positivity* はよく知られた概念である. 更に Φ が *super-positive* とは

$$\Phi(X) = \sum_p \langle A_p | X \rangle \cdot B_p \quad \exists A_p, B_p \in \mathbb{M}_n^+$$

の事とする. これら 3 つの positivity と上に導入した 3 つの cone の間には, Choi matrix を介して, 以下のような対応がある:

$$\begin{aligned} \Phi \text{ super-positive} &\iff \mathbf{C}_\Phi \in \mathfrak{P}_+, \\ \Phi \text{ completely positive} &\iff \mathbf{C}_\Phi \in \mathfrak{P}_0, \\ \Phi \text{ positive} &\iff \mathbf{C}_\Phi \in \mathfrak{P}_-. \end{aligned}$$

ここで completely positive と cone $\mathfrak{P}_0$ の対応は本当は深い結果で Choi [1] による.

$\mathbf{E} := [E_{j,k}]_{j,k}$ および $\mathbf{I} := I_n \otimes I_n$ (identity matrix) と書くと, $\mathbf{E}$ は identity map $X \mapsto X$ の Choi matrix であり, $\mathbf{I}$ は linear map $X \mapsto \text{Tr}(X) \cdot I_n$ の Choi matrix となっている. 明らかに $\mathbf{E} \in \mathfrak{P}_0$ で $\mathbf{I} \in \mathfrak{P}_+$ である.

Linear map Φ の positivity は明快な概念なのに, cone $\mathfrak{P}_-$ は漠然とした印象しか与えない. 以下では $\mathfrak{P}_-$ に注視して行く. 2 つの linear map の composition に関する次ぎの Lemma は trivial なものであるが, 使い方によっては役に立つ.

Lemma 1.

- (i) Φ, Ψ positive $\implies \Psi \circ \Phi$ positive.
- (ii) Φ super-positive, Ψ positive $\implies \Psi \circ \Phi, \Phi \circ \Psi$ super-positive.

Linear map の super-positivity の判定は一般に困難であるが, 次が有用である.

Lemma 2. (Horodecki's [3]) Φ が positive のとき

$$\Phi \text{ super-positive} \iff \Psi \circ \Phi \text{ completely positive} \quad \forall \text{ positive } \Psi$$

これを使うと $\mathbf{I}$ の $\|\cdot\|_2 \leq 1$ の近傍にあるものがすべて separable であることが判る:

Theorem 3. (L. Gurvits and H. Harnum [2]) $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*, \|\mathbf{T}\|_2 \leq 1 \implies \mathbf{I} + \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_+.$

§2. Properties of the cone $\mathfrak{P}_-$. $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$ なものが $\mathfrak{P}_0$ に属するかどうかは eigenvalue だけで決まってしまうが, $\mathfrak{P}_-$ に属するものの特性は余り明らかでない. 次ぎは Theorem 3 の dual form である.

Theorem 4. $\mathbf{T} \in \mathfrak{P}_- \implies \text{Tr}(\mathbf{T}) \geq \|\mathbf{T}\|_2.$

Ortho-projection $\mathbf{P}$ に対して $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}_+$ であることと $\mathbf{P}^\perp := \mathbf{I} - \mathbf{P} \in \mathfrak{P}_+$ であることは同値ではない. しかし Theorem 3 から次ぎ出る.

Theorem 5. Ortho-projection $\mathbf{P}$, $\text{rank}(\mathbf{P}) = 1 \implies \mathbf{P}^\perp \in \mathfrak{P}_+$.

$\mathbb{M}_n$ での transposition map $X \mapsto X^T$ は明らかに positive である. Linear map $\Phi \in \mathfrak{L}(\mathbb{M}_n)$ の Choi matrix が $\mathbf{T} = [T_{j,k}]_{j,k}$ であるとき, linear map $X \mapsto \Phi(X^T)$ の Choi matrix は $[T_{k,j}]_{j,k}$ すなわち (j,k) -block-entry を (k,j) -block-entry に入れ替えたものになる. $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n)$ でのこの対応を $\mathbf{T}^r$ と書き *partial transpose* と呼ぼう. $(A \otimes B)^r = A^T \otimes B$ であるから, $\mathfrak{P}_+^r \subset \mathfrak{P}_+$ およびその dual として $\mathfrak{P}_- \subset \mathfrak{P}_-^r$ となるが, $\mathfrak{P}_0^r \not\subset \mathfrak{P}_0$ である. たとえば $\mathbf{E} \in \mathfrak{P}_0$ であるが, $\mathbf{E}^r \notin \mathfrak{P}_0$ である.

$\mathbf{I}$ と $\mathbf{E}$ に関連する matrix の eigenvalue を調べてみよう:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \in \mathfrak{P}_0 & \quad \sigma(\mathbf{E}) = \{n, \overbrace{0, \dots, 0}^{n^2-1}\}, \\ \mathbf{E}^r \in \mathfrak{P}_- & \quad \sigma(\mathbf{E}^r) = \{\overbrace{1, \dots, 1}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{\frac{n(n-1)}{2}}\}, \\ \mathbf{I} - \mathbf{E} \in \mathfrak{P}_- & \quad \sigma(\mathbf{I} - \mathbf{E}) = \{\overbrace{1, \dots, 1}^{n^2-1}, -(n-1)\}, \\ \mathbf{I} - \mathbf{E}^r \in \mathfrak{P}_0 & \quad \sigma(\mathbf{I} - \mathbf{E}^r) = \{\overbrace{2, \dots, 2}^{\frac{n(n-1)}{2}}, \overbrace{0, \dots, 0}^{\frac{n(n+1)}{2}}\}. \end{aligned}$$

具体的な matrix の separability に関しては Lemma 2 を利用することが出来ず, より深い考察が必要になる.

