

二項型の多項式列に付随するシューア型函数

伊藤稔 (MINORU ITOH)

鹿児島大学理学部数理情報科学科

itoh@sci.kagoshima-u.ac.jp

序論. 二項型の多項式列に付随したシューア型函数について考察する. 通常のシューア函数は

$$\det(x_j^{\lambda_i+N-i})/\det(x_j^{N-i})$$

という行列式の商として定義されるが, 本稿では各成分の冪を二項型多項式列 $\{p_i(x)\}_{i \geq 0}$ で置き換えた次のような函数を考える:

$$\det(p_{\lambda_i+N-i}(x_j))/\det(p_{N-i}(x_j)).$$

このような一般化でも多くの展開公式が成立することを報告したい.

この一般化は[OO]などで扱われている shifted Schur function を本質的に含む. 実際, $p_i(x)$ として階乗冪 (下降冪) を考えてさらに $x_i = y_i + N - i$ と変数変換したものが shifted Schur function である. この shifted Schur function はカペリ元など一般線型リー環の普遍包絡環の中心元の固有値を表示するのに役立つ (8.1 節). そこで本稿では直交リー環, シンプレクティック リー環に対しても同様の役割を果たすシューア型の函数を考えたい. 結論を言えば, これは中心差分と相性の良い一種の階乗冪 (これも二項型の多項式列をなす) に付随するシューア型函数として得られる (8.3 節). このような具体例を含む自然な一般論として二項型の多項式列に付随するシューア型函数を提案したい.

通常のシューア型函数の定義における冪の部分を他の多項式列に拡張するという試みは既にいろいろ行われている ([Ma2] など, さらに一般化も考えられている). よく知

られた例としては, 次のような多項式列への拡張がある[Ma1].

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k).$$

ここで a_k は適当な数列である. この一般化は通常の階乗冪の場合 (つまり本質的に shifted Schur function) を含む. しかしこの一般化では直交リー環, シンプレクティック リー環の普遍包絡環の中心元は取り扱いにくい. 本稿ではいろいろな展開式が成り立ち, しかも面白い例を含む別方向の一般化を考えたい.

1. 二項型の多項式列. まず二項型の多項式列について復習する.

1.1. 二項型の多項式列の定義を復習しよう. 二項展開

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

と同様の展開式を持つ多項式はいろいろ知られている. 例えば上昇冪

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1)$$

や下降冪

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

などの階乗冪についても二項展開とほぼ同じ次の等式が成立する:

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}, \quad (x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}.$$

このような多項式列を二項型と呼ぶ. つまり

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y)$$

という関係式を満たすとき多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ は二項型であるという (ただし $p_n(x)$ は n 次式とする). 多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ が二項型であれば, $p_n(0) = \delta_{n,0}$ となることはすぐにわかる (すなわち $n \geq 1$ のとき $p_n(x)$ の定数項はゼロになる).

通常の冪の列 $\{x^n\}$, 上昇冪の列 $\{x^{\overline{n}}\}$, 下降冪の列 $\{x^{\underline{n}}\}$ は二項型の多項式列の典型例である.

1.2. このような二項型の多項式列に対して, デルタ作用素という作用素が自然に対応する. 例えば通常の冪に対しては微分 $D = \frac{d}{dx}$ という作用素を考えると, これは $Dx^n = nx^{n-1}$ という関係を満たす. 上昇冪, 下降冪に対してもそれぞれ後退差分 Δ^- , 前進差分 Δ^+ を考えると同様の関係式が成り立つ:

$$\Delta^- x^{\overline{n}} = nx^{\overline{n-1}}, \quad \Delta^+ x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}}.$$

このような微分, 差分を一般化したのがデルタ作用素である. すなわち一般の二項型の多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ に対して

$$Qp_n(x) = np_{n-1}(x)$$

を満たす線型作用素 $Q = Q_x: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ を考える ($\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ は $\mathbb{C}[x]$ の基底だからこの線型作用素は一意に決まる). この Q は次の二つの性質を満たす:

- (1) n 次式を $n-1$ 次式に移す (定数関数は 0 に移す).
- (2) 平行移動作用素 $E^a: f(x) \mapsto f(x+a)$ と可換である.

一般にこの二つの性質を満たす線型作用素をデルタ作用素という. (1) では n 次式をちょうど $n-1$ 次式に移すことを要求している. よってたとえば D^2 はデルタ作用素ではない (n 次式を $n-2$ 次式に移してしまうため).

二項型の多項式列に対しデルタ作用素がひとつ自然に決まるわけだが, 逆も成り立つ. つまり任意のデルタ作用素 Q に対し

$$Qp_n(x) = np_{n-1}(x), \quad p_n(0) = \delta_{n,0}$$

という条件を満たす多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ が一意的に定まり, これもやはり二項型になる. このようにすべての二項型の多項式列とすべてのデルタ作用素は自然に 1 対 1 に対応する:

すべての二項型の多項式列の集合 $\xleftrightarrow{1:1}$ すべてのデルタ作用素の集合.

注意. (1) 任意のデルタ作用素は次のように表される (ただし $a_i \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$ とする):

$$Q = a_1 D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + \cdots$$

よってデルタ作用素は自然に $\mathbb{C}((x^{-1})) = \{\sum_{-\infty < k \leq n} c_k x^k \mid n \in \mathbb{Z}, c_k \in \mathbb{C}\}$ という形式的冪級数環への作用素と見なすことができる（すぐ後で二項型の多項式列をこの枠組みに拡張する）。

(2) デルタ作用素 Q を $Q = f(D)$ というように微分 D の冪級数で表したとき、これに付随する二項型の多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ の母関数は次のように表される:

$$e^{x\bar{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{k!} t^k.$$

ただし $\bar{f}(t)$ は冪級数 $f(t)$ の合成に関する逆元である。つまり次をみたす冪級数である:

$$f(\bar{f}(t)) = \bar{f}(f(t)) = t.$$

1.3. 二項型の多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ に対して、もうひとつ面白い性質を持った多項式列が自然に定まる。 $n \geq 0$ のとき $p_{n+1}(x)$ の定数項は 0 であるから、 x で割ると n 次の多項式を得る:

$$p_n^*(x) = x^{-1} p_{n+1}(x).$$

この多項式 $p_n^*(x)$ は次の等式を満たす:

命題 1.1. 次の関係式が成立する (Q は $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ に付随するデルタ作用素とする):

$$Qp_n^*(x) = np_{n-1}^*(x),$$

$$p_n^*(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}^*(y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k^*(x) p_{n-k}(y).$$

これらの関係式に注意して p_n, p_n^* を $n < 0$ に拡張することができる (ただしこれらは $\mathbb{C}((x^{-1}))$ の元となる)。すなわち次が成立する:

命題 1.2. $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ を二項型の多項式列とする。これを拡張して最高次数が n であるような $p_n(x), p_n^*(x) \in \mathbb{C}((x^{-1}))$ の列 $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{p_n^*(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ で次の関係式を満たすものが一意に決まる:

$$Qp_n(x) = np_{n-1}(x), \quad Qp_n^*(x) = np_{n-1}^*(x), \quad p_n(x) = xp_{n-1}^*(x).$$

$$p_n(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

$$p_n^*(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}^*(y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_k^*(x) p_{n-k}(y).$$

n が負のときには (n が正のときとは違って) 最後の等号は単純に x と y を入れ替えるだけでは得られない.

