

Laplacian の固有値と測地線

九大工 酒井 隆

(M, g) を d 次元コンパクト, 連結, C^∞ -リーマン多様体.
 Δ を M 上の C^∞ -関数に作用する Laplacian, $\text{Spec}(M, g) :=$
 $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\}$ を Δ の固有値の集合とする. $\text{Spec}(M, g)$
 から (M, g) がどの程度定まるかという問題で, λ_i の分布状
 態を知る ことが一ツの有力な手段を与える. Minakshisundaram
 - Pleijel [5] は次の漸近展開を与えた. 可なり (M, g) によ
 って決まる定数 $a_i (i=0, 1, \dots)$ が存在して,

$$\sum_n e^{-\lambda_n t} = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^k a_n t^n + O(t^{k+1-\frac{d}{2}}) \quad \text{for } t \ll 1.$$

この事実の証明は (M, g) 上の(実)熱方程式の基本解 FSRHE を
 構成することにより帰着される. (M, g) 上の熱方程式は, 与えら
 れた初期条件 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 次の 2 条件を満たす $G:$
 $M \times \mathbb{R}_+ \ni (x, t) \rightarrow G(x, t) \in \mathbb{R}$ を求めることを問題にする.

$$\Delta_x G + \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad G(\cdot, 0) = f(\cdot),$$

これは次の条件によって定義される FSRHE $E: M \times M \times \mathbb{R}_+^*$
 $\rightarrow \mathbb{R}$ が求まれば直ちに解くことができる.

(i) E は 3 変数について C^0 、最初の 2 変数について C^2 、 t に関して C^1 であって、 $\Delta_2 E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$ をみたす。ここで Δ_2 は第 2 変数に関する Laplacian を表す。また $\mathbb{R}_+^* = \{t > 0; t \in \mathbb{R}\}$ 。

(ii) $\forall x \in M$, $\lim_{t \rightarrow 0} E(x, \cdot, t) = \delta_x$, ただし δ_x は x における Dirac distribution である。

さて (M, g) はコンパクト故、FSRHE は存在して一意である。実際 $\{\varphi_n\}$ を Δ の固有函数よりなる正規直交函数系とすれば、 $\sum e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y)$ は 4 変数として、 $E(x, y, t) = \sum e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y)$ 。したがって積分して、 $\sum_n e^{-\lambda_n t} = \int_M E(x, x, t) \nu_g(x)$ を得る。したがって $\sum_n e^{-\lambda_n t}$ の様子は FSRHE によって決まる。

最近 Colin de Verdière [4] は $C^\infty(M; \mathbb{C})$ に作用する Δ に対して、複素熱方程式の基解 FSCHE を構成し、それを綿密に調らべることによって、 $\sum_{n \geq 0} e^{-\lambda_n z} = \int_M E(x, x, 1/z) \nu_g(x)$ の、 $z = z_0 + iy$ ($z_0 > 0$; fix) の $y \rightarrow \infty$ のときの漸近展開を得た。これは (M, g) の閉測地線に密接に関連することから分かる。ここでは Colin de Verdière の結果を紹介することを目指す。なお Fourier 積分作用素の理論を用いた approach の仕方 [2], [4] もある。また確率論的立場から熱方程式の基解を扱ったものに [6] がある。

§1. 閉測地線. $\mathcal{R}(M) := \{\gamma: S^1 \rightarrow M \mid \text{class } H^1, \text{ loop}\}$ は

Hilbert 多様体の構造を持ち、 $\Omega(M)$ 上の energy 積分 $E: \Omega(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を $E(\gamma) := \int_{\Sigma} |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$ で定義すれば、これは C^∞ -関数となる。 E の critical points が (M, g) の 閉測地線 (真曲線を含む) であり、critical value は 閉測地線の長さの平方である。 $\mathcal{L}$ で 閉測地線の長さの集合を表わすことにする。 M がコンパクト故 $\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}^+$ の 閉部分集合である。

さて $L \in \mathcal{L}$ が (ND) (non-degenerate) とは、 E の critical value L^2 に対応する critical points 全体が有限個のコンパクト、非退化な critical submanifolds の和集合として表わされる場合を云う。 $\mathcal{L}$ に W が E の 非退化な critical submanifold であるとは、

- (i) W は $\Omega(M)$ の 連結部分多様体で、各元 $w \in W$ は E の critical point である。
- (ii) $\forall w \in W$ に対し、接空間 $T_w \Omega$ の 閉部分空間 $T_w W$ 、及び N_w による直和分解 $T_w \Omega = T_w W \oplus N_w$ で $\text{Hess}_w E|_{N_w}$ が 非退化な 2 次形式となる様なものが存在する。

この様な W の nullity $n(W)$ を $L \neq 0$ のときは、 $\dim W - 1$ で、 $L = 0$ のときは $\dim W (= \dim M)$ で定義する。 また W の index $j(W)$ を $\text{Hess}_w E|_{N_w}$ の index (これは $w \in W$ の取り方によらない) で定義する。

