

# Polynomial systems について

名大 教養部 大和 一夫

polynomial system :

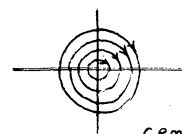
(\*) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, \quad \text{但し } P, Q : x, y \text{ の実係数多項式,}$$
  
 の 定性的性質を 調べるために 用いられる代数的方法  
 を 整理してみたい.

1. center か focus かを見分けること.

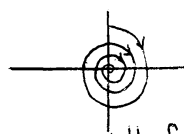
(\*) が singular point をもち かつ そのでの linear part の  
 固有値は 純虚とする. このとき (\*) は

$$(*)_0 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + p(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -x + q(x, y) \end{cases}, \quad \text{但し } p, q \text{ は 2次以上の poly.}$$

としてよい.  $(*)_0$  の原点が center か focus かを判別する  
 方法が Poincaré, Liapunov 以来  
 いくつか知られている.



center



stable focus

これらの方法は本質的には同じであるが直観的にとらえやすい Liapunov の方法のひとつを説明する。いわゆる

Poincaré map (あるいは trace function, succession function, ...)  $T(r)$  を

考える。この  $T(r)$  は  $r=0$  の近傍で

定義された analytic function であることが

判り、 $r$  の巾級数に展開すると

$$T(r) = r + u_2 r^2 + u_3 r^3 + \dots + u_n r^n + \dots$$

このとき、

(i)  $T(r) - r = 0$  の解  $r = r_0$  と  $(*)_0$  の periodic sol. が対応。又、 $T(r) \equiv r \iff$  原点は center。さらに、

$u_2 = u_3 = \dots = u_{n-1} = 0$ ,  $u_n \neq 0$  ならば  $u_n > 0$  のとき  
 原点は unstable focus,  $u_n < 0$  のとき stable focus. そして常に  $n$ : 奇.

(ii)  $u_2, u_3, \dots$  は  $(*)_0$  の右辺の係数の多項式。  $u_2, u_3$  を  
 実際に求めると  $u_2 = 0$ ,  
 (定数項なし)

$$u_3 = \Delta \left\{ \begin{aligned} &3P_{30} + 3Q_{03} + Q_{02}Q_{11} - P_{20}P_{11} + P_{12} + Q_{21} \\ &- P_{02}(2Q_{02} + P_{11}) + Q_{20}(2P_{20} + Q_{11}) \end{aligned} \right\}$$

但し  $P_{ij}, Q_{ij}$  は夫々  $p, q$  の  $x^i y^j$  の係数。  $\Delta$  は正の定数。

(iii)  $\deg p, q = 2$  のとき  $(*)_0$  が原点を center とするための  
 条件 (i.e.,  $u_2 = u_3 = \dots = 0$ ) は決定されている (Dulac [4],  
 Frommer [6], Bautin [1])。  $p, q$  が 3 次 homogeneous のときは  
 Sibirskii [10] が決定している。

(iv) Bautin [1] は  $\deg p, q = 2$  のとき  $T(r)$  の係数  $u_2, u_3, \dots$  の構造を調べて 原点の近傍にあらわれる  $(*)$  の limit cycles の個数を完全に決定した (それに5と3個). Sibirskii [10] は Bautin のこの方法を  $p, q$  が3次 homogeneous のとき適用して この数が5個になることをしめした.

(v)  $(*)$  の右辺の degree  $n$  によってだけきまる数  $m = m(n)$  <sup>(奇)</sup> で次の性質をもつものを求めよ というのが Siegel の問題 ([12, p.203]) である:  $u_2 = u_3 = \dots = u_m = 0 \Rightarrow u_l = 0 \quad \forall l \geq m+1$ .  
この数  $m = m(n)$  について次の予想をしたい:

予想  $(*)$  が  $\deg = n$ , 原点は center とする. このとき  $(*)$  の右辺の多項式  $p, q$  の係数を少し変化させても高々  $\frac{n-1}{2}$  個の limit cycles しか原点から "出現" しない.

(vi)  $\deg p, q = 2$ ,  $(*)$  の原点が center のとき  $(*)$  は初等関数によって積分可能 (Dulac [4], Frommer [6], Lukashевич [7]) このことから  $(*)$  が2次のとき center と limit cycle は共存できないことが判る [7].  $p, q$  が3次 homogeneous のときも  $(*)$  の原点が center のとき  $(*)$  は初等関数で積分可能 ([9]).

(vii)  $(*)$  の  $\deg \geq 3$  では center と limit cycle とは共存しない ([3]).

(viii) center-focus 判定式  $u_1, u_2, \dots$  と "同値な" 他の判定式がこの他に, 極座標にうつらないで直接処理する Poincaré-Frommer-Sadovskii の方法, 複素座標で考える Dulac, Siegel の方法等がある. これらの関係について Sadovskii [8].