以後これらの級数列 $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{p_n^*(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ がデルタ作用素 Q に付随することを強調するときには $p_n(x) = p_n^Q(x)$, $p_n^*(x) = p_n^{*Q}(x)$ と表す.

$p_n^*(x)$ は $p_n(x)$ の単なる裏方的存在ではない. 第2節以降で見るように, 両者のあいだにある種の双対性が見られるなど, むしろ $p_n^*(x)$ は $p_n(x)$ と対等な立場で活躍する.

1.4. 以下では二項型の多項式列, デルタ作用素を正規化して取り扱う. つまり次のように D の係数を1とした「正規」なデルタ作用素を考える:

$$Q = D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + \cdots.$$

言い換えると Q は平行移動演算子 E^a と可換で, さらに

$$Q: x^n + \text{低次の項} \mapsto nx^{n-1} + \text{低次の項}$$

をみたす線型作用素である. これに付随する $p_n(x)$, $p_n^*(x)$ はモニックな多項式になる. 逆にモニックな二項型の多項式列に付随するデルタ作用素は自動的に正規化される.

これらの正規化は「デルタ作用素をスカラー倍する」「 $x \mapsto cx$ と変数変換する」という操作に対応しており, 本質的な制限ではない.

1.5. 基本的な例を幾つか見ておこう.

例. (1) まず $Q = D = \frac{d}{dx}$ (つまり単なる微分) というもっとも単純な例を考えてみる. この場合は D に付随する多項式 $p_n^D(x)$, $p_n^{*D}(x)$ はどちらも単なる冪となる: $p_n^D(x) = p_n^{*D}(x) = x^n$. よって $p_n^D(x)$ と $p_n^{*D}(x)$ の展開式はどちらも通常の二項展開と一致する.

(2) 次に Q が前進差分 Δ^+ の場合を考えてみよう. すなわち

$$Qf(x) = \Delta^+ f(x) = f(x+1) - f(x)$$

の場合である。これに付随する多項式列は下降冪 x^n を用いて表される。ただし下降冪 x^n とは次のような多項式である:

$$x^n = \begin{cases} x(x-1)\cdots(x-n+1), & n > 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

さらに指数が負のときには $x^{-n} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ ($n > 0$) と定める。これを用いて $p_n^{\Delta^+}(x)$ と $p_n^{*\Delta^+}(x)$ は $p_n^{\Delta^+}(x) = x^n$, $p_n^{*\Delta^+}(x) = (x-1)^n$ と表すことができる。 $p_n^{*\Delta^+}(x)$ の展開は $p_n^{\Delta^+}(x)$ の展開を 1 ずらしたただけのもので両者に本質的な違いはない。

(3) Q が後退差分 Δ^- のときもほぼ同様である。 $Qf(x) = \Delta^- f(x) = f(x) - f(x-1)$ とすると、これに付随する多項式列は上昇冪 $x^{\bar{n}}$ を用いて表される。ただし上昇冪 $x^{\bar{n}}$ とは次のような多項式である:

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+1)\cdots(x+n-1), & n > 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

指数が負のときには $x^{-\bar{n}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$ ($n > 0$) と定める。これを用いて $p_n^{\Delta^-}(x)$ と $p_n^{*\Delta^-}(x)$ は $p_n^{\Delta^-}(x) = x^{\bar{n}}$, $p_n^{*\Delta^-}(x) = (x+1)^{\bar{n}}$ と表すことができる。

(4) 最後に Q が中心差分 Δ^0 のときを考えてみる。すなわち

$$Qf(x) = \Delta^0 f(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$$

という場合である。この場合には上昇冪と下降冪が合体したような次の函数を考えてみる:

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} (x + \frac{n-1}{2})(x + \frac{n-3}{2})\cdots(x - \frac{n-1}{2}), & n > 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

指数が負の場合には $x^{-\bar{n}} = (x^{\bar{n}})^{-1} = ((x + \frac{n-1}{2})(x + \frac{n-3}{2})\cdots(x - \frac{n-1}{2}))^{-1}$ ($n > 0$) と定める。これを用いて $p_n^{\Delta^0}(x)$ と $p_n^{*\Delta^0}(x)$ は $p_n^{\Delta^0}(x) = x \cdot x^{\bar{n}-1}$, $p_n^{*\Delta^0}(x) = x^{\bar{n}}$ と表される。 $x^{\bar{n}}$ 自体は二項型ではないことに注意する。

本稿の目的の一つである直交リー環, シンプレクティック リー環の普遍包絡環の中心元の固有値は, この $p_n^{\Delta^0}(x)$ と $p_n^{*\Delta^0}(x)$ に付随するシューア型多項式で表される (8.3 節)。

[MR], [S] を見ると他にもラゲール多項式, アーベル多項式など二項型多項式列のいろいろな例が載っている。

2. シューア型関数の定義. 本稿の主題である「二項型の多項式列に付随するシューア型関数」を定義しよう. 正規なデルタ作用素 Q とこれに付随する多項式 ($n < 0$ に対しては一般には級数) の列 $p_n(x) = p_n^Q(x)$ および $p_n^*(x) = p_n^{*Q}(x)$ を考える.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して次のような行列式を考える:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_\lambda(x_1, \dots, x_N) &= \tilde{s}_\lambda^Q(x_1, \dots, x_N) = \det \begin{pmatrix} p_{\lambda_1+N-1}(x_1) & \cdots & p_{\lambda_1+N-1}(x_N) \\ p_{\lambda_2+N-2}(x_1) & \cdots & p_{\lambda_2+N-2}(x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{\lambda_N+0}(x_1) & \cdots & p_{\lambda_N+0}(x_N) \end{pmatrix}, \\ \tilde{s}_\lambda^*(x_1, \dots, x_N) &= \tilde{s}_\lambda^{*Q}(x_1, \dots, x_N) = \det \begin{pmatrix} p_{\lambda_1+N-1}^*(x_1) & \cdots & p_{\lambda_1+N-1}^*(x_N) \\ p_{\lambda_2+N-2}^*(x_1) & \cdots & p_{\lambda_2+N-2}^*(x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{\lambda_N+0}^*(x_1) & \cdots & p_{\lambda_N+0}^*(x_N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

p_n, p_n^* がモニックな n 次式であることから, $\lambda = \emptyset = (0, \dots, 0)$ のときはこれらはどちらも行の基本変形で Vandermond 行列式に変形できる. つまり差積 $\Delta(x_1, \dots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$ に一致する:

$$\tilde{s}_\emptyset(x_1, \dots, x_N) = \tilde{s}_\emptyset^*(x_1, \dots, x_N) = \Delta(x_1, \dots, x_N).$$

これに注意して次の関数を考える:

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_1, \dots, x_N) &= s_\lambda^Q(x_1, \dots, x_N) = \tilde{s}_\lambda(x_1, \dots, x_N) / \tilde{s}_\emptyset(x_1, \dots, x_N), \\ s_\lambda^*(x_1, \dots, x_N) &= s_\lambda^{*Q}(x_1, \dots, x_N) = \tilde{s}_\lambda^*(x_1, \dots, x_N) / \tilde{s}_\emptyset^*(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

これらは通常のスーア関数の一般化となっている (実際 Q が微分 D に一致する場合である s_λ^D および s_λ^{*D} は通常のスーア関数である). s_λ と s_λ^* が対称式であり, またその最高次は通常のスーア関数に一致することも簡単にわかる. よって λ が深さが N 以下のすべての分割を動くときに $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ は対称多項式の空間の基底になる. 同様に $s_\lambda^*(x_1, \dots, x_N)$ も基底になる.