Definition (1.1) (M, g) が 条件 (P_1) を満たすとは、 $\forall L \in \mathcal{L}$ が (ND) である ことをする。 次に (P_2) を満たすとは、 $\forall L \in \mathcal{L}$ に対して

が (NP) であり、nullity 0. かつ γ を長さ L の閉測地線とすると、energy L^2 の critical points 全体の集合は L 度次の 2 つの critical submanifolds W_+, W_- からなる。

$$W_+ := \{t \rightarrow \gamma(t+a); a \in [0, 1]\}, W_- := \{t \rightarrow \gamma(a-t); a \in [0, 1]\}.$$

注意. $(P_1) \Rightarrow \mathcal{L}$ は discrete. $(P_2) \Rightarrow$ 閉測地線は isolated でそれらの長さはすべて異なる。 $(P_1), (P_2)$ は generic.

以下の議論では $\mathcal{Q}(M)$ よりも、 $\mathcal{Q}(M)$ の piecewise geodesic loops よりなる有限次元多様体による近似の方が用いられる。

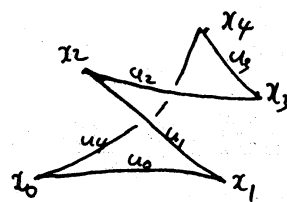
$$X_n := \{(u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u_i \in [0, 1], \sum u_i = 1\} \text{ } n\text{-次元開単体.}$$

$\overline{xy}$: M の 2 点 x, y の (g に関する) 距離.

ρ : (M, g) の injective radius.

$$M_0^{n+1} := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \underbrace{M \times \dots \times M}_{n+1} \mid \overline{x_i x_{i+1}} < \rho \text{ } i=0, \dots, n, \text{ with } x_{n+1} = x_0\}$$

と約束する。さて $U \in X_n$ を一つ与えた時、embedding $j_U: M_0^{n+1} \hookrightarrow \mathcal{Q}(M)$, $\gamma = j_U(x_0, \dots, x_n)$ を次の様に定義する。 $t_0 = 0, t_1 = u_0, \dots, t_i = u_0 + \dots + u_{i-1}$ とおくと、 $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ が x_i と x_{i+1} を結ぶ最短測地線、張長に比例して径数づけられたものとして、 γ を定義する。このとき、 $E \circ j_U(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}$ は容易に分かる。 M_0^{n+1} 上の C^∞ -関数 $E_U = E \circ j_U$ の critical point $(x_0, \dots, x_n)$ は $j_U(x_0, \dots, x_n)$ が閉測地線であり



(即ち, $\dot{\gamma}|_{[t_0, t_1]}(t_1-0) = \dot{\gamma}|_{[t_1, t_2]}(t_1+0)$, $\frac{x_0 x_1}{u_0} = \dots = \frac{x_n x_{n+1}}{u_n}$ が特徴づけられる。第一変分, 第二変分を考えることにする。

Proposition (1.2) $h: X_n \times M_0^{n+1} \rightarrow X_n \times \Omega(M)$ を $h = \text{id}_{X_n} \times j_U$ によって, また $\widehat{E}: X_n \times M_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\widehat{E}(U; (x_i)) = E \cdot j_U((x_i))$ によって定義する。このとき, h は imbedding であり, $\widehat{E}$ の critical points の集合と, $\{(U, \gamma) \mid \gamma: \mathbb{R} \rightarrow L, L_\gamma < P/\text{Max}(u_i) \text{ の閉測地線} \}$ の間の 1対1 上への対応を与える。更に W が E の critical value $L^2 (< ((n+1)P)^2)$ の非退化, critical submanifolds であることがあれば, $h^{-1}(X_n \times W)$ は 次元 $n(W) + n + 1$ ($L=0$ のとき $n+1$) index が $j(W)$ の $\widehat{E}$ の非退化 critical submanifold である。

3.2. 熱方程式に対する複素基本解の構成

Definition (2.1). $C_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$ とおく。 $E: M \times M \times C_+ \rightarrow \mathbb{C}$ が複素熱方程式の基本解 FISCHE であるとは,

(i) E は 3つの変数に関して C^0 , 最初の2つの変数に関して C^2 , 第3の変数に関して holomorphic で, $\Delta_2 E + \frac{\partial E}{\partial z} = 0$ を満たす。

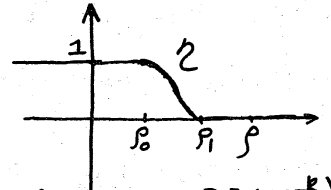
(ii) $\forall f: M \rightarrow \mathbb{C}$ 連続関数, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| < \pi/2$ に対して,

$$\lim_{|z| \rightarrow 0, |\text{Arg } z| \leq |\alpha|} \int_M E(x, y; z) f(y) d_g(y) = f(x) \quad \text{が成立する。}$$

