

公共部門における支出と多段決定問題について

中井 達 (Tōru Nakai)

九州大学大学院経済学研究院

Department of Economic Engineering, Faculty of Economics,
Kyushu University

1 はじめに

評価を行政運営に本格的に取り入れることは、1960年代のアメリカではじまり、1980年代の半ば以降においては、公共部門の活動の効率化・活性化を図るため、業績や効果を計ることが課題となった。そのため、公共部門の活動サイクルをインプット (inputs) →アウトプット (outputs) →アウトカム (outcomes) とらえるようになった。ここで、インプットとは、資源などの投入物の量であり、アウトプットとは、生産物などの産出物の量である。さらに、アウトカムとは、業績などを評価するための基準あるいは期待である。このアウトカムは、企業などのように収益で業績が計れるものとは異なり、公共部門の活動を評価するために必要なものである。そのため、公共部門の評価では経済性・効率性の他に、有効性を評価することが必要となってくる (中井 [10, 12])。しかし、インプットやアウトプットを数値としてとらえることは比較的容易であることに對し、有効性に関わるアウトカムには多くの問題点がある。そこで、アウトカムを評価する基準あるいは期待と、実際のアウトプットとのズレを確率モデルとして表し解析することを試みる。

ところで、total positivity of order two (TP_2) は、多段決定問題、とくにベイズ学習を伴う不完備情報マルコフ過程における多段決定問題を考える上で、確率的逐次割り当て問題や、dynamic economy におけジョブ・サーチなどへの応用 (Nakai[11] など) が知られているように、重要な役割を果たしている。ここでは、消防活動や警察活動などに見られるような、公共部門における予算の支出の問題を、多段決定問題ととらえて解析し、最適政策や有効性に関わる住民の満足度や充足度の関係を考える。さらに、この問題を total positivity of order two (TP_2) の仮定の下で、これらのサービスに対する住民の満足度や充足度を状態と考えたマルコフ過程に従って状態が推移するモデルととらえる。したがって、これらの状態を改善するために、これらのような公共サービスに対して、どのような支出を行えばよいかを求めることになる。

2 公共部門に対する支出の逐次決定モデル

消防活動や警察活動などの公共サービスを考えてみよう。これらのサービスにおいて、設備や機器を揃え、スタッフを確保していることと、住民の満足度や充足度の間の関係には関係はあるものの、スタッフが多いことや、設備が充実していることと、満足度や充足度の間には“ずれ”があり、直接的な関係を見いだすことは難しい。いっぽう、これらの充足度や満足度は、社会環境や経済状況などにより変動するものであり、これらのサービスに対する公的支出を増やすことによっても変化する。このため、充足度あるいは満足度を状態と考え、この状態は予算などからの支出額によっても変化する。したがって、各年度の予算の範囲でどのように支出していけばよいかを決定する多段決定モデルとする。まずはじめに、この過程の状態を直接観測できる場合から始めて、不完備情報の場合まで考える。

2節では、モデルを説明するために満足度や充足度が予算からの支出額によるのみ変化する場合について、基本的な性質を見ることにする。つぎに、3節では、満足度や充足度を表す状態がマルコフ過程に従って推移するものとし、4節では、部分観測可能なマルコフ過程における学習プロセスを見るために、total positivity of order two (TP_2) との関連を考える。すなわち、状態が何であるかを直接観測できないが、その状態に関する情報を持っている。この情報は、状態空間上の確率分布で与えられ、ベイズ学習に従うものとする。このとき、total positivity of order two (TP_2) を用いて、事前情報と事後情報の関係をはじめ、最適政策や期待利得に関する性質が求められることが知られている。このtotal positivity of order two (TP_2) については、確率過程に関して Karlin and McGregor [3]、Karlin [2]、Karlin and Rinott [4] などで性質が調べられている。最後に、部分観測可能なマルコフ過程における決定問題として、2節や3節を一般化したモデルにおける公共サービスに関する最適支出モデルを考える。