以下 λ が分割の場合, つまり $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ の場合にはヤング図形と分割を同一視する. また次の略記法も用いる:

$$(a_1^{m_1}, \dots, a_n^{m_n}) = (\overbrace{a_1, \dots, a_1}^{m_1 \text{ 個}}, \dots, \overbrace{a_n, \dots, a_n}^{m_n \text{ 個}}, 0, \dots, 0).$$

s_λ, s_λ^* の特別な場合として基本対称式, 完全斉次対称式の一般化も考えられる:

$$\begin{aligned} e_k(x_1, \dots, x_N) &= e_k^Q(x_1, \dots, x_N) = s_{(1^k)}(x_1, \dots, x_N), \\ e_k^*(x_1, \dots, x_N) &= e_k^{*Q}(x_1, \dots, x_N) = s_{(1^k)}^*(x_1, \dots, x_N), \\ h_k(x_1, \dots, x_N) &= h_k^Q(x_1, \dots, x_N) = s_{(k)}(x_1, \dots, x_N), \\ h_k^*(x_1, \dots, x_N) &= h_k^{*Q}(x_1, \dots, x_N) = s_{(k)}^*(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

e_k と e_k^* は $0 \leq k \leq N$ の場合にしか定義できないが, h_k と h_k^* は任意の整数 k に対し定義可能である (ただし $-N+1 \leq k \leq -1$ に対しては $h_k(x_1, \dots, x_N) = h_k^*(x_1, \dots, x_N) = 0$ となる). これらは一般に通常の基本対称式, 完全斉次対称式とは一致しないが, 特定の k については次の関係が成立する:

命題 2.1. 次の等式が成立する (すなわち e_N と h_{-N}^* は Q によらない):

$$e_N(x_1, \dots, x_N) = x_1 \cdots x_N, \quad h_{-N}^*(x_1, \dots, x_N) = (-1)^{N-1} \frac{1}{x_1 \cdots x_N}.$$

これはより一般的な次の等式からわかる:

命題 2.2. 次の関係式が成立する:

$$s_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}(x_1, \dots, x_N) = s_{(\lambda_1-1, \dots, \lambda_N-1)}^*(x_1, \dots, x_N) \times x_1 \cdots x_N.$$

s_λ と s_λ^* の間には次のような関係も成立する:

命題 2.3. $\lambda_i \geq 0$ のとき, 次が成立する:

$$s_\lambda^*(x_1, \dots, x_N) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N, 0).$$

注意. 一般に λ_i に負の整数も許したとき s_λ^D および s_λ^{*D} は $\mathbb{C}((x_1^{-1}))((x_2^{-1})) \cdots ((x_N^{-1}))$ という形式的冪級数のなす体の元と見なせる. これから様々な展開式を扱うが, いずれも同様の形式的冪級数環における等式と見なせる.

3. シューア型関数の展開. 前節で定義したシューア型の関数は次の展開式を持つ. これは s_λ, s_λ^* の定義からの直接的な計算で証明できる.

定理 3.1. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_1 + u, \dots, x_N + u) &= \sum_{\mu \subseteq \lambda} d_{\lambda\mu}(u) s_\mu(x_1, \dots, x_N), \\ s_\lambda^*(x_1 + u, \dots, x_N + u) &= \sum_{\mu \subseteq \lambda} d_{\lambda\mu}(u) s_\mu^*(x_1, \dots, x_N), \\ s_\lambda^*(x_1 + u, \dots, x_N + u) &= \sum_{\mu \subseteq \lambda} d_{\lambda\mu}^*(u) s_\mu(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

ただし $d_{\lambda\mu}(u), d_{\lambda\mu}^*(u)$ は次のように定める:

$$\begin{aligned} d_{\lambda\mu}(u) &= \det \left(\binom{\lambda_i + N - i}{\mu_j + N - j} p_{\lambda_i - \mu_j - i + j}(u) \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \\ d_{\lambda\mu}^*(u) &= \det \left(\binom{\lambda_i + N - i}{\mu_j + N - j} p_{\lambda_i - \mu_j - i + j}^*(u) \right)_{1 \leq i, j \leq N}. \end{aligned}$$

これは通常のシューア関数に関する展開式 ([Ma1] の第 I 章第 3 節の Ex.10) の一般化と見なせる.

次のように $d_{\lambda\mu}(u)$ を少し修正したものも考えよう (ただし $p_{(k)}(u) = \frac{1}{k!} p_k(u)$ とする):

$$\tilde{d}_{\lambda\mu}(u) = \frac{\prod_j (\mu_j + N - j)!}{\prod_i (\lambda_i + N - i)!} d_{\lambda\mu}(u) = \det (p_{(\lambda_i - \mu_j - i + j)}(u))_{1 \leq i, j \leq N}.$$

$d_{\lambda\mu}(u)$ は N に依存するが, この $\tilde{d}_{\lambda\mu}(u)$ は N によらず λ, μ のヤング図形としての形だけによって決まる. この修正された係数 $\tilde{d}_{\lambda\mu}(u)$ については次のような一種の双対性が成立する:

定理 3.2. 次の関係式が成立する:

$$\tilde{d}_{\lambda\mu}(u) = (-1)^{|\lambda| - |\mu|} \tilde{d}_{\lambda'\mu'}(-u).$$

ただし λ', μ' はそれぞれ λ, μ の転置を意味する.

u の符号が変化するのが面白い. 次節ではこれの特別な場合として基本対称式と完全斉次対称式との比較をする. この定理 3.2 は第 6 節で出てくるシューア型関数の母関数の形から導かれる. またこれは次のように言い換えることもできる:

定理 3.3. 二つの数列 $\{c_k\}_{k \geq 0}$ と $\{c'_k\}_{k \geq 0}$ の間に $\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k c'_{n-k} = \delta_{n,0}$ という関係があるとする. このとき次の等式が成立する:

$$\det (c_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{1 \leq i, j \leq \text{depth } \lambda} = \det (c'_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j})_{1 \leq i, j \leq \text{depth } \lambda'}.$$

これは skew Schur function を基本対称式または完全斉次対称式で表す式 (Jacobi-Trudi formula) から導くこともできる.

4. 基本対称式, 完全斉次対称式の展開式. 二項型多項式列に付随する基本対称式, 完全斉次対称式の展開式を詳しく見てみよう. 簡単のため次のような記号を用意する:

$$\begin{aligned} h_k(x_1, \dots, x_N; u) &= h_k(x_1 + u, \dots, x_N + u), \\ e_k(x_1, \dots, x_N; u) &= e_k(x_1 - u, \dots, x_N - u), \\ h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= h_k^*(x_1 + u, \dots, x_N + u), \\ e_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= e_k^*(x_1 - u, \dots, x_N - u). \end{aligned}$$

定理 4.1. $k \geq 0$ のとき次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} e_k(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{-N + k - 1}{k - l} e_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} \binom{-N + k - 1}{k - l} e_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u), \\ e_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{-N + k - 1}{k - l} e_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u). \end{aligned}$$

定理 4.2. $k \geq 0$ のとき次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} h_k(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{N + k - 1}{k - l} h_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u), \\ h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) &= \sum_{l \geq 0} \binom{N + k - 1}{k - l} h_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} \binom{N + k - 1}{k - l} h_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u). \end{aligned}$$

