

代数体における種々の素数定理

学習院大 理 三井孝美

§1. K を n 次の代数体とし, K の実共役を $K^{(g)}$ ($g=1, \dots, r_1$), 複素共役を $K^{(p)} = \overline{K^{(p+r_2)}}$ ($p=r_1+1, \dots, r_1+r_2$) とする ($n=r_1+2r_2$). K の数 μ の $K^{(i)}$ の中の共役を, $\mu^{(i)}$ と記す.

K の整数 ω が生成する単項イデアル (ω) が素イデアルのとき, ω を K の素数という.

K の数は n 次元空間の点とみなされるから, K の素数がどのように存在するかという問題は, n 次元空間の素数分布の問題と考えられる. これに対して, $N(\omega)$ を考えるときは, 1次元内の分布の問題となり, 素イデアル定理などがその例である.

筆者は先に, 素イデアル定理について, 次の結果を得た ([4]);

$$(1) \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} 1 = \text{li}(x) + O\left(x^{\frac{1}{5}} \exp(-c(\log x)^{\frac{3}{5}} / (\log \log x)^{\frac{1}{5}})\right),$$

とて $li(x)$ は素数積分である。

一方、代数体における素数の分布の問題に関して、筆者は次のような素数定理を得た ([3]) ;

$\gamma_1, \dots, \gamma_n$ は正数で, $\gamma_p = \gamma_{p+r_2}$ ($p = r_1+1, \dots, r_1+r_2$) なるものとし, $\log \gamma_i / \log \gamma_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) は有界とする. $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{r_2}$ を $[0, 1]$ 中の数として, 次の条件を満たす素数 ω の個数を $\pi(\gamma_g; \vartheta_p) = \pi(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \vartheta_1, \dots, \vartheta_{r_2})$ とする;

$$\begin{cases} 0 < \omega^{(g)} \leq \gamma_g & (g = 1, \dots, r_1), \\ |\omega^{(p)}| \leq \gamma_p & (p = r_1+1, \dots, r_1+r_2), \\ 0 < \arg \omega^{(p+r_2)} \leq 2\pi\vartheta_p & (p = 1, \dots, r_2). \end{cases}$$

とるとき

$$(2) \quad \pi(\gamma_g; \vartheta_p) = \frac{n_0}{h_0 R_0} \vartheta_1 \dots \vartheta_{r_2} \int_2^{\gamma_1^{e_1}} dt_1 \dots \int_2^{\gamma_{r+1}^{e_{r+1}}} \frac{dt_{r+1}}{\log(t_1 \dots t_{r+1})} + O(\bar{\gamma} \exp(-c(\log \bar{\gamma})^{1/2})).$$

とて $\bar{\gamma} = \gamma_1 \dots \gamma_n$, $r = r_1 + r_2 - 1$, $e_i = 1$ ($1 \leq i \leq r_1$), $= 2$ ($r_1+1 \leq i \leq r+1$) とあり, n_0, h_0, R_0 はそれぞれ, K 内の総正な 1 の根の個数, 狭義のイデアル類数, 総正な基本単数による単数基準である。

とて, (2) の残余項は, (1) の形に改良できる, 即ち,

(2) の残余項は

$$O(\bar{Y} \exp(-c(\log \bar{Y})^{3/5} / (\log \log \bar{Y})^{1/5}))$$

となるのである。これが我々の主要定理であり、それを示すためには、[4]と同様、三角和の方法を用い、一オゴ、素数の分布に関するいくつかの予備的な定理を求めなければならぬ。これが、「種々の素数定理」と表題にいう所以である。

はじめに、量指標について、必要な事柄を述べておこう。

K の総正な単数の群を E_0 と記し、 ω_0 を E_0 の中の 1 の根の数として、 $\zeta = e^{2\pi i/\omega_0}$ とおく。イデアル類は狭義で考えることとし、首類を C_0 で表わす。 K の総正な基本単数を $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ とし、 r 次の行列

$$(\log |\zeta_k^{(i)}|)_{1 \leq i, k \leq r}$$

の逆行列を $(\alpha_{ik})_{1 \leq i, k \leq r}$ とする。

Hecke が [1] で導入したように、イデアル数を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \dots$ と記すこととし、non-zero なイデアル数 $\hat{\mu}$ に対し、次のような函数を定義する：

$$W_g(\hat{\mu}) = \sum_{p=1}^r \alpha_p^{(g)} (\log |\hat{\mu}^{(p)}| - \frac{1}{n} \log |N(\hat{\mu})|) \quad (g=1, \dots, r),$$

$$\omega_p(\hat{\mu}) = \frac{1}{2\pi} \arg \hat{\mu}^{(p+r_1)} - \frac{1}{2\pi} \sum_{g=1}^r W_g(\hat{\mu}) \arg \zeta_g^{(p+r_1)} \quad (p=1, \dots, r_2).$$