消防活動や警察活動といった公共サービスに、毎年度の予算の範囲内で、これらのサービスに支出することを考えてみよう。これらの公共サービスに対して、実際の設備や施設あるいは人員と、満足度や充足度とのあいだには関連があることは確かであるが、かといって設備や施設、人員が多くなったところで、生活環境や経済状況などが変化することで、これらのサービスに対する要求が増加し、満足度が低下することもある。この状況を表すために、設備や施設、人員数とは別に、満足度あるいは充足度を状態と考え、これらの満足度や充足度が、マルコフ過程に従って変化するとともに、予算を追加して支出することでこれらの状態の変化を促すことができるとする。

そのため、満足度や充足度を表す状態を s であらわし、 $s \in [0, 1]$ とするが、状態空間を $(-\infty, \infty)$ としても同じ議論をすることができるので、問題に応じて状態空間を考えればよい。この場合、 $s = 1$ であれば公共サービスは住民にとって満足できるものであり、このサービスが充分でなくなれば s が減少するにしたがって満足度も低下する。

いっぽう、サービスに対する満足度あるいは充足度 s に対して、その満足度あるいは充足度を貨幣価値で評価する関数 $x(s)$ を考える。すなわち、この関数 $x(s)$ は満足度あるいは充足度 s が実現されたときの、その満足度を得るために必要な投入額を評価する関数である。反対に、評価額あるいは実際の支出額から、直接得ることができる満足度を表す関数を $S(x)$ とする。このとき、関数 $S(x)$ は x に関して増加関数であり凹関数とする。また、関数 $x(s)$ は $x(s) = \inf\{x | S(x) \geq s, x \geq 0\}$ となるような関数 $S(x)$ の逆関数であり、 s に関する増加関数とする。さらに、 $c(s, t)$ を、満足度あるいは充足度が s のとき、この状態を t へと変化させるための必要な費用を表す関数とする ($t \geq s$)。一般的には、満足度あるいは充足度を s から t に変化させるための支出額と考えてよい。したがって、満足度や充足度を表す状態は、外部の状況によって変化することはなく、予算を投入することによってのみ変化する場合となっている。

いま、計画期間を n とし、各期ごとの予算の上限を K とすれば、この予算の上限の範囲内で設備や施設あるいは人員を増やすことで、現在の満足度あるいは充足度 s を上昇させることが出来るモデルである。このとき、最適政策にしたがったときに得られる期待利得を $v_n(s)$ とすれば、最適方程式は

$$v_n(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \{-c(s, s + d_s(x)) + v_{n-1}(s + d_s(x))\} \quad (1)$$

となる。ただし、 $v_1(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \{-c(s, s + d_s(x)) + u(s + d_s(x))\}$ 、であり、 $d_s(x) = S(x + x(s)) - s$ とする。ここで $d_s(x)$ は、満足度あるいは充足度が s のとき、予算から x を追加して支出したときの、満足度あるいは充足度の増加量を表している。また、その支出のための費用は $-c(s, s + d_s(x))$ である。もし、 $-c(s, s + d_s(x)) = x$ であれば、費用は支出額に等しい。この関数 $d_s(x)$ に対して、次の性質が成り立つ ($s \leq t$)。

補題 1 $s < t$ ならば $d_s(x) \geq d_t(x)$ である。 $s < t$ ならば、任意の $x \geq 0$ に対して、 $s + d_s(x) \leq t + d_t(x)$ である。

例 1 満足度あるいは充足度を表す関数 $S(x)$ が $S(x) = 1 - e^{-x}$ ($x \geq 0$) とすると、満足度あるいは充足度が s のとき、 $x(s)$ は $x = x(s) = -\log(1 - s)$ ($0 \leq s \leq 1$) であり、 $\frac{dS(x)}{dx} = e^{-x}$ および $\frac{dx(s)}{ds} = -\frac{1}{(1-s)}$ となる。いっぽう、満足度あるいは充足度が s のとき、この満足度の評価額は $x(s) = -\log(1 - s)$ と考えられ、 x が追加し

