

Stokes 作用素等の分数中の 定義域について

東大理

森本浩子

藤田 宏

§ 1. 記号と結果

Ω は R^3 の有界領域で、その境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。

$L_p(\Omega)$ は、 Ω 上で定義された p 乗可積分な実函数と成分とするベクトル全体、 $W_p^l(\Omega)$ は、 l 階までの微分が $L_p(\Omega)$ に属するようなベクトル函数全体とする。 $D_0(\Omega)$ は Ω にコンパクトな台を持つ無限回微分可能な実ベクトル函数 φ で、

$\operatorname{div} \varphi = 0$ をみたすもの全体とする。さらに、 $H_0(\Omega)$ は、

$D_0(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ での閉包、 $H_0^1(\Omega)$ は $D_0(\Omega)$ の $W_2^1(\Omega)$ での閉包とする。 $L_2(\Omega)$ から $H_0(\Omega)$ への正射影を P であらわす。

$D_0(\Omega)$ で定義された作用素 $-P\Delta$ は、ヒルベルト空間 $H_0(\Omega)$ で正定値対称作用素である。 $-P\Delta$ の Friedrichs 拡張を A であらわし、Stokes 作用素と呼ぶ。 A は正定値自己共役作用素である。 $f \in L_2(\Omega)$ としよう。 $Au = Pf$ は、次に同値である。

$$\begin{cases} \Delta u - \nabla p = -f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

但し p はあるスカラー函数である。作用素 S の定義域と $D(S)$ であらわすことにすれば、 $D(A) = W_2^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ が知られている。(Agmon - Douglis - Nirenberg [1], Cattabriga [2], Ladyzhenskaya [8])

本稿では、 A の分数 A^α ($0 < \alpha < 1$) の定義域 $D(A^\alpha)$ の特徴付けと、Dirichlet 境界条件のもとでの $B = -\Delta$ のこれに関連して与える (定理 1.2)。但し、 $D(B) = W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$ 、ここに $\dot{W}_2^1(\Omega)$ は $C_0^\infty(\Omega)$ (ハットル函数) の $W_2^1(\Omega)$ における閉包である。定理 1.2 の結果は、§4 で示すように、ナビエ-ストークス方程式の研究に有用である。定理 1.2 は、すでに Fujita - Morimoto [3] で証明されているが、今回は問題を一般化した形での証明を試みる (補題 2.3)。この補題は、 $D(B^\alpha)$ の特徴付けに関する既知の結果 (Fujiwara [5], Grisvard [6] 等による) の一部を証明するのにも役立つ。読者の便宜のために、定理の形でのべておこう。

定理 1.1

$$\begin{aligned} D(B^\alpha) &= W_2^{2\alpha}(\Omega), & \frac{1}{4} > \alpha > 0, \\ D(B^\alpha) &= \{u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Omega); p^{-\frac{1}{2}}u \in L_2(\Omega)\}, & \alpha = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$D(B^\alpha) = \{ u \in W_2^{2\alpha}(\Omega) ; u|_{\partial\Omega} = 0 \} , \quad 1 > \alpha > \frac{1}{4} ,$$

但し、 $\rho(x)$ は点 x の $\partial\Omega$ からの距離を表わす。

我々の主要な結果は、次の定理である。

定理 1.2

$$D(A^\alpha) = D(B^\alpha) \cap H_0 , \quad 1 > \alpha > 0 .$$

注意 1.3

次の不等式をみたす正定数 C_α が存在する。

$$\frac{1}{C_\alpha} \|B^\alpha u\| \leq \|A^\alpha u\| \leq C_\alpha \|B^\alpha u\|$$

$$(u \in D(A^\alpha) = D(B^\alpha) \cap H_0) .$$

上の二つの定理とソボレフの埋蔵定理を用いて、

系 1.4

$$D(A^\gamma) \subset C(\bar{\Omega}) , \quad \gamma > \frac{3}{4} ,$$

$$D(A^\theta) \subset W_p^1(\Omega) , \quad 1 > \theta > \frac{1}{2} , \quad \frac{1}{p} = \frac{5}{6} - \frac{2\theta}{3} ,$$

特に $D(A^{\frac{5}{8}}) \subset W_{\frac{12}{5}}^1(\Omega) .$

§2. 部分空間の補空間に関する一補題.

