

CR 写像に対する分類問題について

林本 厚志

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

1. 序

$\mathbb{C}^n$ の滑らかな実 $2n-d$ 次元部分多様体 M が CR 部分多様体であるとは, M の点 p での正則接空間 $H_p(M)$ の次元が点 p によらず一定であるときをいい, 特にその実次元が $2n-2d$ のとき M は generic であるという [5]. 以下断らない限り, M と $\tilde{M}$ は, 実 $2n-d$ 次元の generic で実解析的な $\mathbb{C}^n$ の CR 部分多様体で原点を含むものを表し, $F: M \rightarrow \tilde{M}$ は $F(0) = 0$ をみたす CR 写像を表すものとする.

次の問題を考える.

問題. CR 多様体の間の CR 写像を, CR 幾何学の言葉を使って分類せよ.

ここでは, 上の問題に対して, 次のような解答を与える.

- (1) $M, \tilde{M}$ の原点での型がある条件をみたせば, F は定数写像に限る.
- (2) 原点での, F のある方向の微分が 0 でないなら, F は原点を含むある開集合上の正則写像の制限である.

(1) については $M, \tilde{M}$ が実超曲面の場合に M. S. Baouendi, L. P. Rothschild が次の定理を示している.

定理 (M. S. Baouendi-L. P. Rothschild) [3]. $M, \tilde{M}$ を滑らかな実超曲面とし, H をそれらの間の滑らかな CR 写像とする. $M, \tilde{M}$ が, それぞれ点 $p, H(p)$ で $D'Angelo$ の意味で有限型であるとするなら, H は定数か又は $Jac(H) \neq 0$ である.

この定理を余次元が高い場合に拡張したのが次の定理 1.1 である. 定理の中で, $M, \tilde{M}$ の原点での型は Bloom-Graham の意味である (定義 2.1) [4], [5]. また適当な座標変換をすることにより, generic な CR 部分多様体の定義関数は (2.1), (2.2) のようにできるので, 原点の十分小さい近傍 U で, $(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap U \subset M$ となるものが存在するとして構わない.

定理 1.1 [11], [12]. $M, \tilde{M}$ を generic な $\mathbb{C}^n$ の CR 部分多様体とし, $(f, g) = (f_1, \dots, f_{n-d}, g_1, \dots, g_d)$ を, それらの間の CR 写像とする. $M, \tilde{M}$ の原点での型をそれぞれ $(l_1, \dots, l_d), (\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_d)$ とする. 原点の十分小さい近傍 U に対し, (f, g) は $(f, g)((\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap U) \subset \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$ をみたすとする. このとき, (f, g) は定数か, 又は $l_j \geq \tilde{l}_j, j = 1, \dots, d$, が成り立つ.

よって, この系として次の分類定理を得る.

分類定理 1 [11]. 記号は定理 1.1 と同じとする. $l_j < \tilde{l}_j$ となる j が存在すれば, (f, g) は定数である.

次に (2) については, M. S. Baouendi, L. P. Rothschild が次のことを示している.

定理 (M. S. Baouendi-L. P. Rothschild) [2]. $M, \tilde{M}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実解析的な実超曲面とし, F をそれらの間の滑らかな CR 写像とする. $p \in M, p' = F(p)$ とする. 次のどちらか一方が成り立つなら, F は p の $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の近傍から $\mathbb{C}^{n+1}$ への正則写像の制限である.

- (1) F は点 p で *finite multiplicity* であり, $\tilde{M}$ は点 p' で *essentially finite* である.
- (2) M は点 p で *essentially finite* であり, F は $F'(CT_p M) \not\subset H_{p'}^{\mathbb{C}}(\tilde{M})$ をみたす.

この定理のように, 今までの多くの CR 多様体の間の CR 写像に対する正則拡張定理は, その写像が C^∞ 級であることを仮定していた [2], [3], [1]. それに対して, 固有正則写像の拡張定理の研究を通じて, C^m 級 ($m < \infty$) の CR 写像に対する正則拡張定理も示された [15], [7]. 次の分類定理 2 も, 写像は C^m 級 ($m < \infty$) であるという仮定で成立する. 定理の中で, 実超曲面 $M, \tilde{M}$ の定義関数が (2.1), (2.2) のように正規化されているとき, $F = (F_1, \dots, F_n) : M \rightarrow \tilde{M}$ が原点で Hopf Lemma Property をみたすとは $(\partial F_n / \partial s)(0) \neq 0$ が成立することをいう [1]. (上の M. S. Baouendi, L. P. Rothschild の定理の条件 (2) の $F'(CT_p M) \not\subset H_{p'}^{\mathbb{C}}(\tilde{M})$ は F が点 p で Hopf Lemma Property をみたすことを表している.) また C^m 級関数 $f_1, \dots, f_n$ に対して, $sp < f_1, \dots, f_n >_{\mathbb{C}} \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$ は, $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$ となる $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \setminus (0, \dots, 0)$ が存在しないことを表す. ここで $\mathcal{I}$ は $z, \bar{z}, s$ で生成されるイデアルとし, 原点での型は Bloom-Graham の意味であるとする [4], [5].

分類定理 2 [13]. $M, \tilde{M}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実超曲面とし, (f, f_{n+1}) をそれらの間の CR 写像とする. $\tilde{M}$ は原点で非退化なレビ形式を持ち, M の原点での型は $l (< +\infty)$ とする. 次の 3 つのうち, どれかがみたされれば (f, f_{n+1}) は原点の近傍上の正則写像の制限である.