さらに, $m_1, \dots, m_r, l_1, \dots, l_{r_2}$ は有理整数とし, $\{m_g\}$ は任意, $\{l_p\}$ は

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{r_2} l_p \arg z_k^{(p+r_1)} = \text{有理整数}$$

となるものとする.

n (上のような $\{W_g(\hat{\mu}), \omega_p(\hat{\mu}), m_g, l_p\}$ により定義される $\hat{\mu}$ の函数

$$(4) \quad \lambda(\hat{\mu}) = \exp \left\{ 2\pi i \left(\sum_{g=1}^r W_g(\hat{\mu}) m_g + \sum_{p=1}^{r_2} \omega_p(\hat{\mu}) l_p \right) \right\}$$

を, E_0 に関する量指標 と言うのである.

$z \in \mathbb{C}^n$, $W_g(\hat{\mu})$ を $\log |\hat{\mu}^{(p)}|$ ($p=1, \dots, r+1$) の 1 次結合の形に表わして

$$W_g(\hat{\mu}) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(g)} \log |\hat{\mu}^{(p)}| \quad (g=1, \dots, r)$$

とすれば, 量指標は

$$(5) \quad \lambda(\hat{\mu}) = \exp \left\{ i \left(\sum_{g=1}^{r+1} v_g \log |\hat{\mu}^{(g)}| + \sum_{p=1}^{r_2} l_p \arg z_k^{(p+r_1)} \right) \right\}$$

とも表わされる. $z \in \mathbb{C}^n$

$$v_g = \sum_{k=1}^r e_g^{(k)} \left(2\pi m_{gk} - \sum_{p=1}^{r_2} l_p \arg z_k^{(p+r_1)} \right) \quad (g=1, \dots, r+1)$$

である. (4) は $\{m_g, l_p\}$ を, (5) は μ を明示した形である.

り, それぞれ利用される.

もう少し一般に, $\hat{\mu}$ の符号条件を考慮した量指標も, 次のように考えられる;

K の non-zero なイデアル数 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ に対して, $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ を $\hat{\alpha}/\hat{\beta} > 0$ (> 0 は正であることを表わす記号) により定義すると, この関係により, イデアル数は類別され, この類は, 位数が 2^f 元 (f は K の絶対類数) のアーベル群を作る. この群の指標を χ で表わして, χ と λ の積 $\chi\lambda$ を, やはり, 量指標という.

E_0 上で $\chi\lambda = 1$ となることは容易にわかるが, 特に, K のすべての単数 ε に対して $\chi\lambda(\varepsilon) = 1$ となるときは, イデアル数 $\hat{\alpha}$ に対する値 $\chi\lambda(\hat{\alpha})$ は, $\hat{\alpha}$ に対応するイデアル $\mathfrak{a} = (\hat{\alpha})$ だけによって決まるから, $\chi\lambda(\mathfrak{a}) = \chi\lambda(\hat{\alpha})$ とおいて, $\chi\lambda$ をイデアル上の函数と考えることができる. このような量指標を イデアルに対する量指標 といい, このときは, セータ函数

$$\zeta(s, \chi\lambda) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi\lambda(\mathfrak{a}) / N(\mathfrak{a})^s = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi\lambda(\mathfrak{p}) / N(\mathfrak{p})^s)^{-1}$$

($\text{Re } s > 1$) を定義することが出来る. (もっと一般に, E_0 の代りに $\text{mod } \hat{m}$ の単数群をとって量指標を定義することも出来るが, ここでは, E_0 にもとづく場合だけについて

述べた。詳しくは Hecke [1], Rademacher [5] を参照されたい。) なお, λ に対して

$$\|\lambda\| = 3 + \sum_{g=1}^r |m_g| + \sum_{p=1}^{r_2} |l_p|$$

と置く。

さて, 我々の目標に達するために必要な定理をあげよう。

はじめは, 三角和の評価に関する定理で, [4], Th. 1 の, 量指標をもつ場合への一般化である。

定理 I $\mathfrak{n}$ を K のイデアルとし, C_0 に属し, かつ $\mathfrak{n}$ で割れるようなイデアルの集合を $L(\mathfrak{n})$ と記す。 χ_λ をイデアル λ に対する量指標とし, t を正数, A, B を次のような数とする:

$$\exp\{(\log(t+\|\lambda\|))^{2/3}\} \leq A < B \leq 2A \leq 2(t+\|\lambda\|)^{8n}.$$

さらに, 次のような和を定義する:

$$S(t, \chi_\lambda; A, B) = \sum_{\substack{b \in L(\mathfrak{n}) \\ A \leq N(b) < B}} \chi_\lambda(b) \exp(2\pi i t \log N(b)).$$