さて FISCHE は存在して一意である。(Berger etc. [1]) 構成法は以下の通り。まず ρ_0, ρ_1 を $0 < \rho_0 < \rho_1 < P$ を満たす正数。

ζ を図の様な C^∞ -函数として、また

熱方程式の parametrix $H_k: M \times M \times \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ を



$$(2.2) \quad H_k(x, y; z) := \zeta(\bar{x}y) (4\pi z)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\bar{x}y^2}{4z}\right) (U_0(x, y) + U_1(x, y)z + \dots + U_k(x, y)z^k)$$

の形で定義する。こゝで z の中は $\mathbb{C}_+$ に在る分枝を取ることにし、

$$U_0, \dots, U_k \text{ は } \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right) \left\{ (4\pi z)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\bar{x}y^2}{4z}\right) (U_0(x, y) + \dots + U_k(x, y)z^k) \right\}$$

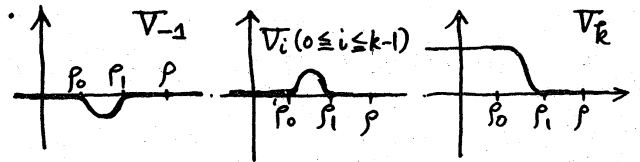
が z に関して $(k - \frac{d}{2})$ 次の項だけに reduce する様に微分方程式の解として帰納的に決定される C^∞ -函数である。 $L_k(x, y; z) :=$

$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right) H_k(x, y; z)$ と定義すれば、直接の計算で

$$(2.3) \quad L_k(x, y; z) = (4\pi z)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\bar{x}y^2}{4z}\right) \left(\sum_{i=1}^k V_i(x, y) z^i\right)$$

の形にかけることが分かる。こゝに V_i は $M \times M \subset C^\infty$ (実数値)

函数で図の様な性質を持つ。



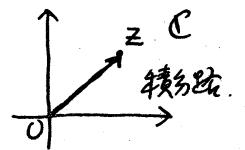
$\zeta(\bar{x}y) U_i(x, y)$ を改めて

$U_i(x, y)$ と書くことに

すれば $\text{supp}(U_i) \subset \{(x, y) \in M \times M \mid 0 \leq \bar{x}y \leq p_1\}$.

いま函数の合成積 $*$ を

$$(A * B)(x, y; z) = \int_0^z \int_{0, M} A(x, \eta; \theta) B(\eta, y; z - \theta) \nu_\theta(\eta) d\theta$$



で定義すればこれは容易に分かる様に $z \int_M \int_M A(x, \eta; u_0 z) B(\eta, y; u_1 z)$

$\nu_\theta \otimes \mu_1$ に等しい。こゝに μ_1 は $X_1 \subset \mathbb{R}$ の total mass 1 の自然、

な測度。 $*$ は associative であつて、帰納法で

$$(L_k)^{*n} * H_k(x, y; z) = z^n \int_{M^n \times X_n} L_k(x, x_1; u_0 z) \dots L_k(x_{n-1}, x_n; u_{n-1} z) H_k(x_n, y; u_n z) \lambda_n$$

— ところで $\lambda_n = \nu_g(x_1) \otimes \cdots \otimes \nu_g(x_n) \otimes \mu_n(U)$, μ_n は X_n 上の total mass

ν_n の自然な測度 — が証明される。F72. (2.2), (2.3) より

$$(2.4) \quad (L_k)^{*n} H_k(x_0, x_{n+1}; z) = \int_{M^n \times X_n} \exp\left(-\frac{1}{4z} \sum_{i=0}^n \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}\right) P_n^k(x_0, x_1, \dots, x_n; U; \frac{1}{z}) \\ \bigotimes_{i=1}^n \nu_g(x_i) \otimes \mu_n(U).$$

ところで

$$(2.5) \quad P_n^k((x_i); U; z) = \overline{z}^{\frac{n+1}{2}} \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ \left(\frac{z}{4\pi u_i} \right)^{\frac{d}{2}} \sum_{j=-1}^k V_j(x_i, x_{i+1}) \left(\frac{u_i}{z} \right)^j \right\} \cdot \left(\frac{z}{4\pi u_n} \right)^{\frac{d}{2}} \sum_{j=0}^k U_j(x_n, x_{n+1}) \times \\ \times \left(\frac{u_n}{z} \right)^j \quad \text{[redacted]}.$$

したがって, P_n^k は

$$(2.6) \quad P_n^k((x_i); U; z) = \sum_{l=l_0}^{(n+1)d/2} P_{n,l}^k((x_i); U) z^l \quad (z l_0 \in \mathbb{Z})$$

の形を持ち, z の最高次の係数は

$$P_{n, \frac{(n+1)d}{2}}^k((x_i); U) = \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} \frac{V_i(x_i, x_{i+1})}{u_i (4\pi u_i)^{d/2}} \right\} \left\{ \frac{U_0(x_n, x_{n+1})}{(4\pi u_n)^{d/2}} \right\} \quad \text{[redacted]}. \quad \text{である.}$$

さて上の条件をみたす性質の ρ_0, ρ_1, ρ_2 , $\forall k > d/2$ に対して.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (L_k)^{*n} H_k$ は収束して FSCHE であることが示される.