これらの関係式を比較すると「 e と h 」「 N の符号」「 u の符号」「 $*$ の有無」が奇妙に入れ替わっていて面白い. もし次の式にも等号が成り立てばこの規則性は申し分のないものになるのだが, 実際にはこれは一般には等号にならない:

$$e_k^*(x_1, \dots, x_N; u) \neq \sum_{l \geq 0} \binom{-N+k-1}{k-l} e_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u),$$

$$h_k(x_1, \dots, x_N; u) \neq \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{k-l} h_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u).$$

定理 4.2 は $k \in \mathbb{Z}$ の場合に一般化すると次のような二種類の展開式になる:

定理 4.3. 次の等式が成立する:

$$h_k(x_1, \dots, x_N; u) = \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{N+l-1} h_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u),$$

$$h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) = \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{N+l-1} h_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}(u)$$

$$= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{N+l-1} h_l(x_1, \dots, x_N) p_{k-l}^*(u).$$

定理 4.4. 次の等式が成立する:

$$h_k(x_1, \dots, x_N; u) = \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{l} h_{k-l}(x_1, \dots, x_N) p_l(u).$$

$$h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) = \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{l} h_{k-l}^*(x_1, \dots, x_N) p_l(u)$$

$$= \sum_{l \geq 0} \binom{N+k-1}{l} h_{k-l}(x_1, \dots, x_N) p_l^*(u).$$

以上の展開式からデルタ作用素 Q の作用に関する次の等式がわかる:

系 4.5. 次の等式が成立する:

$$Q_u h_k(x_1, \dots, x_N; u) = (N+k-1) h_{k-1}(x_1, \dots, x_N; u),$$

$$Q_u h_k^*(x_1, \dots, x_N; u) = (N+k-1) h_{k-1}^*(x_1, \dots, x_N; u),$$

$$Q_u e_k(x_1, \dots, x_N; u) = (-N+k-1) e_{k-1}(x_1, \dots, x_N; u),$$

$$Q_u e_k^*(x_1, \dots, x_N; u) = (-N+k-1) e_{k-1}^*(x_1, \dots, x_N; u).$$

以上の展開式の幾つかは前節の一般的な展開式からの帰結であるが、直接証明する方が早い。ほとんどのものは定義から簡単に導けるが、定理 4.1 は少しわかりにくい。これは $k = N$ の場合を示してそこに Q_u を繰り返し作用させることで得られる。

5. 基本対称式、完全斉次対称式の母関数. 命題 2.1 に注意すると前節の展開式からの帰結として次の等式が得られる:

定理 5.1. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}(u - x_1) \cdots (u - x_N) &= \sum_{l \geq 0} (-)^l e_l(x_1, \dots, x_N) p_{N-l}(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} (-)^l e_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{N-l}^*(u).\end{aligned}$$

定理 5.2. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(u + x_1) \cdots (u + x_N)} &= \sum_{l \geq 0} (-)^l h_l(x_1, \dots, x_N) p_{-N-l}^*(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} (-)^l h_l^*(x_1, \dots, x_N) p_{-N-l}(u).\end{aligned}$$

定理 5.3. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(u + x_1) \cdots (u + x_N)} &= (-)^{N-1} \sum_{l \geq 0} (-)^l h_{-N-l}(x_1, \dots, x_N) p_l^*(u) \\ &= (-)^{N-1} \sum_{l \geq 0} (-)^l h_{-N-l}^*(x_1, \dots, x_N) p_l(u).\end{aligned}$$

これらは e_k, e_k^*, h_k, h_k^* の一種の母関数と見なせる。このように $p_n(x)$ や $p_n^*(x)$ を用いた母関数を考えると、母関数自体は二項型多項式列によらない。

注意. 定理 5.1 は実は $\{p_n(u)\}$ が二項型でなくても成立する。すなわち $p_n(u)$ がモニックな n 次多項式でありさえすれば

$$(u - x_1) \cdots (u - x_N) = \sum_{l \geq 0} (-)^l e_l(x_1, \dots, x_N) p_{N-l}(u)$$

が成立する (e_l は $p_n(u)$ を使って第 2 節で行ったのと同じように定義する) .

また定理 5.2, 定理 5.3 も $p_n(x)$, $p_n^*(x)$ がモニックな n 次式であつて, さらに次を満たしてさえいれば成立する:

$$\frac{1}{x+y} = \sum_{k \geq 0} (-)^k p_k(x) p_{-1-k}^*(y) = \sum_{k \geq 0} (-)^k p_k^*(x) p_{-1-k}(y).$$

6. シューア型函数の母函数. 前節の母函数の等式は次のように一般化 (多変数化) できる (以後しばしば $s_\lambda(x) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ などと略記する) :

定理 6.1. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \leq N} \prod_{1 \leq j \leq M} (y_j - x_i) &= \sum_{\lambda \geq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda(x) s_{\lambda^\dagger}(y) \\ &= \sum_{\lambda \geq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda^*(x) s_{\lambda^\dagger}^*(y). \end{aligned}$$

λ は $\text{depth}(\lambda) \leq N$, $\text{depth}(\lambda') \leq M$ をみたすヤング図形全体を動く. また $\lambda^\dagger$ は次のように定める:

$$\lambda^\dagger = (M - \lambda_N, M - \lambda_{N-1}, \dots, M - \lambda_1)'.$$

定理 6.2. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i, j \leq N} \frac{1}{y_j + x_i} &= \sum_{\lambda \geq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda^*(x) s_{\lambda^\ddagger}(y) \\ &= \sum_{\lambda \geq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda(x) s_{\lambda^\ddagger}^*(y). \end{aligned}$$

λ は $\text{depth}(\lambda) \leq N$ をみたすヤング図形全体を動く. また $\lambda^\ddagger$ は次のように定める:

$$\lambda^\ddagger = (-N - \lambda_N, -N - \lambda_{N-1}, \dots, -N - \lambda_1).$$

より一般的な次の等式も成立する. $M < N$ のとき

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \leq N} \prod_{1 \leq j \leq M} \frac{1}{y_j + x_i} &= \sum_{\lambda \geq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda^*(x) s_{\lambda^\ddagger}(y) \\ &= \sum_{\lambda \geq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_\lambda(x) s_{\lambda^\ddagger}^*(y). \end{aligned}$$

また $M > N$ のとき

$$\begin{aligned} (-)^{M(M-N)} \prod_{1 \leq i \leq N} \prod_{1 \leq j \leq M} \frac{1}{y_j + x_i} &= \sum_{\lambda \supseteq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_{\lambda}^*(x) s_{\lambda^\dagger}(y) \\ &= \sum_{\lambda \supseteq \emptyset} (-)^{|\lambda|} s_{\lambda}(x) s_{\lambda^\dagger}^*(y). \end{aligned}$$

ただし λ は $\text{depth}(\lambda) \leq \min$ をみたすヤング図形全体を動く. また $\lambda^\dagger$ は次のように定める:

$$\lambda^\dagger = (-\max - \lambda_{\min}, -\max - \lambda_{\min-1}, \dots, -\max - \lambda_1).$$

ただし $\min = \min(M, N)$, $\max = \max(M, N)$ とする.

注意. (1) 定理 6.1 から係数 $d_{\lambda\mu}$ に関する次のような一種の双対性がわかる:

$$(-)^{|\lambda|} d_{\lambda\mu}(u) = (-)^{|\mu|} d_{\mu^\dagger \lambda^\dagger}(-u).$$

係数 $\tilde{d}_{\lambda\mu}$ に関する双対性である定理 3.2 はこれからすぐに導ける.