2.9 と き

$$|S(t, \chi_\lambda; A, B)| \leq c_1 A^{1-c_2/\alpha^2}$$

2.10 と き

$$\alpha = n \log(t + \|\lambda\|) / \log A$$

で、 c_1, c_2 は λ に関係しない定数である。┘

次は、素イデアルに定理に対応するような定理である (ω はいつも素数を意味するものとする)。

定理 II λ を量指標とするとき

$$\sum_{\substack{N(\omega) \leq x \\ (\omega) \in C_0}} \lambda(\omega) = E(\lambda) h_0^{-1} \text{li}(x) + O(x \log \|\lambda\| \exp(-c F_\lambda(x))).$$

2212

$$E(\lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda = 1), \\ 0 & (\lambda \neq 1), \end{cases}$$

$$F_\lambda(x) = \log x / \left\{ (\log x)^{3/5} (\log \log x)^{1/5} + (\log \|\lambda\|)^{2/3} (\log \log \|\lambda\|)^{1/3} \right\}$$

である。┘

もう少し一般に

定理 II' χ_λ をイデアルに対する量指標とあるとき

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \chi_\lambda(\mathfrak{p}) = E(\chi_\lambda) \text{li}(x) + O(x \log \|\lambda\| \exp(-c F_\lambda(x))).$$

2212

$$E(\chi_\lambda) = \begin{cases} 1 & (\chi_\lambda = 1), \\ 0 & (\chi_\lambda \neq 1). \end{cases}$$

さらに次のような一種の素数定理が得られる：

定理 III $\pi(x; \alpha_0, \beta_p) = \pi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_{r_2})$

を、次の条件をみたす素数 ω の個数とする：

$$\begin{cases} \omega > 0, & N(\omega) \leq x, \\ 0 \leq w_g(\omega) < \alpha_g \leq 1 & (g=1, \dots, r), \\ 0 \leq w_p(\omega) < \beta_p \leq 1 & (p=1, \dots, r_2) \end{cases}$$

2 のとき

$$\pi(x; \alpha_g, \beta_p) = h_0^{-1} w_0 \alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_{r_2} \operatorname{li}(x) + O(x \exp(-cQ(x))).$$

2 ≥ 12

$$Q(x) = (\log x)^{3/5} / (\log \log x)^{1/5}$$

である。

さらに 2 の系として

定理 IV $\pi_0(x; \alpha_g, \nu_p) = \pi_0(x; \alpha_1, \dots, \alpha_r, \nu_1, \dots, \nu_{r_2})$

を、次の条件をみたす素数 ω の個数とする：

$$\begin{cases} \omega > 0, & N(\omega) \leq x, \\ 0 \leq w_g(\omega) < \alpha_g \leq 1 & (g=1, \dots, r), \\ 0 \leq \arg \omega^{(p+r_1)} < 2\pi \nu_p (\leq 2\pi) & (p=1, \dots, r_2) \end{cases}$$

2 のとき

$$\pi_0(x; \alpha_g, \nu_p) = h_0^{-1} w_0 \alpha_1 \dots \alpha_r \nu_1 \dots \nu_{r_2} \operatorname{li}(x) + O(x \exp(-cQ(x))).$$

以上の諸定理から、我々の目標の結果が得られるのである

が、この最終段階は、[3], §4 を殆どそのまま利用できるから、ここでは省略し、定理 I, II, III について説明しよう。

§2. 定理 I の証明

まず次の定理からはじめようであるが、その証明は、[4], Lemma 1 と同じだから省略する：

定理 2.1 Ω の元 μ で、次の条件

$$(6) \quad \mu > 0, \quad A \leq N(\mu) < B, \quad 0 \leq W_q(\mu) < 1 \quad (q=1, \dots, r)$$

をみたすものの集合を $\mathcal{M}$ とすると

$$(7) \quad S(t, X\lambda; A, B) = \frac{1}{n_0} \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \lambda(\mu) \exp(2\pi i t \log N(\mu)).$$

イデールの集合を、 n 次元空間を考えると、その中の整数の集合におきかえるこの方法は、解析数論では、Weber 以来、Landau, Hecke, Rademacher 等により繰返し使用されている周知の方法である。現代式には、 μ を連続変数でおきかえて、 E_0 の作用の下での基本領域を考えるとといった方が理解されやすいかも知れない。(6) はこのことを具体的に表わしているのであるが、特に $0 \leq W_q(\mu) < 1$ なる式が基本的である。

さて、 $S(t, X\lambda; A, B)$ を評価するには、(7) の右辺をさらに細分して、次のような和

を考へる:

$$S(v) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{M-1} F\left(v + \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i\right).$$

2.2.12

$$F(\mu) = \lambda(\mu) \exp(2\pi i t \log N(\mu))$$

2.2.13 あり, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ は $\mathcal{O}$ の基底,

$$M = [A_0^{1-\delta}], \quad A_0 = A^{1/n}, \quad \delta = 1/200,$$

v は, $\mathcal{O}$ に含まれて

$$v = M \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i$$

の形をもつ数である. (2.2.14 とき

$$c_1 A_0 \leq |v^{(i)}| \leq c_2 A_0 \quad (i=1, \dots, n)$$

となつてゐる.)