Theorem 6. (A.O. Pittinger and M.H. Rubin [4]) $\mathbf{I} + \mathbf{E} \in \mathfrak{P}_+$ で $\mathbf{I} - \mathbf{E} \in \mathfrak{P}_-$.

これを応用するために *partial trace map* $\varphi_i(\cdot)$ $i = 1, 2$ を考えよう. $\mathbb{M}_n \ni X \mapsto X \otimes I_n \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$ は positive linear map であるので, その adjoint map を $\varphi_1(\cdot)$ と書くと, これは $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$ から $\mathbb{M}_n$ への positive linear map になり

$$\langle X \otimes I_n | \mathbf{T} \rangle = \langle X | \varphi_1(\mathbf{T}) \rangle \quad \forall X \in \mathbb{M}_n, \mathbf{T} \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$$

で特徴付けられる. 同様に *partial trace map* $\varphi_2(\cdot)$ は

$$\langle I_n \otimes Y | \mathbf{T} \rangle = \langle Y | \varphi_2(\mathbf{T}) \rangle \quad \forall Y \in \mathbb{M}_n, \mathbf{T} \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$$

で特徴付けられる $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$ から $\mathbb{M}_n$ への positive linear map である.

$\mathbf{I} + \mathbf{E}$ は linear map $\Phi(X) := \text{Tr}(X) \cdot I_n + X$ の Choi matrix である. Theorem 6 によりこれは super-positive である. この Φ に Choi matrix が $\mathbf{T}$ である positive map $\Psi(\cdot)$ を左から compose すると, その Choi matrix は $\varphi_1(\mathbf{T}) \otimes I_n + \mathbf{T}$, また右から compose するとその Choi matrix は $\varphi_2(\mathbf{T}) \otimes I_n + \mathbf{T}$ となる. しががって Lemma 1 を使うと Theorem 6 から次ぎがでる.

Theorem 7.

$$\mathbf{T} \in \mathfrak{P}_- \implies \begin{cases} \varphi_1(\mathbf{T}) \otimes I_n + \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_+ & \text{and} & I_n \otimes \varphi_2(\mathbf{T}) \otimes I_n + \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_+, \\ \varphi_1(\mathbf{T}) \otimes I_n - \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_- & \text{and} & I_n \otimes \varphi_2(\mathbf{T}) \otimes I_n - \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_-. \end{cases}$$

Separability の定義から

$$T \in \mathfrak{P}_+ \implies \begin{cases} \varphi_1(T) \otimes I_n - T \in \mathfrak{P}_+, \\ I_n \otimes \varphi_2(T) - T \in \mathfrak{P}_+ \end{cases}$$

は明らかであるが, 一般には

$$T \in \mathfrak{P}_0 \not\implies \begin{cases} \varphi_1(T) \otimes I_n - T \in \mathfrak{P}_0, \\ I_n \otimes \varphi_2(T) - T \in \mathfrak{P}_0 \end{cases}$$

である. しかし

$$T \in \mathfrak{P}_0, T^T \in \mathfrak{P}_0 \implies \begin{cases} \varphi_1(T) \otimes I_n - T \in \mathfrak{P}_0, \\ I_n \otimes \varphi_2(T) - T \in \mathfrak{P}_0 \end{cases}$$

が判る.

§3. $\mathfrak{P}_+$ -best approximant. $T = T^* \in M_n \otimes M_n$ にたいして

$$\|S_0 - T\|_2 = \inf_{S \in \mathfrak{P}_0} \|S - T\|_2$$

となる $S_0 \in \mathfrak{P}_0$ は unique に定まる. 実際 $S_0 = T^+$ (positive part) であり

$$T = S_0 - (T - S_0)$$

は T の Jordan 分解となる. このとき S_0 は T の spectre 分解から直接得られる.

ここで cone $\mathfrak{P}_0$ を separability cone $\mathfrak{P}_+$ に変えたときも

$$\|S_0 - T\|_2 = \inf_{S \in \mathfrak{P}_+} \|S - T\|_2$$

となる $S_0 \in \mathfrak{P}_+$ が unique に定まる. これを T の $\mathfrak{P}_+$ -best approximant と呼ぶこととする. S_0 が T の $\mathfrak{P}_+$ -best approximant のときは T^T の $\mathfrak{P}_+$ -best approximant は S_0^T となることは明らかである.

Best approximation の一般論から次ぎが知られる.

Lemma 8. S_0 が T の $\mathfrak{P}_+$ -best approximant となる必要充分条件は

$$S_0 - T \in \mathfrak{P}_- \quad \text{and} \quad \langle S_0 - T | S_0 \rangle = 0.$$

T の $\mathfrak{P}_+$ -best approximant を実際に決定することは困難であるが, Theorem 6 と Lemma 8 を使うと次ぎが知られる.

Theorem 9.

- (i) E の $\mathfrak{P}_+$ -best approximant は $\frac{1}{2}(I + E)$ である.
- (ii) $I - E$ の $\mathfrak{P}_+$ -best approximant は $I - \frac{1}{n}E$ である.

参考文献

- [1] M.D. Choi, *Completely positive linear maps on complex matrices*, Linear Alg. Appl., 10(1975), 285–290.
- [2] L. Gurvits and H. Barnum, *Largest separable ball around the maximally mixed bipartite quantum system*, arXiv:quant-ph/021159v2, 10 Dec. 2002.
- [3] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, *Separability of mixed states; necessary and sufficient conditions*, Phys. Letter A223 (1996), no. 1-2, 1–8.
- [4] A.O. Pittinger and M.H. Rubin, *Note on separability of the Werner states in arbitrary dimensions*, Optics Comm., 179(200), 447–449.