(2) 前節と同様に定理 6.1 は $\{p_n(u)\}$ が二項型でなくても成立する. すなわち $p_n(u)$ がモニックな n 次多項式でありさえすればよい. また定理 6.2 も $p_n(x)$, $p_n^*(x)$ がモニックな n 次式であって, さらに次を満たしてさえいれば成立する:

$$\frac{1}{x+y} = \sum_{k \geq 0} (-)^k p_k(x) p_{-1-k}^*(y) = \sum_{k \geq 0} (-)^k p_k^*(x) p_{-1-k}(y).$$

(3) 定理 6.2 は次のように言い換えることもできる:

$$\det \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N} = \sum_{\lambda \supseteq \emptyset} (-)^{|\lambda|} \tilde{s}_{\lambda}(x) \tilde{s}_{\lambda^\dagger}(y).$$

これはコーシー行列式と通常のシューア函数に関する次の等式の一般化と見なせる:

$$\det \left(\frac{1}{1 - x_i y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N} = \frac{\Delta(x) \Delta(y)}{\prod_{1 \leq i, j \leq N} (1 - x_i y_j)} = \sum_{\lambda \supseteq \emptyset} \tilde{s}_{\lambda}^D(x) \tilde{s}_{\lambda}^D(y).$$

7. 普遍包絡環の中心元. 本稿で扱ったシューア型函数は, 古典リー環の普遍包絡環の中心元の固有値を表すのに役立つ. まず今節ではカペリ型の中心元の定義を復習して, 次の第8節で実際にその固有値を見る.

7.1. まず一般線型リー環の普遍包絡環の有名な中心元であるカペリ元を復習しよう. 以下, 一般線型リー環 $\mathfrak{gl}_N = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ を普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_N)$ に埋め込んで議論する. リー環 $\mathfrak{gl}_N$ の標準的な基底 E_{ij} を成分とする行列 $E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ を考える. これを普遍包絡環の元を成分とする行列と見なして, 次の行列式を考える. これを「カペリ元 (カペリ行列式)」と呼ぶ ([Ca1], [HU], [U1]):

$$C^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \det(E - u\mathbf{1} + \text{diag } \mathfrak{h}_N).$$

ただし $\mathbf{1}$ は単位行列である. また $\mathfrak{h}_N$ は $\mathfrak{h}_N = (N-1, N-2, \dots, 0)$ という長さ N の数列である. さらに $\det$ は「列行列式 (column-determinant)」と呼ばれる非可換行列式である. つまり任意の (成分が非可換かも知れない) N 次の正方行列 $Z = (Z_{ij})$ に対し,

$$\det Z = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) Z_{\sigma(1)1} Z_{\sigma(2)2} \cdots Z_{\sigma(N)N}$$

とおく. このカペリ元 $C^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は普遍包絡環の中心元となることが知られている:

カペリ元は次のような小行列式の和に一般化できる:

$$C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \det(E_I - u\mathbf{1} + \text{diag } \mathfrak{h}_k).$$

ただし $I = (i_1, \dots, i_k)$ という数列および行列 $Z = (Z_{ij})$ に対し, Z_I で $(Z_{i_a i_b})_{1 \leq a, b \leq k}$ という小行列を表す. この元を「 k 次のカペリ元」と呼ぶ.

さらに次のようなパーマネントによる類似も考えられる ([N]):

$$D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq N} \frac{1}{k!} \text{per}(E_I + u\mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I \text{diag } \mathfrak{h}_k).$$

ここで per は「列パーマネント (column-permanent)」を表す. すなわち N 次の正方行列 $Z = (Z_{ij})$ に対し次のように定める:

$$\text{per } Z = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} Z_{\sigma(1)1} \cdots Z_{\sigma(N)N}.$$

また $I! = m_1! \cdots m_N!$ とおく. ただし $m_1, \dots, m_N$ は $I = (i_1, \dots, i_k)$ の重複度である:

$$I = (i_1, \dots, i_k) = (\overbrace{1, \dots, 1}^{m_1}, \overbrace{2, \dots, 2}^{m_2}, \dots, \overbrace{N, \dots, N}^{m_N}).$$

I には一般に重複があるから, $Z_I = (Z_{i_a i_b})_{1 \leq a, b \leq k}$ は必ずしも Z の小行列とは限らない.

この $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ もやはり普遍包絡環の中心元となる (実際にはさらに強くそれぞれ $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心の生成系になる):

定理 7.1. 任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し, $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ は普遍包絡環の中心元になる.

シューアの補題より, これらの中心元は $\mathfrak{gl}_N$ の既約表現に対しスカラー作用素として作用するが, その値 (固有値) は次の三角分解に注意すると簡単に計算することができる:

$$\mathfrak{gl}_N = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ は $i > j$, $i = j$, $i < j$ であるような E_{ij} で生成される $\mathfrak{gl}_N$ の部分環である. つまり行列 E の下三角部分, 対角部分, 上三角部分の成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属する.

例えば $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の固有値を考えよう. 三角分解に注意して最高ウェイトベクトルへの作用を考えると, 行列式の定義に現れる $N!$ 個の項のうち作用がゼロにならないのは単純に対角部分を掛け合わせた 1 項のみになる. よってその値は簡単に求めることができる. 同様にして行列式, 列パーマメントの定義に注意すると $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ と $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の固有値も具体的に書き下すことができる. しかしその結果はそれほど単純な形をしているわけではない. 第 9 節で見ると, 実はこれがちょうど下降冪に付随するシューア型関数 (本質的に shifted Schur function と同じもの) でうまく表せるのである.

7.2. 次に和地によって与えられた直交リー環の普遍包絡環におけるカペリ元の類似を復習する. $S \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ を非退化な N 次の対称行列とする. 直交群は S で決まる双線型形式を不変にする一次変換全体として実現できる:

$$O(S) = \{g \in GL_N \mid {}^t g S g = S\}.$$

対応するリー環は次のように表される:

$$\mathfrak{o}(S) = \{Z \in \mathfrak{gl}_N \mid {}^t Z S + S Z = 0\}.$$

この直交リ一環 $\mathfrak{o}(S)$ の元として $F_{ij}^{\mathfrak{o}(S)} = E_{ij} - S^{-1}E_{ji}S$ を取り, これを成分とする $F^{\mathfrak{o}(S)} = (F_{ij}^{\mathfrak{o}(S)})_{1 \leq i, j \leq N}$ という行列を考える (ただし E_{ij} は $\mathfrak{gl}_N$ の標準的な基底). これを $\text{Mat}_N(U(\mathfrak{o}(S)))$ の元と見なす.