したがって FSCHE の性質は (2.4) の形の積分の無限和から

であるか. $\sum_{i=0}^n \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i} = E_U((x_i))$ であることに注意しよう.

(2.4) の形の積分は $E_U((x_i))$ の critical value が重要な役割りを果たす (stationary phase method). しかしこの積分は

P_n^k が z, u に関して負の値を持つこと, また X_{n+1} がコンパクトでないこと等の理由によって, 技術的に困難な点が多い.

後で用いられる評価式を挙げておこう.

Proposition (2.7) $k > d/2$, $z: \operatorname{Re}(z) = \xi_0 > 0$ を fix する。このとき、

n に無関係な正数 C_1, C_2 が存在して、

$$\int_{M^n \times X_n} \exp\left[-\xi_0 \sum_{i=0}^n \frac{x_i x_{i+1}^2}{u_i}\right] |P_n^k((x_i); U; z)| \bigotimes_{i=1}^n \nu_g(u_i) \otimes \mu_n(U) \leq C_1 C_2 |z|^{\frac{(n+1)d}{2}} \frac{1}{\{n(k-\frac{d}{2})\}!}$$

$$\text{ただし } |P_n^k((x_i); U; z)| = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{(n+1)d}{2} \rfloor} |P_{n,l}^k((x_i); U)| |z|^l \text{ である。}$$

Proposition (2.8) $C_{\xi_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \xi_0 > 0\}$ とおく。このとき、

$$\forall \xi_0 > 0, \forall \alpha > 0; \exists C, C' > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$\forall z \in C_{\xi_0} \text{ に対し } |E(x, y; \frac{1}{z})| \leq C \exp(C' |z|^\alpha).$$

(2.8) は $k - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor > \frac{d}{2}\alpha$ とする k を選べ、(2.7) を用いることにより簡単に示せる。

§3. 擬 Fourier 変換、展開 (Fd).

以下 (2.4) の積分を直接扱うのではなく、Fourier 変換に似た変換を施したものを考える。 $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ とおく。 $z \rightarrow \infty$ と書くときはには、 $\xi_0 > 0$ が固定されていて、 $z = \xi_0 + iy$, $y \rightarrow \infty$ を意味するものとする。

Definition (3.1) $f: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ は bounded by exponential when $z \rightarrow \infty$ であるとする。(i.e. $\exists A, B > 0$ 正定数 s.t. $|f(\xi_0 + iy)| \leq A e^{By}$). このとき、 $(\phi, \psi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ に対して

$$f(\sigma, t) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi_0 + iy) \exp\left(\frac{1}{2} \sigma \left(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right) dy \quad (\xi_0: \text{fix})$$

と定義する。仮定により f は絶対収束する。

Definition (3.2). $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ 単調増加列, $t_n \geq 0$. $f, f_n:$

$\mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$. このとき記号 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t_n z) f_n(z) \quad (F_0)$ は

(i) $\forall t \in \{t_n\}$ に対して $f(\sigma, t) = O(\sqrt{\sigma})$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\sigma, t_n) = f_n(\sigma, 0) \exp(-\xi_0 t_n) + O(\sqrt{\sigma})$.

が成立することを意味する。次に実数 α に対して,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t_n z) f_n(z) \quad (F_\alpha) \quad \text{は}$$

$$z^\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t_n z) z^\alpha f_n(z) \quad (F_0) \quad \text{を意味するものとする。}$$

我々は $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\lambda_n}{z})$ の二種類の展開を考えるのであるが,

そこで表われる $f_n(z)$ は次の型の函数である。 $g: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$

が type T_α の函数であるとは,

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{j=1}^N a_j z^{\alpha_j} & \text{for } \operatorname{Im}(z) \geq 0, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N \\ \overline{g(\bar{z})} & \text{for } \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases} \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

の形に書ける場合を云う。

このとき、次の事実を証明することが出来る。

Proposition (3.4) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t_n z) f_n(z) \quad (F_\alpha)$ について,

すべての f_n が type T_α の函数であれば、この展開は一意的である。

注意. 定義(3.1)で $-\sigma(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2$ の代りに $-\sigma y^2$ とすると(3.4)

は成立しない。また展開 (F_α) を考えるのは、 $\sum \exp(-\frac{\lambda_n}{z})$ の漸近展開で高次の係数を定める際、必要となるためである。

定理の証明に必要な $\hat{f}$ の性質を挙げておこう。

Lemma (3.5) $f: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ が $z \rightarrow \infty$ のとき、有界であれば、

$$\hat{f}(\sigma, t) = O(\sqrt{\sigma}).$$

Lemma (3.6) $P: \mathbb{N} \rightarrow \sum_{p=p_0}^{p_1} a_p z^{p/2}$ ($p_0, p_1, p \in \mathbb{Z}$), $|P|: z \rightarrow \sum_{p=p_0}^{p_1} |a_p| |z|^{p/2}$