て支出されたとき、評価額とあわせて $-\log(1-s) + x$ となり、新たな満足度あるいは充足度は $s(-\log(1-s) + x) = 1 - (1-s)e^{-x}$ となる。この場合、満足度あるいは充足度は s から $s + d_s(x) = 1 - e^{-x}(1-s) = e^{-x}s + 1 - e^{-x} \geq 0$, へと変化し、 $d_s(x) = e^{-x}s + 1 - e^{-x} - s = (1 - e^{-x})(1-s) \geq 0$ が満足度あるいは充足度の変化した量である。

ここで、費用関数 $c(s, t)$ は、 t に関して増加かつ凸関数であるとし、 s に関する減少関数と仮定する。また、 $t \rightarrow s$ のとき $c(s, t) \rightarrow 0$ とする。初期条件は $v_0(t) = u(t)$ であり、終端利得 $u(t)$ は、 t に関して増加かつ凸関数とする。このとき、帰納法により次の性質が簡単に導かれる。

補題 2 $v_n(s)$ は s に関する非減少関数である。すなわち、 $s \leq t$ ならば $v_n(s) \leq v_n(t)$ である。 $v_n(s)$ は n に関して非減少関数である。すなわち、任意の $n \geq 1$ に対して、 $v_n(s) \leq v_{n+1}(s)$ である。

次に、費用関数 $c(x)$ が x のみに依存する場合を考える。この場合の最適方程式は、

$$v_n(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \{-c(x) + v_{n-1}(s + d_s(x))\}$$

であり、これまでと同じように $c(x)$ は、 x に関して増加かつ凸関数とし、つぎの仮定を設ける。

仮定 1 $d_s(x)$ は s に関する凹関数である。

このとき、つぎの性質が導かれる。

補題 3 $v_n(s)$ は s に関する凹関数である。

補題 4 計画期間が n で、満足度あるいは充足度が s のとき、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とすれば、任意の $s \leq t$ に対して、 $x_n^*(s) \leq x_n^*(t)$ である。

補題 5 残りの計画期間が n で、満足度あるいは充足度が s のとき、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とすれば、 $x_{n-1}^*(s) \geq x_n^*(s)$ である。

補題 6 $s < t$ ならば、任意の $n \geq 1$ に対して、 $v_{n-1}(t) - v_{n-1}(s) \geq v_n(t) - v_n(s)$ である。

3 公共部門に対する支出の逐次決定モデル: 確率モデル

前節の逐次支出モデルでは、満足度あるいは充足度をあらわす状態は、外部の状況に影響されなかったが、ここでは外部からの影響を受けて状態が変化するものとし、この状態がマルコフ過程にしたがって推移する。すなわち、状態が社会状況や経済状態などによって影響を受けると考え、ある確率過程にしたがって推移する場合である。いいかえれば、設備や機器、あるいは人員を増やすために、予算内での追加的な支出を行うだけでなく、ある確率過程にしたがって変化し、満足度あるいは充足度が下がる場合もあるモデルである。ここでは、マルコフ過程にしたがって推移する場合とする。状態空間をこれまでと同じように $[0, 1]$ とし、推移法則を $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ とする。以下の議論は、状態空間が $(-\infty, \infty)$ であっても、同様に考えることができる。はじめに、total positive of order two (TP_2) を、つぎのように定義する。

定義 1 集合値関数 $P = (p_s(t))_{s,t \in [0,1]}$ に対して、 $\begin{vmatrix} p_s(u) & p_s(v) \\ p_t(u) & p_t(v) \end{vmatrix} \geq 0$ が、 $s \leq t$ および $u \leq v$ となる任意の s, t, u と v に対して成り立つとき $(s, t, u, v \in [0, 1])$ 、この P は total positive of order two あるいは TP_2 の性質を持つという。

このとき、推移法則に関して次の仮定を設ける。

仮定 2 推移法則 $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ は TP_2 である。

計画期間が n で、各期ごとの予算額の上限が K とする。このとき、最適に振る舞ったときの満足度あるいは充足度に対する期待利得を $V_n(s)$ とすれば、最適方程式はつぎのようになる。

$$V_n(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \left\{ -c(x) + \int_0^1 p_{s(x)}(t) V_{n-1}(t) dt \right\} \quad (2)$$