$S = S_0 = (\delta_{i, N+1-j})$ の場合を考えてみよう:

$$\mathfrak{o}(S_0) = \{Z = (Z_{ij}) \in \mathfrak{gl}_N \mid Z_{ij} + Z_{N+1-j, N+1-i} = 0\}.$$

これを直交リ一環の「split 実現」と呼ぶ. この場合には三角分解を次のように取ることができる:

$$\mathfrak{o}(S_0) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ は $i > j$, $i = j$, $i < j$ であるような $F_{ij}^{\mathfrak{o}(S_0)}$ で生成される $\mathfrak{o}(S_0)$ の部分環である. つまり行列 $F^{\mathfrak{o}(S_0)}$ の下三角部分, 対角部分, 上三角部分の成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属する. よってもし一般線型リ一環の場合のように「 $F^{\mathfrak{o}(S_0)}$ の行列行列式」という形で表される普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S_0))$ の中心元があれば, その固有値は簡単に計算できるはずである. 実際に次のような中心元が和地によって与えられた ([W]):

定理 7.2 (和地). 任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し, 次の元は普遍包絡環の中心元になる:

$$C^{\mathfrak{o}(S_0)}(u) = \det(F^{\mathfrak{o}(S_0)} - u\mathbf{1} + \text{diag } \tilde{\mathfrak{h}}_N).$$

ここで $\tilde{\mathfrak{h}}_N$ は次のような長さ N の数列である:

$$\tilde{\mathfrak{h}}_N = \begin{cases} (\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, \dots, 0, 0, \dots, -\frac{N}{2} + 1), & N: \text{偶数}, \\ (\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{N}{2} + 1), & N: \text{奇数}. \end{cases}$$

さらにこれは小行列式の和に一般化できる:

定理 7.3 (和地). 次の元は任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し $U(\mathfrak{o}(S_0))$ の中心元となる:

$$C_k^{\mathfrak{o}(S_0)}(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \det(\tilde{F}_I^{\mathfrak{o}(S_0)} - u\mathbf{1} + \text{diag}(\frac{k}{2}, \frac{k}{2} - 1, \dots, -\frac{k}{2} + 1)).$$

ここで $\tilde{F}^{\mathfrak{o}(S_0)}$ は次のような行列である:

$$\tilde{F}^{\mathfrak{o}(S_0)} = \begin{cases} F^{\mathfrak{o}(S_0)} - \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0), & N: \text{偶数}, \\ F^{\mathfrak{o}(S_0)} - \text{diag}(1, \dots, 1, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0), & N: \text{奇数}. \end{cases}$$

7.3. シンプレクティック リー環の普遍包絡環でも類似の中心元が構成できる. ただしこれは行列式ではなくパーマメントで表される.

$J \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ を非退化な N 次の交代行列とする (よって N は偶数となる). シンプレクティック群はこの J で決まる双線型形式を不変にする一次変換全体として実現される:

$$\text{Sp}(J) = \{g \in \text{GL}_N \mid {}^t g J g = J\}.$$

対応するリー環は次のように表される:

$$\mathfrak{sp}(J) = \{Z \in \mathfrak{gl}_N \mid {}^t Z J + J Z = 0\}.$$

この $\mathfrak{sp}(J)$ の元として $F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J)} = E_{ij} - J^{-1} E_{ji} J$ を取り, これを成分とする $F^{\mathfrak{sp}(J)} = (F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J)})_{1 \leq i, j \leq N}$ という行列を考える. これを $\text{Mat}_N(U(\mathfrak{sp}(J)))$ の元と見なして議論を進める.

以下, シンプレクティック リー環を split 実現した場合を考えよう. つまり

$$J = J_0 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ & \ddots & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

の場合である. この場合の実現 $\mathfrak{sp}(J_0)$ では三角分解が次のように綺麗な形で取れる:

$$\mathfrak{sp}(J_0) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

ここで $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ はそれぞれ $i > j$, $i = j$, $i < j$ となるような $F_{ij}^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ で生成される $\mathfrak{sp}(J_0)$ の部分環である. つまり行列 $F^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ の下三角部分, 対角部分, 上三角部分の成分はそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ に属する. この $\mathfrak{sp}(J_0)$ をシンプレクティック リー環の「split 実現」と呼ぶ. この場合には列パーマメントを用いて普遍包絡環の中心元を構成することができる:

定理 7.4 ([I5]). 任意の $u \in \mathbb{C}$ に対し, 次の元は $U(\mathfrak{sp}(J_0))$ の中心元となる:

$$D_k^{\mathfrak{sp}_N}(u) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} \frac{1}{I!} \text{per}(\tilde{F}_I^{\mathfrak{sp}(J_0)} + u \mathbf{1}_I - \mathbf{1}_I \text{diag}(\frac{k}{2}, \frac{k}{2} - 1, \dots, -\frac{k}{2} + 1)).$$

ここで $\tilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)}$ は次の行列を意味する:

$$\tilde{F}^{\mathfrak{sp}(J_0)} = F^{\mathfrak{sp}(J_0)} + \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

次節で見るように、これらのカペリ型の中心元の固有値は本稿で扱ったシューア型の関数でうまく表される。

8. 具体例と普遍包絡環の中心元の固有値. 今節では Q が様々な差分の場合を考察する. 前進差分の場合は本質的に shifted Schur function の場合と同じであり, 前節で見た一般線型リー環の普遍包絡環の中心元の固有値を表すのに役立つ. また中心差分の場合は直交リー環, シンプレクティック リー環の普遍包絡環の中心元の固有値を表すのに活用できる.

8.1. Q が前進差分 Δ^+ の場合を考える. この場合は $p_n(x) = p_n^{\Delta^+}(x)$ および $p_n^*(x) = p_n^{*\Delta^+}(x)$ は次のようになる:

$$p_n(x) = x^n, \quad p_n^*(x) = (x-1)^n.$$

これらに付随する基本対称式 $e_k = e_k^{\Delta^+}$, 完全斉次対称式 $h_k = h_k^{\Delta^+}$ は次のように具体的に書き表すことができる ($e_k^{*\Delta^+}, h_k^{*\Delta^+}$ も変数を 1 だけシフトするだけで得られる):

命題 8.1. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} e_k(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (x_{i_1} - N + k - 1 + i_1)(x_{i_2} - N + k - 2 + i_2) \cdots (x_{i_k} - N + i_k), \\ h_k(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (x_{i_1} - N - k + 1 + i_1)(x_{i_2} - N - k + 2 + i_2) \cdots (x_{i_k} - N + i_k). \end{aligned}$$

証明. 第一の等式は命題 2.1 から得られる次の等式に Q_u を繰り返し作用させたらよい:

$$e_N(x_1 - u, \dots, x_N - u) = (x_1 - u) \cdots (x_N - u).$$

第二の等式は変数の個数 N に関する帰納法で証明できる (母関数の式を利用する). $\square$

この対称式を使って前節で定義した一般線型リー環の普遍包絡環の中心元 $C_k^{\mathfrak{sl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{sl}_N}(u)$ の固有値を記述することができる:

定理 8.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ で決まる $\mathfrak{gl}_N$ の表現 $\pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}$ に関して次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}(C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)) = e_k(l_1, \dots, l_N; u), \quad \pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}(D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)) = h_k(l_1, \dots, l_N; u).$$

ただし $l_i = \lambda_i + N - i$ とする.

これは前節で述べた一般線型リー環の三角分解と行列列式, 列パーマメントの定義に注意すると, 次のように直接的な計算でわかる:

$$\begin{aligned} \pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}(C_k^{\mathfrak{gl}_N}) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (\lambda_{i_1} + k - 1)(\lambda_{i_2} + k - 2) \cdots (\lambda_{i_k} + 0) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (l_{i_1} - N + k - 1 + i_1)(l_{i_2} - N + k - 2 + i_2) \cdots (l_{i_k} - N + i_k) \\ &= e_k(l_1, \dots, l_N). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_\lambda^{\mathfrak{gl}_N}(D_k^{\mathfrak{gl}_N}) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (\lambda_{i_1} - k + 1)(\lambda_{i_2} - k + 2) \cdots (\lambda_{i_k} - 0) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (l_{i_1} - N - k + 1 + i_1)(l_{i_2} - N - k + 2 + i_2) \cdots (l_{i_k} - N + i_k) \\ &= h_k(l_1, \dots, l_N). \end{aligned}$$

詳細は省略するが, shifted Schur function (つまり本質的にこの下降冪に付随するシューア型函数) を用いてさらに $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$, $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ の一般化である quantum immanant の固有値を表示することもできる ([OO]).

