

ある種の表現からの hyperbolic 3-orbifolds の構成

九工大 相馬輝彦 (Teruhiko Soma)

この講演の目標は Thurston [6] によって提出された 3 次元多様体の Geometrization Conjecture の解決に (少しでも) 寄与できるような結果を得るため問題となるのは何かを明らかにすることにある。現在、講演者が最も注目しているのは、Thurston が 3-orbifolds の geometrization theorem の中で使用している hyperbolic 3-cone-manifolds の構造の変形理論である。この理論を使って "擬" hyperbolic 3-manifold が本当の hyperbolic 3-manifold であることを示したいのである。

まず問題となるのは singular locus の combinatorial type の選択である。与えられた 3-manifold M が hyperbolic であることを証明したいとき、 M の中の hyperbolic knot K を選んできて、 $M-K$ 上の complete hyperbolic structure から出発する (M, K) 上の hyperbolic 3-cone-manifold structure の変形を考えたとする。もし、実際にこの変形が cone-angle

2π の地点まで到達できたとすると、 K は hyperbolic 3-manifold M 中の geodesic loop になる。このような loop は $\pi_1(M)$ の中で K と同じ conjugacy class に入る loops の中で唯一つである。したがって我々は M が海の物とも山の物とも分らないうちから、そうなるような hyperbolic knot K を用意しなければならない。これはまず不可能であろう。

問1. “擬” hyperbolic 3-manifold M が与えられたとき、 M 上の 1-graph Σ で (M, Σ) 上の hyperbolic 3-cone-manifold の変形を考えるのに都合のよいものを見つけよ。また Π から $SL_2(\mathbb{C})$ への表現の空間 $X(\Pi)$ (ただし $\Pi = \pi_1(M - \Sigma)$) の中の実曲線 γ で上の変形の “水先案内人” になるものを見つけよ。

この問の後半部分の解答は [5] で与えた。前半部分は次の問と関連して、今度の講演の主なテーマとなっている。

問2. (M, Σ) の hyperbolic 3-cone-manifolds の構造の変形が cone-angle 2π 以下で geometric limit に到達するとき、それから先に進めるように hyperbolic 3-cone-manifold の概念を一般化せよ。

問3. 問1 で与えられた実曲線 γ が cone-angle 2π 以下で $X(\Pi)$ の end に到達してしまうとき, (M, Σ) または M はどのような位相的性質を持つか。(この問は、裏を返せば、あらかじめ (M, Σ) または M に何らかの位相的な仮定をしておくことによって γ が $X(\Pi)$ の end に逃げていくのを避ける方法を求めることにある。)

問4. 問2 で与えられた hyperbolic 3-cone-manifold の概念を一般化したもの B が cone-angle 2π の地点まで到達したとき, この B から M 上の hyperbolic structure を定義することは可能か。

講演者は問2 の中で求められている hyperbolic 3-cone-manifold の概念の一般化として bent manifold という概念を考えた。また、これに関連して次の定理を得た(使用されている定義は[4]の中で説明する予定である)。

定理. M を closed orient. 3-manifold とし, $\mathcal{K}$ を M の simplicial triangulation とする。 $\Sigma = |\mathcal{K}^{(1)}|$, $\Pi = \pi_1(M - \Sigma)$ とおく。表現 $\rho: \Pi \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ が non-degenerate, α -realizable であれば、 ρ を holonomy とし持つような $\mathcal{K}$ 上の bent

manifold B が (up to isometry で) 唯一つ存在する。

問3、問4について講演者は何の解答も持っていない。問3に対しては、Morgan-Shalenの理論[2], [3], 問4に対しては、Hodgson[1]の結果が解決への何らかの手掛りを与えているように思っているが、これは講演者の希望的観測にすぎないかもしれない。(終)

参考文献

- [1] C. Hodgson, Thesis (?)
- [2] J. Morgan and P. Shalen, Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures, I, Ann. of Math. 120 (1984), 401-476.
- [3] _____ and _____, _____, II, preprint.
- [4] T. Soma, Construction of hyperbolic 3-orbifolds from certain representations, 準備中.
- [5] 相馬輝彦, Hyperbolic 3-cone-manifolds について, 数理解析研講究録 542 (1985), 128-143.
- [6] W. Thurston, Three dimensional manifolds,

Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull.
Amer. Math. Soc. (New Series) 6 (1982), 357-381.