ただし、

$$V_1(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \left\{ -c(x) + \int_0^1 p_{s(x)}(t) u(t) dt \right\}$$

であり、 $s(x)$ は、状態が s のとき、 x を追加して支出したときの新たな状態を表す。前節の場合には、 $s(x)$ は $s(x) = s + d_s(x)$ と表せる。ここで、 $s(x)$ は、 x に関して増加かつ凹関数であり、 s に関する増加関数とする。

補題 7 集合値関数 $P = (p_s(t))_{s,t \in [0,1]}$ と、 x に関する増加関数 $s(x)$ に対して、任意の s, t, u と v に対して $(u, v \in [0, 1])$ 、 $x \leq y$ かつ $u \leq v$ であれば、任意の $s (s \in [0, 1])$ について、 $\begin{vmatrix} p_{s(x)}(u) & p_{s(x)}(v) \\ p_{s(y)}(u) & p_{s(y)}(v) \end{vmatrix} \geq 0$ となる。

つぎに、定義2にしたがって、total positivityの性質を用いて確率変数のあいだに半順序を導入する。ここで、確率変数は全順序 $\geq$ が定義された完備で可分な距離空間上で定義されているとする。

定義2 2つの確率変数 X と Y が、それぞれ確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(x)$ を持つとする。このとき、 $x \geq y$ を満たす、任意の x と y に対して、 $f_X(y)f_Y(x) \leq f_X(x)f_Y(y)$ であるとき、 X は Y より尤度比の意味で大きいといい、 $X \succeq Y$ と表す。

いま、 $\mathcal{F}_{SSD} = \{u \mid u(x) \text{ } x \text{ に関して増加かつ凹関数} \}$ とし、この集合を使って定義3により半順序を定義する。

定義3 2つの確率変数 X と Y が、それぞれ確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(x)$ を持つとする。このとき、任意の $u(x)$ に対して $\mathcal{F}_{SSD}$ 、 $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ であるとき $X \geq_{SSD} Y$ とする。

補題8の性質が、定義2と定義3による順序に関して成り立つ。推移法則が TP_2 のとき、補題9がKijima and Ohnishi[5]で示され、このことから補題10が導かれる。

補題8 2つの確率変数 X と Y に対して、 $X \succeq Y$ ならば $X \geq_{SSD} Y$ である。

補題9 関数 $u(t)$ が、 t に関する増加かつ凹関数であれば、 $\int_0^1 p_s(t)u(t)dt$ もまた s に関する増加関数である。

補題10 $x < y$ ならば、 $\mathcal{F}_{SSD}$ に含まれる任意の $u(x)$ に対して、 $\int_0^1 p_{s(x)}(t)u(t)dt \leq \int_0^1 p_{s(y)}(t)u(t)dt$ である。

補題9より、 $V_{n-1}(t)$ が t の増加関数であれば、 $\int_0^1 p_s(t)V_{n-1}(t)dt$ は、 s に関する増加関数である。このことから、 n に関する帰納法を用いてつぎの性質が成り立つ。

補題11 $V_n(s)$ は n に関する非減少関数である。すなわち、 $V_n(s) \geq V_{n-1}(s)$ である。

補題12 $V_n(s)$ は、 s に関する非減少関数である。すなわち、 $s < s'$ ならば、 $V_n(s) \geq V_n(s')$ である。

例2

$$p_s(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{s-\alpha}{s+\alpha} \\ \frac{1}{\alpha(s)} & \frac{s-\alpha}{s+\alpha} \leq t \leq \frac{s+\alpha}{s+\alpha} \\ 0 & \frac{s+\alpha}{s+\alpha} < t \leq 1 \end{cases},$$

ここで、 $\alpha(s) = 2\alpha + (s - \alpha) \wedge 0 - (s + \alpha - 1) \vee 0$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $\underline{a} = 0 \vee a$ および $\bar{a} = a \wedge 1$ とする。この $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ は、つぎのような計算から TP_2 となることがわかる。 $s \leq t$ および $u \leq v$ となる任意の s, t, u, v に対して ($s, t, u, v \in [0, 1]$)、 $p_s(u)p_t(v) \geq p_t(u)p_s(v)$ となることは、 $\begin{vmatrix} p_s(u) & p_s(v) \\ p_t(u) & p_t(v) \end{vmatrix} \geq 0$ と等しい。