8.2. 直交リー環とシンプレクティックリー環の普遍包絡環の中心元の固有値を見る前に, Q が後退差分の場合をまとめておこう. 後退差分 Δ^- から決まる多項式 $p_n(x) = p_n^{\Delta^-}(x)$, $p_n^*(x) = p_n^{*\Delta^-}(x)$ は次のようになる:

$$p_n(x) = x^{\bar{n}}, \quad p_n^*(x) = (x+1)^{\bar{n}}.$$

これに付随する基本対称式 $e_k = e_k^{\Delta^-}$, 完全斉次対称式 $h_k = h_k^{\Delta^-}$ は次のように表される ($e_k^{\Delta^-}$, $h_k^{\Delta^-}$ も変数を 1 だけシフトすることで得られる):

命題 8.3. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}
 e_k(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (x_{i_1} + N - k + 1 - i_1)(x_{i_2} + N - k + 2 - i_2) \cdots (x_{i_k} + N - i_k), \\
 h_k(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (x_{i_1} + N + k - 1 - i_1)(x_{i_2} + N + k - 2 - i_2) \cdots (x_{i_k} + N - i_k).
 \end{aligned}$$

8.3. 次に Q が中心差分の場合を考えてみよう. 中心差分 Δ^0 に付随する多項式 $p_n(x) = p_n^{\Delta^0}(x)$, $p_n^*(x) = p_n^{*\Delta^0}(x)$ は次のようになる:

$$p_n(x) = x \cdot x^{\overline{n-1}}, \quad p_n^*(x) = x^{\overline{n}}.$$

$p_n(x)$ に付随する基本対称式 $e_k = e_k^{\Delta^0}$ と $p_n^*(x)$ に付随する完全斉次対称式 $h_k^* = h_k^{*\Delta^0}$ は次のように表される (h_k でないことに注意):

命題 8.4. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}
 e_k(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (x_{i_1} - \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - 1 + i_1)(x_{i_2} - \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - 2 + i_2) \cdots (x_{i_k} - \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + i_k) \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (x_{i_1} + \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + 1 - i_1)(x_{i_2} + \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + 2 - i_2) \cdots (x_{i_k} + \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - i_k), \\
 h_k^*(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (x_{i_1} - \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + i_1)(x_{i_2} - \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + 1 + i_2) \cdots (x_{i_k} - \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - 1 + i_k) \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} (x_{i_1} + \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - i_1)(x_{i_2} + \frac{N}{2} + \frac{k}{2} - 1 - i_2) \cdots (x_{i_k} + \frac{N}{2} - \frac{k}{2} + 1 - i_k).
 \end{aligned}$$

これらを使って直交リー環, シンプレクティックリー環の普遍包絡環のカペリ型中心元の固有値を表すことができる.

まず直交リー環の普遍包絡環の中心元 $C_k^{oN}(u)$ について次が成立する (以下, $n = N/2$ とする):

定理 8.5. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{[n]})$ で決まる $\mathfrak{o}_N$ の表現 $\pi_\lambda^{\mathfrak{o}_N}$ に関して次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{o}_N}(C_k^{\mathfrak{o}_N}(u)) = e_k(l_1, \dots, l_N; u).$$

ただし $l_1, \dots, l_N$ は次のように定義する. まず N が偶数のとき $\lambda_{n+1} = -\lambda_n, \dots, \lambda_N = -\lambda_1$ とおく. そして $l_1, \dots, l_N$ を次のように定義する:

$$l_i = \begin{cases} \lambda_i + \frac{N}{2} - i, & 1 \leq i \leq \frac{N}{2}, \\ \lambda_i + \frac{N}{2} - i + 1, & \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

N が奇数のときには $\lambda_{n^\dagger} = 0, \lambda_{n^\dagger+1} = -\lambda_{n^\dagger-1}, \dots, \lambda_N = -\lambda_1$ と定める (ただし $n^\dagger = \frac{N+1}{2}$ とする). そして次のように $l_1, \dots, l_N$ を定義する:

$$l_i = \begin{cases} \lambda_i + \frac{N}{2} - i, & 1 \leq i \leq n^\dagger - 1, \\ \lambda_i, & i = n^\dagger, \\ \lambda_i + \frac{N}{2} - i + 1, & n^\dagger + 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

シンプレクティック リー環の普遍包絡環の中心元 $D_k^{\mathfrak{sp}_N}(u)$ についても次が成立する:

定理 8.6. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ で決まる $\mathfrak{sp}_N$ の表現 $\pi_\lambda^{\mathfrak{sp}_N}$ に関して次の等式が成立する:

$$\pi_\lambda^{\mathfrak{sp}_N}(D_k^{\mathfrak{sp}_N}(u)) = h_k^*(l_1, \dots, l_N; u).$$

ただし $\lambda_{n+1} = -\lambda_n, \dots, \lambda_N = -\lambda_1$ とおく. さらに $l_1, \dots, l_N$ を次のようにおく:

$$l_i = \begin{cases} \lambda_i + \frac{N}{2} + 1 - i, & 1 \leq i \leq \frac{N}{2}, \\ \lambda_i + \frac{N}{2} - i, & \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

以上の結果を見ると h よりも h^* の方が重要な役割を果たしているように見える. 一般線型リー環の結果についても $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ はパラメータ u を 1 ずらすと固有値を h^* で表すことができる. しかしカペリ恒等式の類似を考えると 1 ずらさない方がよい.

詳細は省略するが, [I3] で与えられた直交リー環の普遍包絡環のパーマネント型中心元およびシンプレクティック リー環の普遍包絡環の行列式型中心元の固有値も部分的には本稿のシューア型函数を用いて表示できる. これらの普遍包絡環において quantum immanant の類似を考える手がかりになれば面白い (が, 現時点ではまだ何もわからない).

カペリ型の中心元を扱うときには階乗乗幂を利用して母函数を作ったり前進差分や中心差分などを考えたりすることが有効であるが, それらはすべて第 4 節, 第 5 節の結果と対応している.

9. Wronski 関係式の証明. 前節で見たカペリ型中心元の固有値の表示式を利用することで, [U3] で与えられた $C_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ と $D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u)$ とのあいだの次の関係式 (Wronski 関係式) の別証明ができる.

定理 9.1 (梅田). 次の等式が成立する:

$$\sum_{k=0}^s (-)^k D_k^{\mathfrak{gl}_N}(u) C_{s-k}^{\mathfrak{gl}_N}(s-1-u) = \delta_{s,0}.$$

定理 9.2 (梅田). 次の等式が成立する:

$$\sum_{k=0}^s (-)^k C_k^{\mathfrak{gl}_N}(k-1-u) D_{s-k}^{\mathfrak{gl}_N}(u-k) = \delta_{s,0}.$$

この関係式はそれぞれの中心元の固有値の表示式を考えると, Q が前進差分 Δ^+ の場合の基本対称式 $e_k(x; u) = e_k^{\Delta^+}(x; u)$ と完全斉次対称式 $h_k(x; u) = h_k^{\Delta^+}(x; u)$ のあいだの関係式に言い換えられる:

$$(9.1) \quad \sum_{k=0}^s (-)^k h_k(x; u) e_{s-k}(x; s-1-u) = \delta_{s,0},$$

$$(9.2) \quad \sum_{k=0}^s (-)^k e_k(x; k-1-u) h_{s-k}(x; u-k) = \delta_{s,0}.$$

以下, これらを直接的な計算で証明してみよう.