- (1) M は, 原点で非退化なレビ形式を持ち, (f, f_{n+1}) は C^3 級で, 原点で Hopf Lemma Property をみたす.
- (2) M は, 原点で退化したレビ形式を持ち, $n = 1$. (f_1, f_2) は C^{l+1} 級で, 原点で Hopf Lemma Property をみたす.
- (3) M は, 原点で退化したレビ形式を持ち, $n \geq 2$. (f, f_{n+1}) は C^m 級 (m は十分大きい ∞ である必要はない) で, $sp < f_1, \dots, f_n >_{\mathbb{C}} \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$ をみたす.

これは Chong-Kyu Han の論文 [9] の主定理を利用することにより示される.

2. 定義と基本事項

$T_p^{\mathbb{C}}(M)$ で $T_p(M)$ の複素化, $H^{\mathbb{C}}(M)$ で $H(M)$ の複素化を表す. M の原点での型を定義するために, まず $T_0^{\mathbb{C}}(M)$ の部分ベクトル空間 $\mathcal{L}_0^k(M)$ ($k \in \mathbb{N}$) を次のように定義する. $L_j \in H^{\mathbb{C}}(M)$ に対して, 微分作用素 $[L_1[L_2 \dots [L_{k-1}, L_k]] \dots]_0$ を, $H^{\mathbb{C}}(M)$ で生成される, 原点での長さ k の Lie bracket という. そこで $\mathcal{L}_0^1(M)$ を $H_0^{\mathbb{C}}(M)$ とし, $\mathcal{L}_0^k(M)$ を, $H_0^{\mathbb{C}}(M)$ と, $H^{\mathbb{C}}(M)$ で生成される, 原点での長さ k 以下の Lie bracket で張られる $T_0^{\mathbb{C}}(M)$ の部分ベクトル空間とする.

定義 2.1 [4], [5]. M を実 $2n - d$ 次元の generic な CR 部分多様体とする. 原点が型 $(l_1, \dots, l_d)$ を持つとは, 次の 3 条件が成立することをいう.

- (1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_0^j(M) = 2n - 2d \quad (j < l_1),$

$$(2) \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_0^j(M) = 2n - 2d + i \quad (l_i \leq j < l_{i+1}),$$

$$(3) \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_0^j(M) = 2n - d \quad (j \geq l_d).$$

この時, $\text{type}_0 M = (l_1, \dots, l_d)$ と書き, 以後 $l_1 < \dots < l_d < \infty$ と仮定する.

$\text{type}_0 M = (l_1, \dots, l_d)$ の時, 適当な座標変換をすることにより, M の定義関数は次のように正規化できる.

$$(2.1) \quad \begin{cases} r_1 = t_1 - h_1(z, \bar{z}, s), \\ \vdots \\ r_d = t_d - h_d(z, \bar{z}, s). \end{cases}$$

ここで $z = x + iy \in \mathbb{C}^{n-d}, w = s + it \in \mathbb{C}^d$ であり,

$$(2.2) \quad h_j(z, \bar{z}, s) = \sum_{\substack{|\nu|+|\mu| \geq l_j \\ |\nu|, |\mu| \geq 1, |\tau| \geq 0}} h_{\nu, \mu, \tau}^j z^\nu \bar{z}^\mu s^\tau$$

は実解析的である. 特に, M が実超曲面で, 原点で非退化なレビ形式を持つなら, Chern-Moser [6] により, h は次のように正規化できる.

$$(2.3) \quad h(z, \bar{z}, s) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j |z_j|^2 + \sum_{\substack{|\nu|, |\mu| \geq 2 \\ \tau \geq 0}} h_{\nu, \mu, \tau} z^\nu \bar{z}^\mu s^\tau.$$

ここで $\lambda_j = +1$ 又は -1 である. $n = 2$ の時は, $\lambda_1 = +1$ とする. 以下 $\text{type}_0(\tilde{M}) = (\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_d)$ のように, $\tilde{M}$ に対する記号は, “ $\sim$ ” をつけて区別する.

M の定義関数が上のように正規化されているときに, M の原点の近傍での, 接 Cauchy-Riemann ベクトル場は次のように書ける.

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + i \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d \mu_{l,k} \frac{\partial h_k}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial s_l}, \quad j = 1, \dots, n-d.$$

ここで, $\mu_{l,k}$ は $(d \times d)$ 行列 $(I - i(\partial h / \partial s))^{-1}$ の第 (l, k) 成分である. 特に $d = 1$ なら, 次のように書ける.

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + i \frac{\partial h / \partial z_j}{1 - i(\partial h / \partial s)} \frac{\partial}{\partial s} \quad j = 1, \dots, n-1.$$

CR 部分多様体 M 上定義された CR 関数は M の定義関数 $r = t - h$ を使って次のように巾級数で表すことができる.