我々は実補間法を用いる。たとえば、Lions-Peetre [11] を参照されたい。 X, Y, Z はバナッハ空間とし、分離公理をみたす線型位相空間 $\mathcal{X}$ が存在して、 X, Y, Z は $\mathcal{X}$ に含まれ、かつ埋込みは連続であるとす。これと $X \subset \mathcal{X}$ などと書くことがあふ。

定義によれば, $u \in S(2, 1-\alpha, X; 2, -\alpha, Y)$ は $u: (0, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$ で $\int_0^\infty \|t^{1-\alpha} u(t)\|_X^2 \frac{dt}{t} < +\infty$, $\int_0^\infty \|t^{-\alpha} u(t)\|_Y^2 \frac{dt}{t} < +\infty$ を満たす u により, $a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$ とあらわされる。平均空間 $S(2, 1-\alpha, X; 2, -\alpha, Y)$ を $[X, Y]_{1-\alpha}$ と書くことにしよう。 $X \cap Y$, $X+Y$ には次のノルムを入れて、バナッハ空間とみなす。

$$\|u\|_{X \cap Y} = \max(\|u\|_X, \|u\|_Y)$$

$$\|u\|_{X+Y} = \inf_{u=x+y} (\|x\|_X + \|y\|_Y)$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ は, X から Y への有界線型作用素全体とする。平均空間に対して, 次の補間定理が成立つ。

定理 2.1 (Lions-Peetre [11])

X_i, Y_i ($i=0, 1$) は, バナッハ空間で $X_i \subset \mathcal{X}$, $Y_i \subset \mathcal{Y}$ とある。このとき $T \in \mathcal{L}(X_0, Y_0) \cap \mathcal{L}(X_1, Y_1)$ ならば $T \in \mathcal{L}([X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta)$ で かつ作用素ノルムは次の不等式を満たす。

$$\|T\|_{\mathcal{L}([X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X_0, Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(X_1, Y_1)}^\theta$$

($1 > \theta > 0$)

定理 2.2 (Lions-Peetre [11])

X, Y は上のべたバナッハ空間の組とする。この時

$$[[X, Y]_{\theta_0}, [X, Y]_{\theta_1}]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$$

但し $0 < \theta < 1$.

部分空間の補空間に関して、次の補題が成立つ。

補題 2.3

K は θ で定義された線型作用素で 次の性質を持つと
ある。

$$i) \quad K \in \mathcal{L}(X, X \cap Z) \cap \mathcal{L}(Y, Y \cap Z)$$

$$ii) \quad Ky = y \quad \text{for } y \in (X + Y) \cap Z.$$

このとき

$$[X, Y]_{\theta} \cap Z = [X \cap Z, Y \cap Z]_{\theta}$$

証明

$[X, Y]_{\theta} \cap Z \supseteq [X \cap Z, Y \cap Z]_{\theta}$ は明らかである。従って逆の包含関係を導けばよい。仮定 i) と定理 2.1 により、 $K \in \mathcal{L}([X, Y]_{\theta}, [X \cap Z, Y \cap Z]_{\theta})$ である。ところが ii) より $y \in [X, Y]_{\theta} \cap Z$ に対しては $Ky = y$ が成立つ。故に $[X, Y]_{\theta} \cap Z \subseteq [X \cap Z, Y \cap Z]_{\theta}$.

証明終り

注意 2.4

この補題は他の補間法による補間空間について成立つことは明らかである。

問題 2.5

補題 2.3 に関連して、次の等号が成立つ条件を調べよ。

$$[X, Z]_0 \cap [Y, Z]_0 = [X \cap Y, Z]_0.$$

たとえば X, Y が、ヒルベルト空間 Z で定義された正定値自己共役作用素 A, B の定義域で、かつ A, B が可換であれば、等号が成立つ (Lions-Magenes [10] Chap. 1)。バナハ空間の場合、両作用素 A, B にある種の可換性を仮定すれば等号が成立つことも知られている (Muramatsu [12])。

補題 2.3 の応用として $D(B^\alpha)$ ($1 > \alpha > \frac{1}{2}$) の特徴付けとあてなうことが出来る。まず、次の補題をいべておこう。これは Lions [9] の定理の特別な場合である。

補題 2.6

H はヒルベルト空間、 S は H における正定値自己共役作用素とする。このとき $D(S^\alpha) = [D(S), H]_{1-\alpha}$ が成立つ。