と置く。 $0 \leq 1$ に對して次下が成立する。

$$(3.7). p_0 \geq 0, t \leq 0 \text{ ならば } |\hat{P}(\sigma, t)| \leq C T^{\frac{p_1}{4} + \frac{1}{2}} \sigma^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{t^2}{4\sigma}) |P|(2\zeta_0 + \frac{|t|+4}{\sigma})$$

$$(3.8). p_0 \geq 0, |t| > 0 \text{ ならば } \hat{P}(\sigma, t) = O(\sqrt{\sigma}). \text{ 更に } |t| \geq |t_0| > 0 \text{ ならば}$$

一様一様に成立する。

$$(3.9). p_1 \leq 0 \text{ ならば } |\hat{P}(\sigma, t)| \leq (\pi/\sigma)^{1/2} |P|(\zeta_0).$$

§4. この節では定理を述べる。

Theorem (M^d, g) d 次元コンパクト連結リーマン多様体。

$(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ 上作用する Δ のスペクトルと可る。

$(0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots)$. $\mathcal{L}$ が (M, g) の閉測地線の長さ全体の非空 $\mathbb{R}^+$ の閉集合を表わす。このとき、

$$Z(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\lambda_n}{z}) \text{ は各 } z \in \mathbb{C}^+ \text{ に對して収束して}$$

$$(I). \text{ 尤も } \{ \frac{L^2}{4} | L \in \mathcal{L} \} \text{ ならば } \forall d \geq 0 \text{ に對して } \widehat{Z^d Z(z)}(\sigma, t) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}).$$

(II). $\mathcal{L}$: discrete であるとき. $L_0 = 0 < L_1 < L_2 < \dots < L_m < \dots$
 と $\mathcal{L}$ の元を並べるとき, $\forall \alpha \geq 0$ に対して f_m^α が存在して.

$$Z(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^\alpha(z) \exp(-z \frac{L_m^2}{4}) \quad (F\alpha)$$

の形の展開式を得る. 更に L_m が (ND) (S1) で対応する
 critical submanifolds $(W_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq \Lambda}$ の nullity n_λ , index j_λ を
 持つば.

$$P_\lambda^\alpha(z) := \begin{cases} \exp(i j_\lambda \frac{\pi}{2}) (a_0 z^{\frac{n_\lambda+1}{2}} + a_1 z^{\frac{n_\lambda-1}{2}} + \dots + a_\ell z^{-\frac{2\ell-1}{2}}) & \text{if } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \overline{P_\lambda^\alpha(\bar{z})} & \text{if } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad \text{where } a_0 > 0.$$

の形の関数が存在して. $f_m^\alpha(z) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} P_\lambda^\alpha(z)$ と書ける. $\therefore$
 $f_m^\alpha(z)$ は type T_α として決まる.

注意1. $m=0$ のときが Minakshisundaram-Pleijel の展開式に
 他ならない. (この時は上式で $n_\lambda+1=d$ とする)

注意2. M^d が flat torus の場合. critical submanifolds は
 すべて次元 d , index 0 を持ち, $\forall \alpha \quad P_\lambda^\alpha(z) = (\frac{z}{4\pi})^{d/2} \operatorname{vol}(M)$.

(II) の展開式は Poisson の公式 $\operatorname{vol}(P) = \sum_{x \in P} e^{-\pi x^2 t} = \sum_{y \in P^*} e^{-\pi \frac{|y|^2}{t}}$
 (P は torus を定義する lattice. P^* は P の dual lattice) に依る.

注意3. $\mathcal{P}_2$ を持つ (M, g) に対しては spectrum は λ を定め
 る. しかし一般には spectrum から λ は決まらない. 実際ある L
 $\in \mathcal{L}$ に対して長さ L , nullity 0 の 1 度 2 つの閉測地線 γ が存在し,
 かつ γ の index が 2 だけ違うものが存在すれば, $\exp(-\frac{z}{4} L^2)$ の対応
 する 2 項は打消しあがり, L は漸近展開には現れない.

定理の証明の前に証明において本質的な役割りを果す stationary phase method について述べる。

§5. stationary phase method

Theorem 5.1. X^N ; $N \geq 1$ 元 C^∞ -多様体; $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ を compact support を持つ X 上の C^∞ -函数; $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ -函数とする。

(i) f が g の support 内に critical point を持たないとする。

任意の実数 b に対して、 $\int_X z^b \exp(-zf(x)) g(x) dx$ は $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ のとき有界である。

(ii) g の support 内の f の critical points が次元 n , index j の非退化 critical submanifold W をなすとする。 $x \in W$ に対して