補題 2.1 [2]. *generic* な CR 部分多様体 M 上の実解析的な CR 関数 $F: M \rightarrow \mathbb{C}$ は, M の定義関数 $r(z, w) = t - h(z, \bar{z}, s)$ を使って次のように書ける.

$$F(z, \bar{z}, s) = \sum_{|\alpha|+|p| \geq 1} A_{\alpha, p} z^\alpha (s + ih)^p.$$

証明. $M \cap \{y = 0\}$ は totally real な多様体であるから, $F|_{M \cap \{y=0\}} = 0$ なら, $F = 0$ であることに注意する. F を $M \cap \{y = 0\}$ 上, 次のように展開する.

$$F(x, x, s) = \sum_{|\alpha|+|p| \geq 1} \tilde{A}_{\alpha,p} x^\alpha s^p.$$

次に $A_{\alpha,p}$ を, 次をみたすように帰納的に見つける.

$$\sum_{|\alpha|+|p| \geq 1} \tilde{A}_{\alpha,p} x^\alpha s^p = \sum_{|\alpha|+|p| \geq 1} A_{\alpha,p} x^\alpha (s + ih(x, x, s))^p.$$

$f(z, \bar{z}, s)$ を次のような巾級数とする.

$$f(z, \bar{z}, s) = \sum_{|\alpha|+|p| \geq 1} A_{\alpha,p} z^\alpha (s + ih(z, \bar{z}, s))^p.$$

このとき $F - f$ は M 上の CR 関数であり, $(F - f)|_{M \cap \{y=0\}} = 0$ であるから, 先の注意により補題が示される. $\square$

補題 2. 2 [11]. $(f, g) = (f_1, \dots, f_{n-d}, g_1, \dots, g_d) : M \rightarrow \tilde{M}$ を, generic な CR 部分多様体の間の実解析的 CR 写像とする. 原点の十分小さな近傍 U に対して,

$$(f, g)((\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap U) \subset \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$$

が成立するなら, f_j, g_k は次のように展開される.

$$f_j(z, \bar{z}, s) = \sum_{|\alpha| \geq 1, |p| \geq 0} a_{\alpha,p}^j z^\alpha (s + ih)^p, \quad j = 1, \dots, n-d,$$

$$g_k(z, \bar{z}, s) = \sum_{|q| \geq 1} b_{0,q}^k (s + ih)^q, \quad b_{0,q}^k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, d.$$

証明の概略. 補題 2.1 から f_j, g_k は次のように展開される.

$$f_j(z, \bar{z}, s) = \sum_{|\alpha|+|p| \geq 1} a_{\alpha,p}^j z^\alpha (s + ih)^p,$$

$$g_k(z, \bar{z}, s) = \sum_{|\beta|+|q| \geq 1} b_{\beta,q}^k z^\beta (s + ih)^q.$$

$(f, g)((\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \cap U) \subset \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$ から $|p| \geq 0$ に対して $a_{0,p} = 0$, $|q| \geq 1$ に対して $b_{0,q}^k \in \mathbb{R}$ を得る. これらを上の展開式に代入し, それらの式を $\text{Im} g_k = \tilde{h}(f, \bar{f}, \text{Reg})$, $k = 1, \dots, d$, に代入することにより, $|\beta| \geq 1, |q| \geq 1$ に対して, $b_{\beta,q}^k = 0$, $k = 1, \dots, d$ を得る. $\square$

C^m 級の CR 関数についても, 同様の議論により次のことが示される. 補題の中で, $\mathcal{I}$ は $z, \bar{z}, s$ で生成されるイデアルとする.

補題 2. 3 [13]. $(f_1, \dots, f_n, g) = (f, g) : M \rightarrow \tilde{M}$ を, $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実超曲面の間の C^m 級の CR 写像で $(f, g) = (0, 0)$ をみたすとする. 原点の十分小さい近傍 U が存在して,

$$f_j((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U) \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{m+1}},$$

$$\text{Im}g((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U) \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$$

をみたすならば, f_j, g は次のように展開される.

$$(2.4) \quad f_j(z, \bar{z}, s) \equiv \sum_{|\alpha| \geq 1, p \geq 0} a_{\alpha, p}^j z^\alpha (s + ih(z, \bar{z}, s))^p \pmod{\mathcal{I}^{m+1}},$$

$$(2.5) \quad g(z, \bar{z}, s) \equiv \sum_{q=1}^{\infty} b_{0, q} (s + ih(z, \bar{z}, s))^q \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}.$$

補題 2. 4. $(f_1, \dots, f_n, g) : M \rightarrow \tilde{M}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実超曲面の間の CR 写像で $(f, g) = (0, 0)$ をみたすとする. $(\partial g / \partial s)(0) \in \mathbb{R}$.

3. 点の型による分類

この節では, 定理 1.1 を証明し, それに対するいくつかの注意を与える. 定理の証明には次の補題が必要である. f_j, g_k は補題 2.2 のように展開されているとする.

補題 3. 1. g_d が恒等的に零ならば, $f_1, \dots, f_{n-d}$ も恒等的に零である.