$S(v)$ の評価に際しては, [4] の場合と異なり, 量指標 λ に含まれる $\{m_b, l_p\}$ がどのように影響するか考慮しなければならぬので, 次のような工夫をする;

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0), \\ -1 & (x < 0). \end{cases}$$

として,

$$\theta_k = \begin{cases} \sigma(2\pi t + v_k) & (k=1, \dots, r_1), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \sigma(4\pi t + v_k) + i \sigma(l_k) \} & (k=r_1+1, \dots, r_1+r_2), \\ \overline{\theta_{k-r_2}} & (k=r_1+r_2+1, \dots, r_1+2r_2) \end{cases}$$

を定義し、これに対して、 $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ を、次の 1 次方程式系

$$\sum_{i=1}^n x_i^0 \gamma_i^{(k)} = v^{(k)} \theta_k \quad (k=1, \dots, n)$$

の解とする。 $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ は実数としてきまる。 $(\gamma_i^{(k)})_{1 \leq i, k \leq n}$ は正則だから

$$x_j^0 \ll \max_k (|v^{(k)}|) \ll A_0 \quad (j=1, \dots, n).$$

さらに、 $L = (\log A)^{2/3}$ とし、

$$d = ([LA_0^{-1} x_1^0], \dots, [LA_0^{-1} x_n^0])$$

(最大公約数) とおく。このとき $d \neq 0$ であるから、 $d > 0$ としよく、

$$m_{1i} = [LA_0^{-1} x_i^0] / d \quad (i=1, \dots, n)$$

とおく。この $m_{11}, \dots, m_{1n}$ から、[4], p. ~~22~~²³8 に述べたと同様に、有理整数 m_{ik} ($i=2, \dots, n; k=1, \dots, n$) を適当に求め、 α の基底

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n m_{ki} \gamma_i \quad (k=1, \dots, n)$$

を、

$$\alpha_k \ll L \quad (k=1, \dots, n)$$

となるものを作ることができる。この $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ により、

$S(v)$ を書きかえれば、 $S(v)$ は

$$S(v) = \sum_{a_2} \dots \sum_{a_n} \sum_{a_1=a}^b F(v + \sum_{k=1}^n a_k \alpha_k)$$

の形に表わされる. $z \geq z''$

$$a_k \ll ML^{n-1} \quad (k=1, \dots, n)$$

と仮定する.

次に

$$z = z(a_2, \dots, a_n) = (v + \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i) / \alpha_1,$$

$$B_s = B_s(m) = \frac{(-1)^s}{2\pi s} \left[\sum_{b=1}^{r_1} (2\pi t + v_b) (z^{(b)} + m)^{-s} + \sum_{p=r_1+1}^{n+r_2} \left\{ (4\pi t + v_p) \operatorname{Re}((z^{(p)} + m)^{-s}) + \ell_{p-r_1} \operatorname{Im}((z^{(p)} + m)^{-s}) \right\} \right]$$

$$(s=1, \dots, k; |m| \leq cML^{n-1})$$

とき,

$$T_m = \sum_{x, y=1}^Y \exp\left(2\pi i \sum_{s=1}^k B_s x^s y^s\right)$$

なる和を定義する. ただし

$$Y = [A_0^{\frac{1}{2}-\delta}], \quad k = [100\alpha] + 1$$

とする. これらを使い, $F(v)$ の展開を考え, $S(v)$ は

$$S(v) \ll M^n \left(Y^{-2} \max_{|m| \leq cML^{n-1}} |T_m| + A_0^{-\delta} \right) + Y^2 (ML^{n-1})^{n-1}$$

と評価される. さらに, T_m を考えるときは, 次のような

B_s の評価が大切である:

定理 2.2 $s \equiv 1 \pmod{8}$ かつ $s \leq k$ のとき

$$c^s A_0^{\alpha-s} \leq |B_s| \leq (cL)^s A_0^{\alpha-s}.$$

証明 まず α_1 の定義により

$$\alpha_1^{(j)} = d^{-1} L A_0^{-1} v^{(j)} \theta_j (1 + O(L^{-1})).$$

— オ 2”

$$\begin{aligned} z + m &= \alpha_1^{-1} \left(v + \sum_{i=2}^n \alpha_i \alpha_i + \alpha_1 m \right) \\ &= \alpha_1^{-1} v (1 + O(ML^n A_0^{-1})). \end{aligned}$$