仮定 3 推移法則 $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ に対して、 t に関する増加かつ凹関数を $u(t)$ とすれば、 $\int_0^1 p_s(t)u(t)dt$ は s に関する凹関数となっている。

この仮定の下で、補題 13 と性質 1 が成り立つ。

補題 13 $V_n(s)$ は、 s に関する凹関数である。

命題 1 計画期間が n であり、満足度あるいは充足度が s のときの、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とすれば、任意の $x \leq y$ に対して、 $x_n^*(s) \leq x_n^*(t)$ である。

次の仮定は、性質 2 を示すために必要な仮定である。

仮定 4 推移法則 $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ に対して、つぎの性質を満たす。 t に関する増加かつ凹関数を $u(t)$ とすれば、 $\int_0^1 p_s(t)u(t)dt - u(t)$ は、 s に関する減少関数である。

推移法則 $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ が、この仮定を満たせば、 $s < s'$ のとき

$$\int_0^1 p_{s'}(t)u(t)dt - u(s') \leq \int_0^1 p_s(t)u(t)dt - u(s)$$

または、

$$\int_0^1 p_{s'}(t)u(t)dt - \int_0^1 p_s(t)u(t)dt \leq u(s') - u(s),$$

となり、このことから補題 14 と補題 15 が導かれ、これらの補題から性質 2 が示される。

補題 14 $s < s'$ ならば、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$\int_0^1 p_{s'}(t)V_{n-1}(t)dt - \int_0^1 p_s(t)V_{n-1}(t)dt \geq \int_0^1 p_{s'}(t)V_n(t)dt - \int_0^1 p_s(t)V_n(t)dt$$

あるいは、

$$0 \leq \int_0^1 p_{s'}(t)(V_n(t) - V_{n-1}(t))dt \leq \int_0^1 p_s(t)(V_n(t) - V_{n-1}(t))dt$$

である。

補題 15 $s < s'$ ならば、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$V_n(s') - V_n(s) \leq \int_0^1 p_{s'}(t) V_{n-1}(t) dt - \int_0^1 p_s(t) V_{n-1}(t) dt$$

である。

命題 2 計画期間が n で、満足度あるいは充足度が s のときの、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とすれば、任意の $n \geq 1$ に対して、 $x_{n-1}^*(s) \geq x_n^*(s)$ である。

4 部分観測可能なマルコフ過程

状態空間が $[0, 1]$ のマルコフ過程で、推移法則を $P = (p_s(t))_{s,t \in [0,1]}$ とする。すなわち、 $p_s = (p_s(t))_{t \in [0,1]}$ は、任意の $s \in [0, 1]$ に対して、 $[0, 1]$ 上の確率分布を表す。それぞれの状態 s は、満足度あるいは充足度を表し ($s \in [0, 1]$)、状態に依存する確率変数 Y_s を情報プロセスとする。すなわち、それぞれの状態に関する情報を確率変数 Y_s を通して得ることができる情報システムあるいは観測過程を考える。さらに、状態は直接には観測できず、状態に依存する確率変数 Y_s を通じて情報が得られ ($s \in [0, 1]$)、学習プロセスはベイズ学習にしたがって解析することから、仮定 5 を設ける。状態 s に対して、確率変数 Y_s は絶対連続で、密度関数 $f_s(y)$ を持つとする ($s \in [0, 1]$)。この仮定は、Nakai [9] にしたがって一般化でき、多段決定問題へ応用できる (Nakai [6, 7, 8] など)。

仮定 5 確率変数 $\{Y_s\}_{s \in [0,1]}$ に対して、 $s \leq s'$ ならば、 $Y_{s'} \succeq Y_s$ である ($s, s' \in [0, 1]$)。すなわち、 Y_s は s に関して尤度比の意味で増加する。