証明. 仮定の下で, $\tilde{h}_d(f, \bar{f}, \text{Reg}) = 0$ である. つまり,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\nu|+|\mu| \geq \tilde{l}_d \\ |\nu|, |\mu| \geq 1, |\tau| \geq 0}} \tilde{h}_{\nu, \mu, \tau}^d \left(\sum_{|\alpha| \geq 1, |p| \geq 0} a_{\alpha, p} z^\alpha (s + ih)^p \right)^\nu \left(\sum_{|\alpha| \geq 1, |p| \geq 0} \bar{a}_{\alpha, p} \bar{z}^\alpha (s - ih)^p \right)^\mu \\ \times \left(\frac{1}{2} \sum_{|q| \geq 1} b_{0, q} [(s + ih)^q + (s - ih)^q] \right)^\tau = 0. \end{aligned}$$

$|\tau| = 0$ の場合を考える. 上の式で, $z, \bar{z}$ についての $\tilde{l}_d$ 次の項は

$$\sum_{\substack{|\nu|+|\mu| = \tilde{l}_d \\ |\nu|, |\mu| \geq 1}} \tilde{h}_{\nu, \mu, 0}^d \left(\sum_{|\alpha|=1, |p| \geq 0} a_{\alpha, p} z^\alpha (s + ih)^p \right)^\nu \left(\sum_{|\alpha|=1, |p| \geq 0} \bar{a}_{\alpha, p} \bar{z}^\alpha (s - ih)^p \right)^\mu = 0$$

をみたすから, $|\alpha| = 1, |p| \geq 0$ に対して, $a_{\alpha, p}^1, \dots, a_{\alpha, p}^{n-d} = 0$ を得る. 同様に, $2\tilde{l}_d$ 次, $3\tilde{l}_d$ 次, ... に注目することにより, 全ての α, p に対して, $a_{\alpha, p}^1, \dots, a_{\alpha, p}^{n-d} = 0$ を得て, 証明が終る. $\square$

次に定理の証明をする.

定理 1. 1 の証明. (f, g) が定数でないとする. $j = 1, \dots, d$ に対して, $Q_j = \{(q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Z}^d | q_1, \dots, q_d \geq 0, q_j \geq 1\}$ とおく. もし結論が成り立たないならば, $l_j < \tilde{l}_j$ となる j が存在し, その時 $j_0 = \min\{j | l_j < \tilde{l}_j\}$ とする. この時, 不等式

$$l_1 < \dots < l_{j_0} < \tilde{l}_{j_0} < \dots < \tilde{l}_d$$

が成立する. CR 写像 (f, g) は $\text{Img}_j = \tilde{h}_j(f, \bar{f}, \text{Reg})$ をみたす, つまり $j = 1, \dots, d$ に対して, 次の式が成立する.

$$(3.1) \quad \frac{1}{2i} \sum_{|q| \geq 1} b_{0,q}^j [(s+ih)^q - (s-ih)^q] \\ = \sum_{\substack{|\nu|+|\mu| \geq \tilde{l}_j \\ |\nu|, |\mu| \geq 1, |\tau| \geq 0}} \tilde{h}_{\nu, \mu, \tau}^j \left(\sum_{|\alpha| \geq 1, |p| \geq 0} a_{\alpha, p} z^\alpha (s+ih)^p \right)^\nu \left(\sum_{|\alpha| \geq 1, |p| \geq 0} \bar{a}_{\alpha, p} \bar{z}^\alpha (s-ih)^p \right)^\mu \\ \times \left(\frac{1}{2} \sum_{|q| \geq 1} b_{0,q} [(s+ih)^q + (s-ih)^q] \right)^\tau.$$

$j = j_0, \dots, d$ に対して, (3.1) の右辺の $z, \bar{z}$ についての最低次数は $\tilde{l}_{j_0}$ である. (3.1) の両辺から l_1 次, $\dots$, l_{j_0} 次 ($< \tilde{l}_{j_0}$) の項を取り出すことにより, 次の関係式を得る.

$$\sum_{|q| \geq 1} b_{0,q}^j s_1^{q_1} \dots s_k^{q_k-1} \dots s_d^{q_d} h_k^{(l_k)} = 0, \quad j = j_0, \dots, d, \quad k = 1, \dots, j_0.$$

ここで, $h_k^{(l_k)}$ は h_k に含まれる, z と $\bar{z}$ についての l_k 次の斉次多項式を表す. よって, 任意の $q \in Q_k$ に対して, $b_{0,q}^j = 0$ を得て, 次の結論 (B_{j_0}) を得る.

$$(B_{j_0}): \text{任意の } q \in \bigcup_{k=1}^{j_0} Q_k \text{ と } j = j_0, \dots, d \text{ に対して } b_{0,q}^j = 0.$$

補題 3. 2. 結論 (B_j) ($j_0 \leq j \leq d-1$) から結論 (B_{j+1}) が得られる.

補題 3. 2 の証明. 結論 (B_j) が成り立つと仮定する.

(I) $l_{j+1} < \tilde{l}_{j+1}$ のとき, 不等式

$$l_1 < \dots < l_{j_0} < \dots < l_{j+1} < \tilde{l}_{j+1} < \dots < \tilde{l}_d$$

が成り立つ. 上の議論で j_0 を $j+1$ に置きかえることにより, 結論 (B_{j+1}) が得られる.