$s \leq k \leq c(\log A)^{1/2}$ なるから

$$\begin{aligned} (z^{(j)} + m)^{-s} &= (\alpha_1^{(j)} / v^{(j)})^{+s} (1 + O(sML^n A_0^{-1})) \\ &= (LA_0^{-1}/d)^s \theta_j^s (1 + O(sL^{-1})). \end{aligned}$$

$s \equiv 1 \pmod{8}$ なら $\theta_j^s = \theta_j$ であるから, 結局

$$(z^{(j)} + m)^{-s} = (LA_0^{-1}/d)^s \theta_j (1 + O(sL^{-1})).$$

したがって, 2α とし

$$\begin{aligned} (8) \quad B_s &= \frac{(-1)^s}{2\pi s} \left(\frac{LA_0^{-1}}{d} \right)^s (1 + O(sL^{-1})) \\ &\times \left\{ \sum_{j=1}^{r_1} |2\pi t + v_j| + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (|4\pi t + v_p| + |l_{p-r_1}|) \right\}. \end{aligned}$$

この最後の $\{\dots\}$ の中は, 上下から $c(t + \|\lambda\|) = cA^{x/n}$ でおさえられるから, 求める評価が得られる. ┘

(この定理では, $|B_s|$ の下からの評価の方が本質的な問題であって, θ_j を考えたのは, (8) のように, $\{\dots\}$ の中の項をすべて絶対値にするためであり, そうすれば, 下からの評

何がうまくできるのである。))

最後に, Vinogradov の平均値の定理を応用し, α が
 $1/8 \leq \alpha \leq c(\log A)^{1/2}$ をみたすことに注意して,

$$T_m \ll Y^{2-c/\alpha^2}$$

なる評価が得られるから, 以上の諸結果をまとめ, 定理 I
 が証明されるのである.

§3. 定理 II の証明

χ_λ をイデアルに對する量指標とし, $\zeta(s, \chi_\lambda)$ を考える.

まず,

定理 3.1 $H(x, \chi_\lambda) = \sum_{N\alpha \leq x} \chi_\lambda(\alpha)$

とおくとき

$$(9) \quad H(x, \chi_\lambda) = \alpha E(\chi_\lambda) x + O(\|\lambda\|^{1/2} x^{1-1/2m}).$$

とある, α はある定数である. ┘

証明 $n=1$, ある χ は $\chi_\lambda = 1$ のときは明らかだから
 (例えば [2]), $n \geq 2$, $\chi_\lambda \neq 1$ と仮定する. 周知の公式

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{y^s}{s^2} ds = \begin{cases} \log y & (y \geq 1), \\ 0 & (0 < y < 1) \end{cases}$$

により

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} \zeta(s, \chi_\lambda) ds = \sum_{N\alpha \leq x} \chi_\lambda(\alpha) \log(x/N(\alpha)).$$

— オ 2, Rademacher [6] 12 § 4

$$\zeta(s, \chi_\lambda) \ll (\|\lambda\| (1+|t|))^{\frac{n}{2}(1-\sigma+\frac{1}{2n})}$$

($\sigma = \operatorname{Re} s > 0$), 特 12, $\sigma \geq 1-1/n$ なら

$$\zeta(s, \chi_\lambda) \ll (\|\lambda\| (1+|t|))^{3/4}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \sum_{Nn \leq x} \chi_\lambda(n) \log(x/N(n)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(1-1/n)} \frac{x^s}{s^2} \zeta(s, \chi_\lambda) ds \\ &\ll \|\lambda\| x^{1-1/n}. \end{aligned}$$

2 の左辺を $R(x)$ とおくと,

$$R(x+\delta x) - R(x) \quad (\delta = \|\lambda\|^{1/2} x^{-1/2n})$$

を考へると 12 § 4, (9) が導かれる。 ┘

以下 の 定理 は, [4], § 2 の 諸 定理 と 殆ど 同様 に し て, 順 に 証明 さ れ る か ら, 定理 だけ を あげ て, 証明 は 省略 す る。

定理 3.2 $\chi_\lambda \neq 1$ と する と, $\sigma \geq 1-1/4n$, $X = c(\|\lambda\| (1+|t|))^{4n}$ と する と き,

$$\zeta(s, \chi_\lambda) = \sum_{Nn \leq X} \frac{\chi_\lambda(n)}{N(n)^s} + O(1). \quad \text{┘}$$

定理 3.3 A, B は 次の よう な 数 と する ;

$$\begin{aligned} \exp \left\{ (\log(|t| + \|\lambda\|))^{2/3} (\log \log(|t| + \|\lambda\|))^{1/3} \right\} &\leq A < B \\ &\leq 2A \leq 2(|t| + \|\lambda\|)^{8n}. \end{aligned}$$

c_1, T_0 を適当にとれば, $|t| + \|\lambda\| \geq T_0$ かつ

$$\sigma \geq 1 - c_1 (\log \log (|t| + \|\lambda\|) / \log (|t| + \|\lambda\|))^{2/3}$$