この補題と定理 2.2 によれば $D(B^{1-\theta}) = [D(B), D(B^{\frac{1}{2}})]_{2\theta}$, 但し $1 > 1-\theta > \frac{1}{2}$ 。 $D(B) = W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, $D(B^{\frac{1}{2}}) = \dot{W}_2^1(\Omega)$ は既知である。 $u \in W_2^1(\Omega)$ の境界値 γu に対して、次の境界値問題を考えよう。

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega, \\ \gamma v = \gamma u & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

この解を v とする。楕円型方程式の一般論 (たとえば Lions-Magenes [10] Chap. 2) より、評価

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c \|\gamma u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(2\Omega)},$$

$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c \|\gamma u\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(2\Omega)},$$

が成立つ。又 トレース作用素に関して、次の評価が成立つ。

$$\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(2\Omega)} \leq c \|u\|_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(2\Omega)} \leq c \|u\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

$Ku \equiv u - v$ で定義される作用素 K は、 $X = W_2^2(\Omega)$, $Y = W_2^1(\Omega)$, $Z = \dot{W}_2^1(\Omega)$ として補題 2.3 の仮定を満たすことは容易に確かめられる。従って、 $[W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega), \dot{W}_2^1(\Omega)]_{2\theta} = [W_2^2(\Omega), W_2^1(\Omega)]_{2\theta} \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, 故に、 $D(B^{1-\theta}) = W_2^{2-2\theta}(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, $1 > 1-\theta > \frac{1}{2}$ 。

§ 3. 定理 1.2 の証明

Cattabriga [2], Ladyzhenskaya [8] によって、次の事実が証明されている。

補題 3.1

定数 c_1, c_2 が存在して、すべての $\psi \in H_\sigma(\Omega)$ に対して、次の不等式が成立つ。

$$\|\Delta A^{-1}\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|A^{-1}\psi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c_2 \|\psi\|_{L_2(\Omega)}.$$

さて、補題 2.6 により、 $D(A^\alpha) = [D(A), H_\sigma]_{1-\alpha}$, $D(B^\alpha) = [D(B), L_2]_{1-\alpha}$ である。 $D(A) = D(B) \cap H_\sigma$ であること

に注意しよう。 $D(B)$ の元 φ に対し, $K\varphi = -A^{-1}PB\varphi$ で作用素 K を定義する。 K は, $D(B)$ の元 $\in D(A)$ になっている。補題 3.1 により, K は, $K \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), H_0(\Omega))$ に拡張される。 $\varphi \in D_0(\Omega)$ の任意の元としよう。 定義により, $-PB\varphi = A\varphi$, 故に $K\varphi = \varphi$ である。 $D_0(\Omega)$ は $H_0(\Omega)$ で dense だから, 任意の $\varphi \in H_0(\Omega)$ に対して $K\varphi = \varphi$ が成立つ。
 $D(A^*)$ (resp. $D(B^*)$) にノルム $\|A^*u\|_{L_2(\Omega)}$ (resp. $\|B^*u\|_{L_2(\Omega)}$) を入れてヒルベルト空間とみなすと, K は $D(B) \cap D(A)$ になっている有界作用素で, 任意の $\varphi \in D(B)$ に対し, $\|K\varphi\|_{D(A)} \leq \|\varphi\|_{D(B)}$ が成立つ。 $X = D(B)$, $Y = L_2(\Omega)$, $Z = H_0(\Omega)$ として補題 2.3 を用いることが出来る。
 $[D(B), L_2]_{1-\alpha} \cap H_0 = [D(B) \cap H_0, L_2 \cap H_0]_{1-\alpha}$, 故に定理は証明された。

注意 3.2

定理 2.1 により, 特に $K \in \mathcal{L}(D(B^*), D(A^*))$ である。さらに, 任意の $\varphi \in D(B^*)$ に対して次が成立つ。

$$\|A^*K\varphi\| \leq \|K\|_{\mathcal{L}(D(B), D(A))}^{\alpha} \|K\|_{\mathcal{L}(L_2, H_0)}^{1-\alpha} \|B^*\varphi\|$$

$$\text{故に } \|A^*K\varphi\| \leq \|K\|_{\mathcal{L}(L_2, H_0)}^{1-\alpha} \|B^*\varphi\|.$$