$\text{Hess}_\perp f(x)$ で、 f の hessian の x における W の normal space への制限を表すものとせる。このとき任意の整数 k に対して

$$\int_X \exp(-zf(x)) g(x) \nu_g(x) = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{N-n}{2}} \exp\left(\sqrt{-1}j\frac{\pi}{2} - zf(W)\right) \left(\sum_{k=0}^K a_k z^{-k} + z^k r_k(z)\right)$$

ここで $a_0 = \int_W g(x) |\det(\text{Hess}_\perp f(x))|^{-\frac{1}{2}} \nu_W(x)$ で、 $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ のとき

$r_k(z) \rightarrow 0$ となる。

証明) (i). $\text{supp } g$ 内には f の critical point は存在しないから、

変数変換 $f(x) = t$ を行って Fubini の定理を用いれば、

$$\int_X z^b \exp(-zf(x)) g(x) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{f^{-1}(t)} z^b \exp(-zt) \right) dt$$

($f(\text{supp } g) \subset [\alpha, \beta]$)

$$= \int_{\mathbb{R}} z^b u(t) \exp(-zt) dt, \quad u(t): \mathbb{C}^b\text{-函数の形に} \text{か} \text{ける.}$$

部分積分を繰り返して行えば、(i) が示される。

(ii) $f(W)=0$ と仮定してよい。1 の分割によって g の support が f に關する Morse chart 内に含まれる場合を考えると十分である。即ち 局所座標系 $\varphi: U \rightarrow X$ を適当にとり、

$$f \circ \varphi(x_1, \dots, x_N) = -(x_1^2 + \dots + x_j^2) + x_{j+1}^2 + \dots + x_{N-n}^2$$

の形に書ける。したがって

$$\int_X \exp(-zf(u)) g(u) \nu_X(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp(z(x_1^2 + \dots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_{N-n}^2)) \times$$

$$\times g \circ \varphi(x_1, \dots, x_N) |Jac \varphi(x_1, \dots, x_N)| dx_1 \dots dx_N.$$

まず最後の n 個の変数について積分するとよい。

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-n}} \exp(z(x_1^2 + \dots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_{N-n}^2)) \bar{g}(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-n}) dx_1 \dots dx_{N-n}$$

$$\text{ただし} \quad \bar{g}(x_1, \dots, x_{N-n}) = \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \varphi(x_1, \dots, x_N) |Jac \varphi(x_1, \dots, x_N)| dx_{N-n+1} \dots dx_N.$$

したがって (ii) は次の補題に帰着される。

Lemma 5.2 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ compact support を持つ $\mathbb{C}^b$ -函数

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(z(x_1^2 + \dots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_d^2)) g(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

$$= \left(\frac{\pi}{z}\right)^{d/2} \exp\left(i\pi \frac{z}{2}\right) \left(g(0) + \sum_{k=1}^b a_k z^k + z^k v_k(z)\right)$$

ここで $\operatorname{Im}(z) \rightarrow +\infty$ とき、 $v_k(z) \rightarrow 0$ 。

これは Gauss 積分を用いて計算される。なお

$$\begin{aligned}\bar{g}(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \varphi(0, \dots, 0, x_{N-n+1}, \dots, x_N) |\operatorname{Jac} \varphi(0, \dots, 0; x_{N-n+1}, \dots, x_N)| dx_{N-n+1} \dots dx_N \\ &= 2^{\frac{N-n}{2}} \int_W g(x) |\det(\operatorname{Hess} f(x))|^{-\frac{1}{2}} \nu_W(x) \quad \text{に注意.}\end{aligned}$$

§6 定理の証明.

$\alpha=0$ の場合に証明できれば一般の α の場合も同様の証明が有効である。さて $z \in \mathbb{C}^+$ に対しては

$$Z(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_n}{z}\right) = \int_M E(x, z; \frac{1}{z}) \nu_g(x)$$

であって、 $Z(z)$ は $z \rightarrow \infty$ のとき bounded by exponential であるから (Prop (2.8)) $\hat{Z}(\sigma, t)$ を考えることができる。(2.4), (3.1) から

$$\begin{aligned}(6.1) \quad \hat{Z}(\sigma, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\ &\times \int_{M_0^{n+1} \times X_n \times \mathbb{R}} \exp\left[-\frac{\xi_0 + \sqrt{t} y}{4} E_U((x_i) + \sqrt{t} y - \sigma(y - \frac{1}{\sigma^2}))^2\right] P_n^k(x_0, x_1, \dots, x_n, x_0; U; \xi_0 + \sqrt{t} y) \\ &\quad \bigotimes_{i=0}^n \nu_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \otimes dy.\end{aligned}$$

ただし P_n^k は (2.5) で与えられるものである。これは $z=1$ に関して、負の巾に分けて $P_n^k = P_n^{k+} + P_n^{k-}$.

$$P_n^{k+}(z) = \sum_{\ell \geq 0} P_{n,\ell}^k((x_i); U) z^\ell, \quad P_n^{k-}(z) = \sum_{\ell < 0} P_{n,\ell}^k(z) z^\ell \quad \text{と分解し}$$