9.1. 定理 9.1 すなわち (9.1) は定理 5.1 と定理 5.2 から次のようにして導くことができる. まず定理 5.1 より次が成り立つ:

$$(u+v-x_1) \cdots (u+v-x_N) = \sum_{l \geq 0} (-)^l e_l(x; u) v^{\overline{N-l}}.$$

また定理 5.2 より次が成り立つ:

$$\begin{aligned} (u+v+x_1)^{-1} \cdots (u+v+x_N)^{-1} &= \sum_{l \geq 0} (-)^l h_l(x; u) (v-1)^{\overline{-N-l}} \\ &= \sum_{l \geq 0} (-)^l h_l(x; u) \frac{1}{v^{\overline{N+l}}}, \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} (-u-v+x_1)^{-1} \cdots (-u-v+x_N)^{-1} &= \sum_{l \geq 0} (-)^l h_l(x; -u) \frac{1}{(-v)^{N+l}} \\ &= (-)^N \sum_{l \geq 0} h_l(x; -u) \frac{1}{v^{N+l}}. \end{aligned}$$

両辺を掛け合わせることで次を得る:

$$1 = \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} (-)^k e_k(x; u) h_l(x; -u) \frac{v^{N-k}}{v^{N+l}}.$$

ここで次に注意する (下降冪が二項型であることと等式 $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$ を使っている) :

$$\begin{aligned} \frac{v^{N-k}}{v^{N+l}} &= (v-N-l)^{-k-l} \\ &= \sum_{m \geq 0} \binom{-k-l}{m} (-N-l)^{\underline{m}} v^{-k-l-m} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} (-k-l)^{\underline{m}} (-N-l)^{\underline{m}} v^{-k-l-m} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} (-k-l-m+1)^{\overline{m}} (-N-l-m+1)^{\overline{m}} v^{-k-l-m} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} (k+l+m-1)^{\underline{m}} (N+l+m-1)^{\underline{m}} v^{-k-l-m} \\ &= \sum_{m \geq 0} \binom{N+l+m-1}{m} (k+l+m-1)^{\underline{m}} v^{-k-l-m}. \end{aligned}$$

よって定理 4.2 も使うと

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} (-)^k e_k(x; u) h_l(x; -u) \frac{v^{N-k}}{v^{N+l}} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} (-)^k e_k(x; u) h_l(x; -u) \sum_{m \geq 0} \binom{N+l+m-1}{m} (k+l+m-1)^{\underline{m}} v^{-k-l-m} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-)^k e_k(x; u) v^{-k-r} \sum_{l+m=r} \binom{N+r-1}{m} h_l(x; -u) (k+r-1)^{\underline{m}} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-)^k e_k(x; u) v^{-k-r} h_r(x; k+r-1-u) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-)^k e_k(x; u) h_r(x; k + r - 1 - u) v^{-k-r}$$

となる. ここで両辺の v^{-k-r} の係数を比べることで次を得る:

$$\sum_{k+r=s} (-)^k e_k(x; u) h_r(x; s - 1 - u) = \delta_{s,0}.$$

これは (9.1), すなわち定理 9.1 を意味する.

9.2. (9.2) を示す前に前進差分 Δ^+ の場合と後退差分 Δ^- の場合を結びつける等式を見ておこう:

$$(9.3) \quad e_k^{\Delta^+}(x; u) = e_k^{\Delta^-}(x; u + N - k), \quad h_k^{\Delta^+}(x; u) = h_k^{\Delta^-}(x; u - N - k + 2).$$

第一の等式は $\Delta^+ = E^1 \Delta^-$ を $e_N^{\Delta^+}(x; u) = e_N^{\Delta^-}(x; u)$ に繰り返し作用させればよい (ここで命題 2.1 に注意する). ただし E^1 は平行移動演算子である: $E^1 f(x) = f(x+1)$. 第二の等式は定義からすぐにわかる. この等式は次のように書いた方が e_k の式とのバランスがとれて美しいかもしれない:

$$h_k^{\Delta^+}(x; u) = h_k^{\Delta^-}(x; u - N - k).$$

ここでもまた e_k と対をなすのは h_k ではなくて h_k^* であるという現象が見られる.

9.3. (9.2) は次のようにして証明できる. 前進差分を後退差分に置き換えて議論すると, (9.1) の証明と同様にして次の等式を得る:

$$\sum_{k+r=s} (-)^k e_k^{\Delta^-}(x; u) h_r^{\Delta^-}(x; -s + 1 - u) = \delta_{s,0}.$$

(9.3) を使うとこれは

$$\sum_{k+r=s} (-)^k e_k^{\Delta^+}(x; u - N + k) h_r^{\Delta^+}(x; -s + 1 - u + N + r - 2) = \delta_{s,0}$$

と書き換えられ, 最終的には次のように整理することができる:

$$\sum_{k+r=s} (-)^k e_k^{\Delta^+}(x; u) h_r^{\Delta^+}(x; -u - 1) = \delta_{s,0}.$$

これは (9.2) すなわち定理 9.2 と同値である. というわけで, 定理 9.1 と定理 9.2 は本質的には前進差分と後退差分の違いであった, ということになる.

REFERENCES

- [Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I1] M. Itoh, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, J. Lie Theory **10** (2000), 463–489.
- [I2] ———, *Capelli identities for the dual pair (O_M, Sp_N)* , Math. Z. **246** (2004), 125–154.
- [I3] ———, *Capelli identities for the reductive dual pairs*, Adv. Math. **194** (2005), 345–397.
- [I4] ———, *Two determinants in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, preprint (2005).
- [I5] ———, *Two permanents in the universal enveloping algebras of the symplectic Lie algebras*, preprint (2005).
- [IU] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), 333–359.
- [Ma1] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials (second edition)*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [Ma2] ———, *Schur functions: themes and variations*, in *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg **498** 1992, pp. 5–39.
- [M] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.
- [MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.
- [MNO] A. Molev, M. Nazarov, and G. Ol'shanskii, *Yangians and classical Lie algebras*, Uspekhi Mat. Nauk **51** (1996), 27–104; Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.
- [MR] R. Mullin and G.-C. Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory III: Theory of Binomial Enumeration*, Graph Theory and Its Applications, edited by Bernard Harris, Academic Press, New York, 1970, pp. 167–213.
- [N] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [NUW] M. Noumi, T. Umeda, and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.

- [OO] A. Okounkov and G. Olshanski, *Shifted Schur functions*, *Algebra i Analiz* **9** (1997), 79–147 (Russian); English transl.: *St. Petersburg Math. J.* **9** (1998), 239–300.
- [S] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Vol 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, *Sūgaku* **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants,” AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu.
- [U2] ———, *On the proof of the Capelli identities*, preprint (1997).
- [U3] ———, *Application of Koszul complex to Wronski relations for $U(\mathfrak{gl}_n)$* , *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), 663–680.
- [W] A. Wachi, *Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras*, preprint (2003).