仮定 5 において、 $Y_s \succeq Y_{s'}$ のとき、 $x < y$ ならば、 $s \leq s'$ となる任意の s と s' に対して ($s, s' \in [0, 1]$)、 $f_s(y)f_{s'}(x) \leq f_s(x)f_{s'}(y)$ である。このことから、確率変数 Y_s は s の値が小さくなるにしたがって、小さな値をとるようになり、状態 0 が一番悪い状態であり、...、状態 1 がもっともよい状態となる。推移法則に関する仮定から、現在の状態から、より良い状態に推移する確率は、現在の状態がよくなるにしたがって増加する。すなわち、それぞれの状態を表す s が大きくなれば、より良い状態に推移する確率は大きくなるのである。

直接観測できない状態に関する情報は、状態空間 $[0, 1]$ 上の確率分布 μ として表し、 S を観測できない状態に関する情報全体の集合とすれば、

$$S = \left\{ \mu = (\mu(s))_{s \in [0,1]} \mid \int_0^1 \mu(s) ds = 1, \mu(s) \geq 0 (s \in [0, 1]) \right\}$$

となる。

S に含まれる情報のあいだに、定義2を用いた半順序を定義する。すなわち、 $[0, 1]$ 上の2つの確率分布 μ, ν に対して、 $\mu(s')\nu(s) \leq \mu(s)\nu(s')$ が任意の $s, s' (s \leq s', s, s' \in [0, 1])$ について成り立ち、少なくとも1つの s と s' の組み合わせについて、 $\mu(s')\nu(s) < \mu(s)\nu(s')$ となるとき、 μ は ν より大きいといい、簡単に $\mu \succ \nu$ と表す。この順序は、半順序であり、この順序もまた total positive of order two、あるいは簡単に TP_2 という。いつぼう、 $p_s = (p_s(u))$ および $p_{s'} = (p_{s'}(u))$ とおけば、 P が仮定2を満たすことから、任意の $s, s' (s \leq s', s, s' \in [0, 1])$ に対して、 $p_{s'} \succeq p_s$ となる。この順序関係は部分観測可能なマルコフ過程において一般化でき、詳細は多段決定問題への応用を含めて Nakai [9]にある。このとき、仮定2と仮定5のもとで、補題16が得られる。

補題 16 $\mu \succeq \nu$ ならば $(\mu, \nu \in S)$ 、 x に関する非減少な非負関数 $h(x)$ に対して、 $\int_0^\infty h(x)dF_\mu(x) \geq \int_0^\infty h(x)dF_\nu(x)$ となる。

この補題において、 $F_\mu(x) = \int_0^1 \mu(s)F_s(x)$ は、weighted distribution function と呼ばれる (De Vylder [1])。また、確率過程の観測できない状態に関して、確率変数 $\{Y_s\}_{s \in [0, 1]}$ を情報システムとする。すなわち、この確率変数を観測することによって、状態に関して学習を行う。事前情報が μ のとき、まずはじめにこれらの確率変数 $\{Y_s\}_{s \in [0, 1]}$ を観測し、ベイズの定理を用いて学習を行う。その後、状態は推移し新しい状態になると考える。もちろん、この順序を変えても同じように解析できる。 y を観測したとき、ベイズの定理にしたがって学習した事後情報を $\mu(y) = (\mu(y, s))_{s \in [0, 1]}$ とし、その後で推移法則 P にしたがって状態が推移し、つぎの新しい状態に関する情報を $\overline{\mu(y)} = (\overline{\mu(y, s)})_{s \in [0, 1]}$ と表す。

このとき、集合値関数 $h(y, s)$ に対して、定義4によって単調性を定義する。

定義 4 任意の $s \in [0, 1]$ と $x \in \mathcal{R}_+$ に関する非負の集合値関数 $h(x) = (h(x, s))_{s \in [0, 1]}$ に対して、任意の s' と $s (s \leq s' \text{ かつ } s, s' \in [0, 1])$ について、 $x < y$ ならば $h(y) \succeq h(x)$ ($h(x) \succeq h(y)$) とする。すなわち $h(x, s')h(y, s) \leq h(x, s)h(y, s')$ ($h(x, s')h(y, s) \geq h(x, s)h(y, s')$) である。このとき、関数 $h(x, s)$ を x に関する増加関数 (減少関数) という。