α とし

$$\sum_{\substack{A \leq Nb < B \\ b \in L(\alpha)}} \frac{\chi_\lambda(b)}{N(b)^s} \ll 1.$$

定理 3.4 $\chi_\lambda \neq 1$ かつ

$$\sigma \geq 1 - c_2 (\log \log (|t| + \|\lambda\|) / \log (|t| + \|\lambda\|))^{2/3}$$

α とし

$$\zeta(s, \chi_\lambda) \ll (\log (|t| + \|\lambda\|))^{c_3}.$$

定理 3.5 $\zeta(s, \chi_\lambda)$ は

$$\sigma \geq 1 - c_4 / \psi_\lambda(t)$$

に α なる零乗をもたない, $\sigma \geq \sigma_0$

$$\psi_\lambda(t) = \log (|t| + \|\lambda\|)^{2/3} \log \log (|t| + \|\lambda\|)^{1/3}$$

である. さらに, $\sigma \geq 1 - c_5 / \psi_\lambda(t)$ なる $\sigma \geq \sigma_0$ で,

$$\zeta'(s, \chi_\lambda) / \zeta(s, \chi_\lambda) \ll \psi_\lambda(t)$$

定理 3.6

$$\sum_{Nf \leq x} \chi_\lambda(f) \log N(f) = E(\chi_\lambda) x + O(x \log \|\lambda\| \exp(-c F_\lambda(x))).$$

$\sigma \geq \sigma_0$ かつ $\sigma < 1$ ならば, 定理 II を得ることは容易である.

§4. 定理 III の証明

$$w_p / w_0 = \frac{1}{2\pi i} \arg z^{(p+r_1)} \quad (p=1, \dots, r_2)$$

と置く. $1 \leq w_p \leq w_0$ であり, w_p は有理整数となる. さらに,

$$t_p = [\beta_p w_0 / w_p],$$

$$\gamma_{p,k} = \begin{cases} w_p / w_0 & (k=0, 1, \dots, t_p-1), \\ \beta_p - t_p w_p / w_0 & (k=t_p) \end{cases}$$

として, $0 \leq k_p \leq t_p$ ($p=1, \dots, r_2$) なる $\{k_p\}$ に対して, 次の条件をみたす素数 ω の個数を $\pi(x; \alpha_g, \beta_p; k_1, \dots, k_{r_2})$ と記す;

$$\begin{cases} \omega > 0, & N(\omega) \leq x, \\ 0 \leq W_g(\omega) < \alpha_g & (g=1, \dots, r), \\ k_p w_p / w_0 \leq \Theta_p(\omega) < k_p w_p / w_0 + \gamma_{p,k_p} & (p=1, \dots, r_2) \end{cases}$$

このとき

$$\pi(x; \alpha_g, \beta_p) = \sum_{k_1=0}^{t_1} \dots \sum_{k_{r_2}=0}^{t_{r_2}} \pi(x; \alpha_g, \beta_p; k_1, \dots, k_{r_2})$$

となるから, 記号を少しかえて

$$\begin{cases} \omega > 0, & N(\omega) \leq x, \\ 0 \leq W_g(\omega) < \alpha_g & (g=1, \dots, r), \\ b_p / w_0 \leq \Theta_p(\omega) < b_p / w_0 + \gamma_p & (p=1, \dots, r_2) \end{cases}$$

をみたす素数 ω の個数 $\pi^*(x; \alpha_g, \beta_p; b_p)$ を考えれば十分である. ここで b_p は有理整数で, $\gamma_p \leq w_p / w_0$ (p

$= 1, \dots, r_2)$.

さて, γ を, $0 < \gamma \leq 1$ なる数として, 次のような周期函数

$$g(x; \gamma) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x - [x] < \gamma), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を定義し, ω に対して

$$(10) \quad G(\omega) = \prod_{q=1}^r g(\pi_q(\omega); \alpha_q) \sum_{b=0}^{w_0-1} \prod_{p=1}^{r_2} g(\omega_p(\omega) - \frac{b_p + b w_p}{w_0}; \gamma_p)$$

とかくと, E_0 の元 ω に対しては

$$G(\omega) = G(\omega)$$

であり, $G(\omega) \neq 0 \Leftrightarrow G(\omega) = 1$ であることもわかる.

しかも, $G(\omega) = 1$ ならば, ω の同伴数 ω_1 として,

$$\begin{cases} \omega/\omega_1 \in E_0, \\ 0 \leq \pi_q(\omega_1) < \alpha_q & (q=1, \dots, r) \\ 0 \leq \omega_p(\omega_1) - b_p/w_0 < \gamma_p & (p=1, \dots, r_2) \end{cases}$$

となるものがあつて, 従つて, $G(\omega)$ を, E_0 を

表わす代表元として, さらに

$$\omega \geq 0, \quad N(\omega) \leq x$$

をみたす ω について加へれば, その和

$$\sum^* G(\omega) = \sum_{\substack{\omega \bmod E_0 \\ \omega \geq 0, N(\omega) \leq x}} G(\omega)$$

は, $\pi^*(x; \alpha_p, \beta_p; b_p)$ に等しい.