(II) $l_{j+1} \geq \tilde{l}_{j+1}$ のとき, 不等式

$$l_1 < \dots < l_{j_0} < \tilde{l}_{j_0} < \dots < \tilde{l}_j < \tilde{l}_{j+1} \leq l_{j+1} < \dots < l_d$$

が成り立つので, $L_j \tilde{l}_j < l_{j+1} \leq (L_j + 1) \tilde{l}_j$ となる $L_j \in \mathbb{N}$ が存在する. 結論 (B_j) を g_j に代入すると, Img_j の $z, \bar{z}$ についての最低次数は $l_{j+1} (> L_j \tilde{l}_j)$ である. $\text{Img}_j = \tilde{h}_j(f, \bar{f}, \text{Reg})$ から $z, \bar{z}$ についての $\tilde{l}_j$ 次の項を取り出すと,

$$\sum_{\substack{|\nu|+|\mu|=\tilde{l}_j \\ |\nu|, |\mu| \geq 1}} \tilde{h}_{\nu, \mu, 0}^j \left(\sum_{|\alpha|=1, |p| \geq 0} a_{\alpha, p} z^\alpha s^p \right)^\nu \left(\sum_{|\alpha|=1, |p| \geq 0} \bar{a}_{\alpha, p} \bar{z}^\alpha s^p \right)^\mu = 0$$

を得る. よって, $|\alpha| = 1, |p| \geq 0$ に対して, $a_{\alpha,p}^1, \dots, a_{\alpha,p}^{n-d} = 0$ を得る. 同様に $\text{Img}_j = \tilde{h}_j(f, \bar{f}, \text{Reg})$ 内の $z, \bar{z}$ についての $2\tilde{l}_j$ 次, $3\tilde{l}_j$ 次, $\dots, L_j\tilde{l}_j$ 次を見ることにより, $1 \leq |\alpha| \leq L_j, |p| \geq 0$ に対して, $a_{\alpha,p}^1, \dots, a_{\alpha,p}^{n-d} = 0$ を得る. これらを $\text{Img}_{j+1} = \tilde{h}_{j+1}(f, \bar{f}, \text{Reg})$ に代入する. その式の, $z, \bar{z}$ についての l_{j+1} 次を取り出し, 不等式 $l_{j+1} \leq (L_j + 1)\tilde{l}_j < (L_j + 1)\tilde{l}_{j+1}$ と合わせると, 任意の $q \in Q_{j+1}$ に対して $b_{0,q}^{j+1} = 0$ を得る. これと結論 (B_j) を合わせると, 結論 (B_{j+1}) を得る. $\square$

定理の証明に戻る.

結論 (B_{j_0}) は示されていたので補題 3.2 と帰納法により, 結論 (B_d) を得る. よって, $g_d = 0$ を得て, 補題 3.1 により $f_1, \dots, f_{n-d} = 0$ を得る.

次の主張が示されれば, (f, g) が定数でないことに矛盾して, 定理の証明が終る.

主張. $f_1, \dots, f_{n-d}$ が恒等的に零なら $g_1, \dots, g_{d-1}$ も恒等的に零である.

仮定により先ず, $j = 1, \dots, d-1$ に対して, $\text{Img}_j = 0$, つまり次の式が成立している.

$$(3.2) \quad \sum_{|q| \geq 1} b_{0,q}^j \{(s + ih)^q - (s - ih)^q\} = 0, \quad j = 1, \dots, d-1.$$

$\zeta \in \mathbb{N} (\zeta \leq d-1)$ に対して, $g_d, \dots, g_{\zeta+1} = 0$ を仮定する. 結論 (B_ζ) と, (3.2) で $j = \zeta$ とした時の, $z, \bar{z}$ についての $l_{\zeta+1}, \dots, l_d$ 次を見ることにより, 全ての $q \in \bigcup_{k=\zeta+1}^d Q_k$ に対して, $b_{0,q}^\zeta = 0$ が成立する. これと, 結論 (B_ζ) を合わせることにより, $g_\zeta = 0$ を得る. よって帰納法により主張が得られ, よって定理の証明も終る. $\square$

注意.

- (1) $M, \tilde{M}$ が $\mathbb{C}^n$ 内の実解析的な pseudoellipsoid の境界なら $l/\tilde{l} \in \mathbb{N}$ である [10], [14]. しかし, 一般には $l/\tilde{l} \notin \mathbb{N}$ である [11], [12].
- (2) $n = 2, d = 1$ のときは $l/\tilde{l} \in \mathbb{N}$ である [11], [12].

4. CR 写像に対する正則拡張定理

この節では CR 写像に対する完全系 (complete system) についての Han の定理を使うことにより, 分類定理 2 を証明する. 先ず, 完全系の定義を与える.

定義 [8]. 関数 F が位数 K の完全系をみたすとは, $|\alpha| = K$ となる各多重指数 α に対して, 実解析的関数 H_α が存在して,

$$D^\alpha F = H_\alpha(z, D^\beta F; |\beta| \leq K-1)$$

が成立することをいう.

よって, C^K 級の関数が位数 K の完全系をみたすなら, それは実解析的な関数である. 写像が位数 K の完全系をみたすとはその各成分が位数 K の完全系をみたすこととする.

次の Han の定理を使う.

Han の定理 [9]. M^{2m+1} を, 非退化レビ形式を持つ実 $2m+1$ 次元実解析的 CR 多様体とし, $\{L_1, \dots, L_m\}$ を実解析的 CR 構造束の一次独立な切断とする. N を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実解析的な実超曲面で, 非退化レビ形式を持つとし, $n \geq m$ を仮定する. $f: M \rightarrow N$ を CR 写像とする. 正の整数 K が存在してベクトル $\{L^\alpha f: |\alpha| \leq K\}$ と $(0, \dots, 0, 1)$ で $\mathbb{C}^{n+1}$ が張られるならば, f は位数 $2K+1$ の完全系をみたす.