(6.1) の積分は

$$(6.2) \quad \hat{Z}(\sigma, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (I_n^+(\sigma, t) + I_n^-(\sigma, t)) \quad \text{と書く.}$$

以下 証明の方針は 式 (3.9) を用いて $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n^-(\omega, t) = O(1/\sqrt{\sigma})$ を示すことを見る。 $I_n^+(\omega, t) = \int_{M_0^{1/4} \times X_n \times \mathbb{R}} \exp(-\frac{\sigma}{4} E_U(x)) \exp(\sqrt{\sigma} y(t - \frac{E_U(x))}{4}) -$

$$- \sigma(y - \frac{1}{\sigma})^2 \Big] P_n^+ \bigotimes_{i=0}^n v_i(x) \otimes \mu_n(U) dy \quad \text{に於いて} \quad \sqrt{\sigma} y(t - \frac{E_U(x))}{4}$$

という項があるから、 $E_U/4$ から離れているときには (3.8) から $I_n^+(\omega, t) = O(1/\sqrt{\sigma})$ を得る。 $E_U/4$ から近い y では、被積分関数が compact support を持ち定理 5.1 が適用される。

しかし我々は $I_n^+(\omega, t)$ の級数を取り扱わねばならない。
また U_i の負の y が現れること、 X_n が compact ではないことのために、 $I_n^+(\omega, t)$ を与えられた t から E_U の値が離れている部分とコンパクトな support を持つ部分に分解するためには次の technical な準備が必要である。

Lemma (6.3) $t \geq 0$ が与えられているとする。二つのとき p_0, p_1 ($0 < p_0 < p_1 < p$)、 ℓ 自然数、 C^∞ -函数 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で t のある近傍で 1, $[t-\beta, t+\beta]$ ($\exists \beta > 0$) 内に support を持つもの、および自然数 n_0 で以下の条件を満たすものがとれる。

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n^-(\omega, t)| = O(1/\sqrt{\sigma}), \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |I_n^+(\omega, t)| = O(1/\sqrt{\sigma})$
- (ii) 任意の $m \in \{0, 1, \dots, n_0\}$ に對して $[np_0, np_1] \cap [2\sqrt{t-\beta}, 2\sqrt{t+\beta}] = \emptyset$
- (iii) $2\sqrt{t} \notin \mathcal{L}$ ならば $[2\sqrt{t-\beta}, 2\sqrt{t+\beta}] \cap \mathcal{L} = \emptyset$
- (iv) $2\sqrt{t}$ が $\mathcal{L}$ の孤立点ならば $[2\sqrt{t-\beta}, 2\sqrt{t+\beta}] \cap \mathcal{L} = \{2\sqrt{t}\}$
- (v) $n=1, \dots, n_0$ に對して、 $((x_i), (y_i, z_i)) \in \text{Supp } P_n^{k+}$ ならば $\overline{x_i x_{i+1}} \geq p_0$ ($i=0, 1, \dots, n-1$)

$$(vi) \hat{\Sigma}(s, t) = \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^n \int_{M_0^{n+1} \times X_n \times \mathbb{R}} \exp\left[-\frac{\xi_0}{4} E_U(x_i) + \sqrt{-1} y \left(t - \frac{E_U(x_i)}{4}\right) - \delta \left(y - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^2\right] \times \\ \times \varphi\left(\frac{E_U(x_i)}{4}\right) P_n^{k+}(x_i, U; z) \bigotimes_{l=0}^n V_j(x_i) \otimes \mu_l(U) dy + O(\sqrt{\delta}).$$

Lemmaの証明). 再び I_n の評価を行う。

$$|I_n(s, t)| \leq \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{M_0^{n+1} \times X_n} \exp\left[-\frac{\xi_0}{\delta} E_U(x_i)\right] |P_n^{k+}(x_i, U; \xi_0)| \otimes V_j(x_i) \otimes \mu_n(U) \\ (y \text{ に関しては } (3.9) \text{ を用いる}) \\ \leq \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} C_1 C_2^n \frac{\xi_0^{\frac{(n+1)d}{2}}}{\{n(k - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor)\}!} \quad (\text{Prop (2.7)})$$

$$\text{故に } \sum_{n=0}^{\infty} |I_n(s, t)| = O(\sqrt{\delta}).$$

以下 $t > 0$ として証明するが $t = 0$ の場合も同様である。

$\rho_0 > 0$ を $2\sqrt{\delta} \notin \{n\rho_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおき様に選ぶ。 n_0 は $n_0\rho_0 < 2\sqrt{\delta} < (n_0+1)\rho_0$ を満たす自然数と可。 又 $N(x_i) = N(x_0, \dots, x_n) := \#\{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mid \overline{x_i x_{i+1}} \geq \rho_0\}$ とおけば、

$E_U(x_i) = \frac{\overline{x_0 x_1}}{u_0} + \dots + \frac{\overline{x_n x_0}}{u_n} \geq (N(x_i)\rho_0)^2$ である。 $P_n^{k+}(x_i; U; \xi)$ を考え、 ξ の2項は、