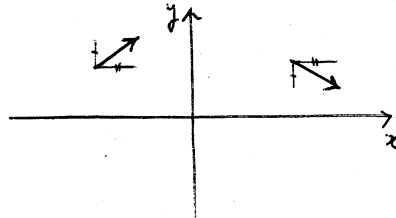
(ix)  $(*)_0$  が center をもたぬ条件  $u_2 = u_3 = \dots = 0$  を計算機で求める試みもある [13].

## 2. 対称な systems とそれによる比較法.

1 によつて 原理的には  $(*)$  の singular point の近傍での定性的性質は理解できるはずであるが 平面全体での性質は手がつけられないくらいむづかしい. 例へば 1 の (vi), (vii) のように解を初等的に求めることが出来るならば global な性質は原理的には判る. しかし そうでないとき よく使われるのは 次の二つの単純な事実による方法である.

(i)  $(*)_0$  が 対称軸をもてば その対称軸と二度交わる解曲線は 判じてゐる. (例へば  $(*)$  が  $y$  軸を対称軸にするとは

$$\begin{aligned} P(-x, y) &= P(x, y), \\ Q(-x, y) &= -Q(x, y). \end{aligned}$$



(ii) ある poly. system  $(*)'_0$  の解がすべて periodic とする.  $(*)_0$  に対して “向き” の関数

$$|(*)_0, (*')_0| = \det \begin{vmatrix} y + p(x, y) & y + p'(x, y) \\ -x + q(x, y) & -x + q'(x, y) \end{vmatrix}$$

を考える. 例へば  $|(*)_0, (*')_0|$  が 原点, 以外で 0 でないなら

$(*)_0$  は nontrivial periodic sol. をもたない.

3. 与えられた曲線を解曲線に持つ systems の construction.

$H(x, y) = 0$  : 与えられた曲線. 曲線  $H(x, y) = 0$  を解曲線に持つ system の一般形は

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y(x, y) \cdot J(x, y) + K(x, y), \\ \dot{y} = -H_x(x, y) \cdot J(x, y) + L(x, y). \end{cases}$$

但し,  $K(x, y) = L(x, y) = 0$  on  $H(x, y) = 0$ ,

$J(x, y) \neq 0$  on  $H(x, y) = 0$ ,

ある (Erugin [5]). 例として  $x^2 + y^2 = 1$  を sol. とする

2 次の polynomial system の一般形は

$$\begin{cases} \dot{x} = y(ax + by + c) + x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = -x(ax + by + c), \end{cases} \quad c^2 > a^2 + b^2,$$

あるいはこれを回転させたもの (Chin Yuan-Shun [2]).

これは 2 の方法より  $a \neq 0$  のとき  $x^2 + y^2 = 1$  は limit cycle になることがわかる. ( $a > 0$  のときは stable limit cycle,  $a < 0$  のときは unstable limit cycle)

4. Sibirskii の invariant method [11].

原点を singular point に持つ polynomial system of degree  $n$  全体の集合を  $\mathbb{R}^N$  と同一視する. 今, これに属する polynomial system  $X$  を  $xy$ -平面を回転した座標であらわすと他の polynomial system  $X'$  が得られる. もちろん  $X$  と  $X'$  は

equivalent. さて  $X$  に対応する  $\mathbb{R}^N$  の点と  $X'$  に対応する  $\mathbb{R}^N$  の点を同一視すると空間  $\mathbb{R}^N/\sim$  がえられる. polynomial systems を分類することは  $\mathbb{R}^N/\sim$  の, ある部分集合への分割を調べること. Sibirskii は polynomial functions

$$\mathbb{R}^N/\sim \rightarrow \mathbb{R}$$

の生成元をきめて, この言葉を用いてその分割の部分集合を記述しようとしている.

### Reference

- [1] Bautin: Amer. Math. Soc. Transl. (1), 5, 396-413.
- [2] Chin Yuan-Shun: Act. Math. Sinica, 8 (1958), 23-35.
- [3] Dolov: Diff. Eq., 8 (1972), 1304-1305.
- [4] Dulac: Bull. Sci. Math., 32 (1908), 230-252.
- [5] Erugin: Akad. Nauk SSSR, Prikl. Mat. Mech., 16 (1952), 659-670.
- [6] Frommer: Math. Ann., 109 (1934), 395-424.
- [7] Lukashevitch: Diff. Eq., 1 (1965), 60-70.
- [8] Sadorovskii: Diff. Eq., 9 (1973), 494-501.
- [9] Sadorovskii: Diff. Eq., 10 (1974), 425-427.
- [10] Sibirskii: Diff. Eq., 1 (1965), 36-49.
- [11] Sibirskii: Diff. Eq., 2 (1966), 384-392, 472-477.
- [12] Siegel & Moser: Lectures on Celestial Mechanics (1971).
- [13] Šenko: Sov. Math. Dokl. 13 (1972), 505-508.

その他 polynomial systems に関する文献は, Sibirskii: The invariant method in the qualitative theory of Diff. Eqs, Kishinev (1968) 及び Sansone & Conti: Nonlinear diff. Eqs (1964) の bibliography を参照. 