確率変数 $\{Y_s\}_{s \in [0, 1]}$ の密度関数 $\{f_s(y) \mid s \in [0, 1]\}$ は、仮定5を満たすから、 $f(y) = (f_s(y))_{s \in [0, 1]}$ は $f(x) \succeq f(y)$ となる。すなわち、任意の s と $s' (s \leq s' \text{ および } s, s' \in [0, 1])$ に対して、 $x > y$ ならば $f_s(y)f_{s'}(x) \leq f_s(x)f_{s'}(y)$ となる。したがって、 $f(x)$ は、 x に関する増加関数である。

事前情報 μ と事後情報 $\overline{\mu(x)}$ のあいだには、仮定 2 と仮定 5 のもとで、つぎの基本的な性質が成り立つ (Nakai [9, 11] など)。

補題 17 $\mu \succ \nu$ ならば、任意の y に対して、 $\mu(y) \succ \nu(y)$ および $\overline{\mu(y)} \succ \overline{\nu(y)}$ である。任意の μ に対して、 $\mu(y)$ と $\overline{\mu(y)}$ は y に関する増加関数である。

補題 17 から、事前情報 μ における順序関係は、 $\mu(y)$ と事後情報 $\overline{\mu(y)}$ に対して保たれることがわかる。さらに、同じ事前情報 μ であれば、観測した値 y が大きくなれば、事後情報 $\overline{\mu(y)}$ もまたよくなる。

5 逐次支出モデル—不完備情報の場合

計画期間を n とし、状態に関する情報は、状態空間上の確率分布 μ として得られているとする。また、予算は最大 K とする。まずはじめに、状態の推移を含まない場合を見る。このとき最適政策にしたがったときの満足度あるいは充足度による期待利得を $V_n(\mu)$ とすれば、最適方程式は

$$V_n(\mu) = \max_{0 \leq x \leq K} \{-c(x) + V_{n-1}(\tilde{\mu}(x))\} \quad (3)$$

となる。ここで、

$$V_1(\mu) = \max_{x \geq 0} \left\{ -c(x) + \int_0^1 \tilde{\mu}(t) u(t) dt \right\}$$

であり、 $\tilde{\mu}(x) = \int_0^1 \mu(s) p_{s(x)}(t) ds$ は、事前情報が μ のとき、 x を支出した後の状態空間上の分布である。前節における仮定の下で、つぎの性質が得られる。

補題 18 $x > y$ ならば、 $\tilde{\mu}(x) \succeq \tilde{\mu}(y)$ であり、 $\mu \succeq \nu$ ならば、任意の $x (\geq 0)$ に対して $\tilde{\mu}(x) \succeq \tilde{\nu}(x)$ である。

3 節と同じように、つぎの性質が仮定の下で成り立つ。また、補題 16 から、3 節の仮定の下で、最適政策のもとでの期待利得の単調性が導かれる。

命題 3 $\mu \succeq \nu$ ならば、任意の s に対して $V_n(\mu) \geq V_n(\nu)$ である。

命題 4 任意の $n \geq 1$ のとき、任意の μ に対して $V_n(\mu) \geq V_{n-1}(\mu)$ となる。

最後に、状態が部分観測可能なマルコフ過程にしたがって推移する場合を、4 節の仮定の下で考える。それぞれの満足度あるいは充足度を表す状態 s に対して ($s \in [0, 1]$)、確率変数 Y_s を観測することを、その状態に関する情報システムとする。仮定 2 のも

とで、観測できない状態について、ベイズの定理にしたがった学習を考える。4節で定義した部分観測可能なマルコフ過程に対して、最適に振る舞って得られる満足度あるいは充足度による期待利得を $V_n(\mu)$ とすれば、最適方程式は

$$\begin{aligned} V_n(\mu) &= \int_0^1 V_n(\mu|y) d\mu(y) \\ V_n(\mu|y) &= \max_{x \geq 0} \left\{ -c(x) + V_{n-1}(\widetilde{\mu(y)}(x)) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ただし、

$$V_1(\mu) = \max_{x \geq 0} \left\{ -c(x) + \int_0^1 \widetilde{\mu(y)}(x) u(t) dt \right\}$$