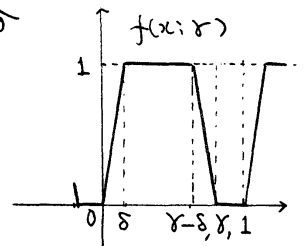
そうして, 問題は $G(\omega)$ に与えられ, $f(x; \delta)$ は不連続で, このままでは扱いにくいので, 他の函数で近似する方法をとる;

δ を小さい正数 ($\delta \geq 2\delta$ ならぬ) とし,

$$f(x; \delta) = \begin{cases} (x - [x])/\delta, & (0 \leq x - [x] \leq \delta), \\ 1 & (\delta \leq \quad \leq \delta - \delta), \\ (\delta - x + [x])/\delta & (\delta - \delta \leq \quad \leq \delta), \\ 0 & (\delta \leq \quad \leq 1) \end{cases}$$

と置く. この $f(x; \delta)$ に對して, 次の積分

$$a(m; \delta) = \int_0^1 f(x; \delta) e^{-2\pi i m x} dx$$



を計算すると,

$$a(m; \delta) = \begin{cases} \delta - \delta & (m=0), \\ (2 - e^{-2\pi i m \delta} - e^{2\pi i m (\delta - \delta)}) / (2\pi i m)^2 \delta & (m \neq 0) \end{cases}$$

であり, したがって, f の Fourier 級数

$$(11) \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m; \delta) e^{2\pi i m x}$$

は絶対かつ一様に収束するから, この級数は $f(x; \delta)$ に等

しい. さて,

$$\delta < \frac{1}{2} \min(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \delta_1, \dots, \delta_{r_2})$$

として, (10) と同じように, f を使って

$$F(\omega) = \prod_{g=1}^r f(\pi_g(\omega); \alpha_g) \sum_{b=0}^{w_0-1} \prod_{p=1}^{r_2} f(\oplus_p(\omega) - \frac{b_p + b w_p}{w_0}; \gamma_p)$$

とみると,

$$F(\omega) \leq G(\omega)$$

は明らかであり, (11) の絶対収束性によって, $F(\omega)$ は

$$\begin{aligned} (12) \quad F(\omega) &= \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \sum_{l_1, \dots, l_{r_2} = -\infty}^{\infty} \prod_{g=1}^r a(m_g; \alpha_g) \prod_{p=1}^{r_2} a(l_p; \gamma_p) \\ &\times \exp(-2\pi i l_p b_p / w_0) \exp \left\{ 2\pi i \left(\sum_{g=1}^r \pi_g(\omega) m_g + \sum_{p=1}^{r_2} \oplus_p(\omega) l_p \right) \right\} \\ &\times \sum_{b=0}^{w_0-1} \exp \left(-2\pi i b \sum_{p=1}^{r_2} l_p w_p / w_0 \right) \end{aligned}$$

と展開される. この最後の和は,

$$\sum_{b=0}^{w_0-1} \exp \left(-2\pi i b \sum_{p=1}^{r_2} l_p w_p / w_0 \right) = \begin{cases} w_0 & \left(\sum_{p=1}^{r_2} l_p w_p / w_0 \text{ が有理整数のとき} \right), \\ 0 & \text{(その他のとき)} \end{cases}$$

となるから, $F(\omega)$ の展開 (12) の中で

$$\exp \left\{ 2\pi i \left(\sum_{g=1}^r \pi_g(\omega) m_g + \sum_{p=1}^{r_2} \oplus_p(\omega) l_p \right) \right\}$$

が量指標にならない項はすべて消えることになる (量指標の

条件の 1 つ (3) をみよ), したがって,

$$A(m_1, \dots, m_r; l_1, \dots, l_{r_2}) = \prod_{g=1}^r a(m_g; \alpha_g) \\ \times \prod_{p=1}^{r_2} a(l_p; \gamma_p) \exp(-2\pi i l_p b_p / w_0)$$

とみければ, $F(w)$ は

$$F(w) = w_0 \sum_{\lambda} A(m_1, \dots, m_r; l_1, \dots, l_{r_2}) \lambda(w)$$

と表わされ, この和は, すべて α の量指標にわたる α とみれば
 できる. $\sim$

$$(13) \begin{cases} A(0, \dots, 0) = \alpha_1 \dots \alpha_r \gamma_1 \dots \gamma_{r_2} + O(\delta), \\ |A(m_1, \dots, m_r; l_1, \dots, l_{r_2})| \leq \delta^{-r-r_2} \prod_{g=1}^r (1+m_g^2)^{-1} \prod_{p=1}^{r_2} (1+l_p^2)^{-1} \\ ((m_1, \dots, l_1, \dots) \neq (0, \dots, 0)). \end{cases}$$