この定理の証明を詳しく見ることにより, M^{2m+1} が退化レビ形式を持つ場合でも成り立つことが分かる. Han の定理の正の整数 K を M のある点での型を使って表すことを考える. 分類定理 2 は次の定理の系として得られる. 定理の中で, 原点での型は Bloom–Graham の意味であり, 定理内の (I) の場合には $m \geq l+1$ を仮定する.

定理 4.1 [12]. $M, \tilde{M}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の実解析的な実超曲面で $(f, f_{n+1}) = (f_1, \dots, f_n, f_{n+1}): M \rightarrow \tilde{M}$ を C^m 級の CR 写像とする. $\tilde{M}$ は原点で非退化なレビ形式を持ち, $type_0 M = l (< +\infty)$ とする. 次の 2 通りを考える.

(I) M は原点で非退化なレビ形式を持つか, 又は $n=1$ で M は原点で退化するレビ形式を持つ.

(II) M は原点で退化するレビ形式を持ち, $n \geq 2$.

(I) の場合, (f, f_{n+1}) が原点で Hopf Lemma Property をみたすなら, それは位数 $l+1$ の完全系をみたす.

(II) の場合, (f, f_{n+1}) が $sp(f_1, \dots, f_n)_{\mathbb{C}} \not\equiv 0 \pmod{I^{m+1}}$ をみたすなら, それは位数が有限の完全系をみたす.

証明. 実解析的超曲面の定義関数は (2.1), (2.2), (2.3) のように正規化されているとする. (I) の場合を次の 2 通りに分ける.

(I-1) M は原点で非退化なレビ形式を持つ.

(I-2) $n=1$ で, M は原点で退化するレビ形式を持つ.

K を Han の定理の整数としたとき, (I-1) は $K=1$, (I-2) は $K=l/2$, (II) は $K < +\infty$ を示せばよい.

(I) の証明. 原点の十分小さい近傍 U に対して, 実解析的な曲線 γ で, 曲線 $(f, f_{n+1})((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U)$ を原点で m 位まで近似するものをとる. (f, f_{n+1}) は, 原点で Hopf Lemma Property をみたすことから, γ は原点での正則接空間 $H_0(\tilde{M})$ に横断的に交わる. よって, Chern–Moser [6] により適当な座標変換をすることによって, $(f, f_{n+1})((\{0\}^n \times \mathbb{R}) \cap U)$ は原点で $\{0\}^n \times \mathbb{R}$ に位数 m で接すると仮定してよい. つまり補題 2.3 の仮定をみたして, f_j, f_{n+1} はそれぞれ (2.4), (2.5) のように展開されているとしてよい. この座標変換により, M の定義関数の形は不変であることに注意する.

(I-1) の場合 $K=1$ を示すには,

$$\det \begin{pmatrix} L_1 f_1(0) & \dots & L_1 f_n(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n f_1(0) & \dots & L_n f_n(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_1, 0}^1 & \dots & a_{\alpha_1, 0}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\alpha_n, 0}^1 & \dots & a_{\alpha_n, 0}^n \end{pmatrix} \neq 0$$

を証明すればよい. ここで $\alpha_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (k 番目の成分のみ 1 で他は 0) とする. 簡単のため, 一番左の項を $\det(\text{Jac}(f)(0))$ と書く. 先ず, $\text{Im} f_{n+1} \equiv \tilde{h}(f, \bar{f}, \text{Ref}_{n+1})$

(mod $\mathcal{I}^{m+1}$), つまり

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & \frac{1}{2i} \left[\sum_{q \geq 1} b_{0,q} (s + ih(z, \bar{z}, s))^q - \sum_{q \geq 1} \bar{b}_{0,q} (s - ih(z, \bar{z}, s))^q \right] \\
 & \equiv \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j \left[\sum_{|\alpha| \geq 1, p \geq 0} a_{\alpha,p}^j z^\alpha (s + ih(z, \bar{z}, s))^p \right] \left[\sum_{|\alpha| \geq 1, p \geq 0} \bar{a}_{\alpha,p}^j \bar{z}^\alpha (s - ih(z, \bar{z}, s))^p \right] \\
 & \quad + \text{higher terms} \quad (\text{mod } \mathcal{I}^{m+1}).
 \end{aligned}$$

を考える. $h(z, \bar{z}, s)$ は (2.3) のように展開されているので, (4.1) の両辺の $z_i \bar{z}_k (i \neq k)$ の係数を比較することにより次の関係式を得る.

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j (a_{\alpha_i,0}^j) (\bar{a}_{\alpha_k,0}^j) = 0.$$

$n=1$ のときはこの式は考えない. (4.1) の両辺の $|z_k|^2$ の係数を比較することにより, 次の関係式を得る.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \lambda_k (b_{0,1} + \bar{b}_{0,1}) &= b_{0,1} \lambda_k \quad (\text{補題 2.4}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j |a_{\alpha_k,0}^j|^2.
 \end{aligned}$$

よって, 次の行列に関する等式を得る.

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{\alpha_1,0}^1 & \cdots & \bar{a}_{\alpha_1,0}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{\alpha_n,0}^1 & \cdots & \bar{a}_{\alpha_n,0}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 a_{\alpha_1,0}^1 & \cdots & \tilde{\lambda}_1 a_{\alpha_n,0}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\lambda}_n a_{\alpha_1,0}^n & \cdots & \tilde{\lambda}_n a_{\alpha_n,0}^n \end{pmatrix} = b_{0,1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

よって, $\det(\text{Jac}(f)(0)) \neq 0$ であることと,

$$b_{0,1} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial s}(0) \neq 0$$

であることが同値であることから, 証明が終る.