であり $V_0(\mu) = \int_0^1 u(t) d\mu(t)$ とする。(4)式において、 $\widetilde{\mu(y)}$ は、観測した値 y を用いて学習を行った事後情報であり、 $\widetilde{\mu(y)}(x)$ は追加して x を支出し、そのあと推移法則にしたがって状態が推移した後での状態に関する情報である。性質3と性質4を導いたと同じように、3節の仮定の下でつぎの性質が得られる。

命題 5 $V_n(\mu)$ は、 μ に関する非減少関数である。

命題 6 $V_n(\mu)$ は、 n に関する非減少関数である。

6 おわりに

公共部門の活動サイクルをインプット (inputs) → アウトプット (outputs) → アウトカム (outcomes) とらえるとき、有効性に関わるアウトカムを評価する基準と、実際のアウトプットとのズレを、満足度や充足度を状態と考えたマルコフ過程を用いた確率モデルとして表し解析することを試みた。ここでは、消防活動や警察活動などに見られるような、公共部門における予算の支出の問題を、多段決定問題ととらえて解析し、最適政策や有効性に関わる住民の満足度や充足度の関係を考えた。その結果、推移法則に関するいくつかの仮定の下で、最適政策や最適政策にしたがったときに得られる期待利得の性質に関して、単調性があることが求められた。すなわち、満足度や充足度を表す状態と新たに支出する最適な額や、その最適政策のもとでの状態の変化に伴う期待値は、状態に関して単調性を持つのである。また、不完備情報マルコフ過程における学習を考える上で主要な役割を担う total positivity of order two (TP_2) を用いた仮定の下で、事前情報に関する単調性と、最適政策に単調性のあいだの関係が求められた。

参考文献

- [1] F. De Vylder, Duality Theorem for Bounds in Integrals with Applications to Stop Loss Premiums, *Scandinavian Actuarial Journal*, 129–147, (1983).
- [2] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford, California, (1968).
- [3] S. Karlin and J. L. McGregor, Classical Diffusion Process and Total Positivity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **1**, 163–183, (1960).
- [4] S. Karlin and Y. Rinott, Total Positivity Properties of Absolute Value Multinomial Variables with Applications to Confidence Interval Estimates and Related Probabilistic Inequalities, *The Annals of Statistics*, **9**, 1035–1049, (1981).
- [5] M. Kijima and M. Ohnishi, Stochastic Orders and Their Applications in Financial Optimization, *Mathematical Methods of Operations Research*, **50**, 351–372, (1999).
- [6] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov process, *Mathematics of Operations Research*, **11**, 230–240, (1986).
- [7] T. Nakai, An Optimal Selection Problem on a Partially Observable Markov process, In *Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **445**, (Eds. A. H. Christer, S. Osaki and L. C. Thomas), pp. 140–154, Springer-Verlag, Berlin, (1996).
- [8] T. Nakai, An Optimal Assignment Problem for Multiple Objects per Period – Case of a Partially Observable Markov process, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **31**, 23–34, (1999).
- [9] T. Nakai, A Generalization of Multivariate Total Positivity of Order Two with an Application to Bayesian Learning Procedure, *Journal of Information & Optimization Sciences*, **23**, 163–176, (2002).
- [10] 中井 達, 効率性と有効性—評価と最適化, 『政策分析 2003—政策・制度への歴史的接近の視軸から』(九州大学大学院経済学研究院政策評価研究会編), 九州大学出版会, 275–301, 2003.

- [11] T. Nakai, Properties of a Job Search Problem on a Partially Observable Markov Chain in a Dynamic Economy, *Computers & Mathematics with Applications*, to appear, (2005).
- [12] 中井 達, 『政策評価-費用便益分析から包絡分析法まで-』, ミネルヴァ書房, 京都, 2005.