次に, $F(w)$ とは逆に, $G(w)$ を上からおさえるように $H(w)$ を考える. そのためには,

$$h(x; \gamma) = \begin{cases} f(x+\delta; \gamma+2\delta) & (\gamma+2\delta < 1 \text{ のとき}), \\ f(x+\delta; \gamma) + f(x-\delta; \gamma) & (\gamma+2\delta \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると, $h(x; \gamma) \geq f(x; \gamma)$ の代りに利用すればよい. $\sim$
 の場合は

$$H(w) = w_0 \sum_{\lambda} B(m_1, \dots, m_r, l_1, \dots, l_{r_2}) \lambda(w)$$

なる和が得られ, 係数 $B(m_1, \dots, l_1, \dots)$ も (13) と同じ
 ように評価される.

とすると,

$$(14) \quad \sum^* F(\omega) \leq \sum^* G(\omega) \leq \sum^* H(\omega)$$

となるが、まず $\sum^* F(\omega)$ を考え、

$$\begin{aligned} \sum^* F(\omega) &= w_0 \sum_{\lambda} A(m_1, \dots, m_r, l_1, \dots, l_{r_2}) \sum^* \lambda(\omega) \\ &= w_0 A(0, \dots, 0) \sum^* 1 + w_0 \sum_{\lambda \neq 1} A(m_1, \dots, l_1, \dots) \sum^* \lambda(\omega) \\ &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

とわけられる、

$$\begin{aligned} S_1 &= \{w_0 \alpha_1 \dots \alpha_r \gamma_1 \dots \gamma_{r_2} + O(\delta)\} \{h_0^{-1} \text{li}(x) + O(x \exp(-cQ(x)))\} \\ &= h_0^{-1} w_0 \alpha_1 \dots \alpha_r \gamma_1 \dots \gamma_{r_2} \text{li}(x) \\ &\quad + O(\delta x + x \exp(-cQ(x))). \end{aligned}$$

S_2 の方は、(13) を利用して、

$$S_2 = O(\delta^{-n} x \exp(-cQ(x)))$$

となり、あわせて、

$$\begin{aligned} \sum^* F(\omega) &= h_0^{-1} w_0 \alpha_1 \dots \alpha_r \gamma_1 \dots \gamma_{r_2} \text{li}(x) \\ &\quad + O(\delta x + \delta^{-n} x \exp(-cQ(x))). \end{aligned}$$

$\sum^* H(\omega)$ に対しても同様の評価が成り立ち、(14)に

よって、結局

$$\begin{aligned} \sum^* G(\omega) &= h_0^{-1} w_0 \alpha_1 \dots \alpha_r \gamma_1 \dots \gamma_{r_2} \text{li}(x) \\ &\quad + O(\delta x + \delta^{-n} x \exp(-c_1 Q(x))) \end{aligned}$$

となる. ところで $\delta = \exp(-c_1 Q(x)/2n)$ とおけば, π^* に
対して求める結果が得られ, 定理 III も導かれることにな
るのである.

はじめにも述べた通り, 我々の主要定理は, Hecke,
Landau, Rademacher 等の結果に, [4] にあるような三
角和の方法を用いて, 精密化あるいは一般化をはかったも
のであり, したがって, 途中のいくつかの証明は省略し, Fourier
級数展開を用いるところや, 量指標をもつ三角和のところ
など, 新しく工夫した点を主として述べたのである. 特に,
Fourier 級数展開のところは, 先の [3] では, 少しごたごた
してわかりにくかったので, 今度の方が余程すっきりしてい
ると思う.

また, 量指標は, n 次元空間内の整数の分布を考えるとき
などに, 非常に有効な手段であることがわかる. たゞし, こ
の方法は, 一面からいえば, あまりに便利であるために, 問
題やその解決法が形にはまってしまうおそれがないとはいえ
ない. 既に, 素数定理自体が, 古典的な形をもつ問題ともい
えるので, 素数定理を超える素数分布の問題を研究するた
めにも, さらに新しい解析的手段の開拓に常に留意しなければ
ならないであろう.

文献

- [1] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, I, II. Math. Z., 1 (1918), 357-376, 6 (1920), 11-51.
- [2] E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Teubner, Leipzig, 1918.
- [3] T. Mitani, Generalized Prime Number Theorem, Jap. J. Math., 26 (1956), 1-42.
- [4] T. Mitani, On the prime ideal theorem, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 233-247.
- [5] H. Rademacher, Zur additiven Primzahlentheorie algebraischer Zahlkörper, III, Math. Z., 27 (1928), 321-426.
- [6] H. Rademacher, On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications. Math. Z., 72 (1959), 192-204.