(I-2) の場合 $L_1^{l/2} f_1(0,0) = a_{l/2,0}^1 \neq 0$ を示せばよい. §3 の注意 (2) により $l/2 \in \mathbb{N}$ である. (I-1) と同じように, CR 写像 (f_1, f_2) の各成分は補題 2.3 のように展開されている. 次の関係式から始める.

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & \frac{1}{2i} \left[\sum_{q=1}^{\infty} b_{0,q} (s + ih(z, \bar{z}, s))^q - \sum_{q=1}^{\infty} \bar{b}_{0,q} (s - ih(z, \bar{z}, s))^q \right] \\
 & \equiv \left[\sum_{\alpha \geq 1, p \geq 0} a_{\alpha,p}^1 z^\alpha (s + ih(z, \bar{z}, s))^p \right] \left[\sum_{\alpha \geq 1, p \geq 0} \bar{a}_{\alpha,p}^1 \bar{z}^\alpha (s - ih(z, \bar{z}, s))^p \right] \\
 & \quad + \text{higher terms} \quad (\text{mod } \mathcal{I}^{m+1}).
 \end{aligned}$$

$l \geq 4$ の場合. (4.2) の両辺で $z, \bar{z}$ についての $l-1$ 次未満の項を比較することにより $1 \leq \alpha \leq (l/2) - 1, p \geq 0, \alpha + p \leq m$ に対して, $a_{\alpha,p}^1 = 0$ を得る. $h^{(l)}$ により h に含まれる $z, \bar{z}$ についての l 次の斉次多項式を表す. $a_{\alpha,p}^1 = 0$ ($1 \leq \alpha \leq (l/2) - 1, p \geq 0, \alpha + p \leq m$) を (4.2) に代入して, $z, \bar{z}$ の l 次の項を取り出すことにより, 次の関係式を得る.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{q \geq 1} (b_{0,q} + \bar{b}_{0,q}) q s^{q-1} h^{(l)} \\
& \equiv \sum_{p \geq 0} a_{l,p}^1 z^l s^p \sum_{p \geq 1} \bar{a}_{0,p}^1 s^p + \sum_{\alpha=1}^{(l/2)-1} \left(\sum_{p \geq 0} a_{l-\alpha,p}^1 z^{l-\alpha} s^p \right) \left(\sum_{p \geq m-\alpha+1} \bar{a}_{\alpha,p}^1 \bar{z}^\alpha s^p \right) \\
& \quad + \sum_{p \geq 0} a_{\frac{l}{2},p}^1 z^{\frac{l}{2}} s^p \sum_{p \geq 0} \bar{a}_{\frac{l}{2},p}^1 \bar{z}^{\frac{l}{2}} s^p \\
& \quad + \sum_{\alpha=1}^{(l/2)-1} \left(\sum_{p \geq m-\alpha+1} a_{\alpha,p}^1 z^\alpha s^p \right) \left(\sum_{p \geq 0} \bar{a}_{l-\alpha,p}^1 \bar{z}^{l-\alpha} s^p \right) + \sum_{p \geq 0} \bar{a}_{l,p}^1 \bar{z}^l s^p \sum_{p \geq 1} a_{0,p}^1 s^p \\
& \hspace{25em} (\text{mod } \mathcal{I}^{m+1})
\end{aligned}$$

この式で s が入っていない項を比較し, h の展開式から,

$$2|a_{\frac{l}{2},0}^1|^2 = h_{\frac{l}{2},\frac{l}{2},0}(b_{0,1} + \bar{b}_{0,1})$$

を得る.

$l = 2$ の場合. (4.2) の両辺の $z, \bar{z}$ についての 2 次の項を比較し, $h_{1,1,0} = 1$ であることを使うと, $2|a_{1,0}^1|^2 = b_{0,1} + \bar{b}_{0,1}$ を得る. どちらの場合も補題 2.4 を使うことにより,

$$|a_{\frac{l}{2},0}^1|^2 = h_{\frac{l}{2},\frac{l}{2},0} b_{0,1} = h_{\frac{l}{2},\frac{l}{2},0} \frac{\partial f_2}{\partial s}(0)$$

となり, (f_1, f_2) が原点で Hopf Lemma Property をみたすことから, 証明が終る.

(II) の証明 $K < +\infty$ であることを示すには, 次の中に n 個の一次独立なベクトルが存在すればよい.

$$(4.3) \quad \begin{cases} L^{\theta_1} f(0, s) = (L^{\theta_1} f_1(0, s), \dots, L^{\theta_1} f_n(0, s)) \\ L^{\theta_2} f(0, s) = (L^{\theta_2} f_1(0, s), \dots, L^{\theta_2} f_n(0, s)) \\ \vdots \\ L^{\theta_n} f(0, s) = (L^{\theta_n} f_1(0, s), \dots, L^{\theta_n} f_n(0, s)) \\ \vdots \\ L^{\theta} f(0, s) = (L^{\theta} f_1(0, s), \dots, L^{\theta} f_n(0, s)) \end{cases}$$