この不等式は, 一般化された Heinz の不等式 (Kato [7]) から導かれる。

§4. ナビエ-ストークス方程式 (Fujita-Morimoto [4])

次の初期値問題と考察しよう。

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -Au + Fu + Pf \\ u(0) = a \end{cases}$$

但し $Fu = -P(u \cdot \nabla)u$ である。

次の補題から始めよう。

補題 4.1

正定数 C_0 が存在して、 $D(A^{\frac{5}{8}})$ の任意の元 u, v に対して、次の不等式が成立つ。

$$\|Fu\| \leq C_0 \|A^{\frac{5}{8}}u\|^2.$$

$$\|Fu - Fv\| \leq C_0 (\|A^{\frac{5}{8}}u\| + \|A^{\frac{5}{8}}v\|) \|A^{\frac{5}{8}}(u-v)\|.$$

証明

Hölder の不等式により

$$\|Fu\| = \|-P(u \cdot \nabla)u\| \leq \|u\|_{L_{12}} \|\nabla u\|_{L_{\frac{12}{5}}}.$$

Sobolev の埋蔵定理によれば $W_{\frac{12}{5}}^1 \subset L_{12}$ であるから

$$\|Fu\| \leq C \|\nabla u\|_{L_{\frac{12}{5}}}^2$$

系 1.4 によれば $D(A^{\frac{5}{8}}) \subset W_{\frac{12}{5}}^1$ 、故に ある正定数 C_0

が存在して

$$\|Fu\| \leq C_0 \|A^{\frac{5}{8}}u\|^2.$$

二番目の不等式も同様にして導かれる。

証明終り。

方程式 (E) の解を、函数空間 $\mathcal{S}_T$ ($T > 0$) で求めよ。

$\mathcal{S}_T$ は、次のように定義される。

$\mathcal{S}_T \equiv \{ u: (0, T] \rightarrow D(A^{\frac{5}{8}}) \text{ 連続};$

$$\|u\|_T \equiv \sup_{0 < t \leq T} t^{\frac{3}{8}} \|A^{\frac{5}{8}} u(t)\|_{L_2(\Omega)} < +\infty \}$$

$\mathcal{S}_T$ は、ノルム $\|u\|_T$ で、バナッハ空間となる。

簡単のために、外力 $Pf = 0$ の場合を扱う。積分作用素 Φ を次のように定義しよう。

$$u_0(t) = e^{-tA} a$$

$$\Phi u(t) = u_0(t) + \int_0^t e^{-(t-s)A} F u(s) ds.$$

$u_0 \in \mathcal{S}_T$ ならば Φ は $\mathcal{S}_T$ の元を $\mathcal{S}_T$ にうつす。なぜならば、補題 4.1 により、

$$\int_0^t \|A^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A} F u(s)\| ds$$

$$\leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} \|A^{\frac{5}{8}} u(s)\|^2 ds$$

$$\leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} s^{-\frac{6}{8}} ds \sup_{0 < s \leq t} \|s^{\frac{3}{8}} A^{\frac{5}{8}} u(s)\|^2.$$

しかも、積分 $\int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} s^{-\frac{6}{8}} ds = t^{-\frac{3}{8}} \beta_1$ ($\beta_1 = B(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$).

$B(\cdot, \cdot)$ はベータ函数) であるから、不等式

$$(*) \quad \|\Phi u\|_T \leq \|u_0\|_T + C_0 \beta_1 \|u\|_T^2$$

を得る。ここで定数 r と、 $\mathcal{S}_T$ の開球 B_T を次のように定めよう。

$$r \equiv \|u_0\|_T + 4C_0\beta_1$$

$$B_T \equiv \{ u \in \mathcal{S}_T; \|u\|_T \leq 2\|u_0\|_T \}$$

この時、 Φ に関して次の命題が成立つ。

命題 4.2

i) Φ は β_T 上 係数 r の Lipschitz 連続である。 したがって、 $u, v \in \beta_T$ ならば

$$\|\Phi u - \Phi v\|_T \leq r \|u - v\|_T.$$

ii) $r \leq 1$ ならば β_T は Φ で不変である。

証明

i) 補題 4.1 を用いれば

$$\begin{aligned} & \|A^{\frac{5}{8}}(\Phi u - \Phi v)\| \\ & \leq \int_0^t \|A^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A} (Fu(s) - Fv(s))\| ds \\ & \leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} (\|A^{\frac{5}{8}} u(s)\| + \|A^{\frac{5}{8}} v(s)\|) \|A^{\frac{5}{8}}(u(s) - v(s))\| ds \end{aligned}$$

$$\text{故に } \|\Phi u - \Phi v\|_T \leq C_0 \beta_1 (\|u\|_T + \|v\|_T) \|u - v\|_T.$$