ここで s は実変数, $\theta_1, \dots, \theta_n, \dots, \theta$ は多重指数で, $|\theta| (< \infty)$ は十分大きく, $|\theta_1| \leq \dots \leq |\theta_n| \leq \dots \leq |\theta|$ をみたすとする. (4.3) の中に $k (< n)$ 個しか一次独立なものがな

かつたとすると、適当に番号を付け替えることにより、 $c_1^{k+1}, \dots, c_k^{k+1}, \dots, c_1^n, \dots, c_k^n \in \mathbb{C}$ で次の $(n-k)$ 個の関係式をみたすものが存在する。

$$(4.4.k+1) \quad L^\alpha f_{k+1}(0, s) = \sum_{j=1}^k c_j^{k+1} L^\alpha f_j(0, s),$$

$$\vdots$$

$$(4.4.n) \quad L^\alpha f_n(0, s) = \sum_{j=1}^k c_j^n L^\alpha f_j(0, s).$$

ここで α は多重指数で $1 \leq |\alpha| \leq |\theta|$ をみたすものとする。

$$L^\alpha f_j(0, s) \equiv \sum_{p \geq 0} \alpha! a_{\alpha, p}^j s^p \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$$

であることから、(4.4.k+1), ..., (4.4.n) は

$$\sum_{p \geq 0} a_{\alpha, p}^{k+1} s^p \equiv \sum_{j=1}^k \sum_{p \geq 0} c_j^{k+1} a_{\alpha, p}^j s^p \pmod{\mathcal{I}^{m+1}},$$

$$\vdots$$

$$\sum_{p \geq 0} a_{\alpha, p}^n s^p \equiv \sum_{j=1}^k \sum_{p \geq 0} c_j^n a_{\alpha, p}^j s^p \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}.$$

となる。これらを s についての巾級数と見ることにより、 $0 \leq p \leq m - |\alpha|$ に対して

$$a_{\alpha, p}^{k+1} = \sum_{j=1}^k c_j^{k+1} a_{\alpha, p}^j, \dots, a_{\alpha, p}^n = \sum_{j=1}^k c_j^n a_{\alpha, p}^j$$

を得る。これらの式から次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} f_{k+1}(z, \bar{z}, s) &\equiv \sum_{|\alpha|+p \geq 1} a_{\alpha, p}^{k+1} z^\alpha (s + ih)^p \pmod{\mathcal{I}^{m+1}} \\ &\equiv \sum_{|\alpha|+p \geq 1} \left\{ \sum_{j=1}^k c_j^{k+1} a_{\alpha, p}^j \right\} z^\alpha (s + ih)^p \pmod{\mathcal{I}^{m+1}} \\ &\equiv \sum_{j=1}^k c_j^{k+1} f_j(z, \bar{z}, s) \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}. \end{aligned}$$

同様にして、

$$f_{k+2}(z, \bar{z}, s) \equiv \sum_{j=1}^k c_j^{k+2} f_j(z, \bar{z}, s), \dots, f_n(z, \bar{z}, s) \equiv \sum_{j=1}^k c_j^n f_j(z, \bar{z}, s) \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$$

が得られる。これらは仮定 $sp < f_1, \dots, f_n >_{\mathbb{C}} \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{m+1}}$ に矛盾する。よって、(4.3) 内には n 個の一次独立なベクトルが存在し、(4.3) の各ベクトルに対して、 $s = 0$ とおくことにより証明が終る。□

REFERENCES

1. M. S. Baouendi, X. Huang and L. P. Rothschild, *Nonvanishing of the differential of holomorphic mappings at boundary points*, Math. Res. Letters. **2** (1995), 737–750.
2. M. S. Baouendi and L. P. Rothschild, *Germes of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent.Math. **93** (1988), 481–500.
3. ———, *Remarks on the generic rank of a CR mappings*, J. Geom. Analysis **2** (1992), 1–9.
4. T. Bloom and I. Graham, *On 'type' conditions for generic real submanifolds of $\mathbb{C}^n$* , Invent.Math. **40** (1977), 217–243.
5. A. Boggess, *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*, CRC Press, 1991.
6. S. S. Chern and J. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.
7. K. Diederich and J. E. Fornæss, *Proper Holomorphic Mappings Between Real-Analytic Pseudoconvex Domains in $\mathbb{C}^n$* , Math. Ann. **282** (1988), 681–700.
8. C. K. Han, *Rigidity of CR submanifolds and analyticity of CR immersions*, Math. Ann. **287** (1990), 229–238.
9. ———, *Complete differential system for the mappings of CR manifolds of nondegenerate Levi forms*, preprint.
9. A. Hayashimoto, *Application of the C^ω -extendability theorem for proper holomorphic mappings to the classification of the mappings between two pseudoellipsoids*, Math. Japonica **44** (1996), 221–237.
11. ———, *On the classification theorem for CR mappings*, preprint.
12. ———, *On proper holomorphic mappings and CR mappings*, Proc. Geometric Complex Analysis (1996), 235–238.
13. ———, *On the complete system for CR mappings and its application*, preprint.
14. M. Landucci, *On the proper holomorphic equivalence for a class of pseudoconvex domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1988), 807–811.
15. J. M. Trépreau, *Sur le prolongement des fonctions CR définies sur une hypersurface réel de class C^2 dans $\mathbb{C}^n$* , Invent. Math. **83** (1986), 583–592.

CHIKUSA-KU, NAGOYA, 464-01, JAPAN

E-mail address: ahayashi@math.nagoya-u.ac.jp