$u, v \in \beta_T$ であるから、

$$\begin{aligned} \|\Phi u - \Phi v\|_T & \leq 4C_0 \beta_1 \|u_0\|_T \|u - v\|_T \\ & = r \|u - v\|_T \end{aligned}$$

ii) 不等式 (*) を $u \in \beta_T$ に代えて用いれば

$$\begin{aligned} \|\Phi u\|_T & \leq \|u_0\|_T + 4C_0 \beta_1 \|u_0\|_T^2 \\ & \leq (1+r) \|u_0\|_T. \end{aligned}$$

従って $r \leq 1$ ならば $\Phi u \in \beta_T$ である。 証明終り。

命題 4.3

$r \equiv 4C_0 \beta_1 \|u_0\|_T < 1$ とする正数 T が存在すれば、作用素 Φ は contraction である。 従って不動点がある。

在る。

証明

命題 4.2 より 直ちに従う。

注意 4.4

条件 $\gamma < 1$ は、どのような場合にみたされることが調べよう。

(イ) $a \in D(A^{\frac{1}{4}})$ の時、

$$t^{\frac{3}{8}} \|A^{\frac{5}{8}} e^{-tA} a\| = t^{\frac{3}{8}} \|A^{\frac{3}{8}} e^{-tA} A^{\frac{1}{4}} a\| \leq \|A^{\frac{1}{4}} a\|$$

であるから、 $4\cos\beta_1 \|A^{\frac{1}{4}} a\| < 1$ が成り立つときには $\|A^{\frac{1}{4}} a\|$ が小さければ、 $T = \infty$ ととれる。又、任意の $a \in D(A^{\frac{1}{4}})$ に対して、 $\|t^{\frac{3}{8}} A^{\frac{5}{8}} u_0(t)\| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) であるから、

$\gamma < 1$ となるような $T = T(a)$ 存在する。

(ロ) $a \in D(A^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) の時、

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{8}} \|A^{\frac{5}{8}} u_0(t)\| &= t^{\varepsilon} \cdot t^{\frac{3}{8}-\varepsilon} \|A^{\frac{3}{8}-\varepsilon} e^{-tA} A^{\frac{1}{4}+\varepsilon} a\| \\ &\leq T^{\varepsilon} \|A^{\frac{1}{4}+\varepsilon} a\| \end{aligned}$$

故に、 $T^{\varepsilon} < (4\cos\beta_1 \|A^{\frac{1}{4}+\varepsilon} a\|)^{-1}$ なる T に対して $\gamma < 1$ となる。

正の不動点とは、実は方程式 (E) を満たすことが証明出来るが、ここでは省略する。

定理 4.5

$\gamma < 1$ となる $T > 0$ が存在するとき、(E) の解が B_T

のうらに $T = V$ 1 つ 存在する。

文献

- [1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions.
I : Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727;
II : Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.
- [2] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes,
Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 31 (1961), 308-340.
- [3] H. Fujita and H. Morimoto, On fractional powers of the Stokes operator, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1141-1143.
- [4] H. Fujita and H. Morimoto, Fractional powers of operators and interpolation of spaces applied to the Navier-Stokes equation (to appear)
- [5] D. Fujiwara, L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 15 (1968), 169-177.

- [6] P. Grisvard, Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 25 (1967), 40-63.
- [7] T. Kato, A generalization of the Heinz inequality, *Proc. Japan Acad.*, 37 (1961), 305-308.
- [8] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon-Breach, New York, 1963.
- [9] J. L. Lions, Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, *J. Math. Soc. Japan*, 14 (1962), 233-241.
- [10] J. L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes Vol I, Dunod, Paris, 1968.
- [11] J. L. Lions and J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publ. Math. de l'I. H. E. S.*, Paris, No 19, 1964.
- [12] T. Muramatsu, Products of fractional powers of operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 17 (1970), 581-590.