$\sum_{j_0, \dots, j_n} V_{j_0}(x_0 x_1) \dots V_{j_{n-1}}(x_{n-1} x_n) U_{j_n}(x_n x_0) Q_{j_0, \dots, j_n}(U) \geq \frac{n(\frac{d}{2}-1) - \sum_{i=0}^n j_i + \frac{d}{2}}{2}$ である。 かつ $n(\frac{d}{2}-1) + \frac{d}{2} \geq \sum_{i=0}^n j_i$ を得る。 $i=3$ から U_j, V_j の support に関する条件 (p.6) から $\overline{x_i x_{i+1}} < \rho_0$ を満たす i は i に対して P_n^{k+} に現われる $V_{j_i}(x_i x_{i+1})$ の j_i は k でなければならぬ。 故に $j_n \geq 0, j_0, \dots, j_{n-1} \geq -1$ であるから $\sum_{i=0}^n j_i \geq (n - N(x_i))k - N(x_i)$ を得る。 かつ $N(x_i) \geq n \frac{k}{k+1} - \frac{d(n-1) - 2n}{2(k+1)}$

この式の右辺は $k > d/2 + 1$ のとき n に関して単調増加であり、
 n を固定したとき、 $k \rightarrow \infty$ とすれば単調に n に収束する。よつ
 て特に $n = n_0 + 1$ とおくと、 $\exists k$ (自然数) $\exists 1 \geq \varepsilon_0 > 0$,

$$N(x_i) \geq n \frac{k}{k+1} - \frac{d(n-1)-2n}{2(k+1)} \geq \frac{2\sqrt{t+\varepsilon_0}}{p_0}, \quad \text{したがって同じ } k, \varepsilon_0 \text{ に対して}$$

$$n \geq n_0 + 1 \text{ ならば } N(x_i) \geq \frac{2\sqrt{t+\varepsilon_0}}{p_0} \quad \text{i.e. } E_U(x_i) \geq 4(t+\varepsilon_0).$$

を得る。よつて $n \geq n_0 + 1$ に対して

$$(6.4) \quad \text{Supp}(P_n^{k+}) \subset \{(x_i, U) \mid E_U(x_i) \geq 4(t+\varepsilon_0)\} \times \mathbb{C}^+$$

であることが示される。こゝで k が十分大ならば (6.4) 及び

$n = 1, \dots, n_0$ に対しては $N(x_i) > n-1$ とできること、よつて (V) が成立することには注意しておこう。さて ρ, β, γ は (ii),

(iii), (iv) をみたすようにとれる。そこで $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |I_n^+(\sigma, t)|$ の評価を行

う。 $Y_p = \{(x_i, U) \mid E_U(x_i) \in [4(t+p), 4(t+p+1)] \quad (p \geq 1),$

$Y_0 = \{(x_i, U) \mid E_U(x_i) \in [4(t+\varepsilon_0), 4(t+1)]$ とおく。

(6.4) より $\text{Supp}(P_n^{k+}) \subset \bigcup_{p=0}^{\infty} Y_p \times \mathbb{C}^+$, である。 $I_n^p(\sigma, t)$ で Y_p 上の積分を表わせば、

$$I_n^p(\sigma, t) = \int_{Y_p \times \mathbb{R}} \exp \left[-\frac{3_0}{4} E_U(x_i) + \sqrt{t} \gamma \left(t - \frac{E_U(x_i)}{4} \right) - \sigma \left(\gamma - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 P_n^{k+} \right] \bigotimes_{l=0}^n \nu_l(x_i) \otimes \mu_l(U) \otimes dy$$

$$\leq \frac{C(3_0)}{\sqrt{\sigma}} \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{(n+1)d}{2} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{4\sigma} \right) \int_{Y_p} \exp \left[-\frac{3_0}{4} E_U(x_i) \right] |P_n^{k+}| (23_0 + \frac{p+5}{\sigma})$$

$$\leq \frac{C_1}{\sqrt{\sigma}} \exp \left(-\frac{p^2}{4\sigma} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{(n+1)d}{2} \right) C_2^n \left(23_0 + \frac{p+5}{\sigma} \right)^{\frac{(n+1)d}{2}} \frac{1}{\{n(2d+1-\frac{d}{2})\}!} \quad (3.7)$$

$$\leq \frac{C_2'}{\sqrt{\sigma}} C_2^n \exp \left(-\frac{p^2}{4\sigma} \right) \left(23_0 + \frac{p+5}{\sigma} \right)^{\frac{(n+1)d}{2}} \frac{1}{\{(n+1)d\}!} \quad (\text{Prop. 2.7})$$

よって $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} I_n^p(\sigma, t) \leq \frac{C_3}{\sqrt{\sigma}} \exp(-\frac{p^2}{4\sigma} + C_4 \sqrt{\frac{p+5}{\sigma}})$ 後は p に関して和をとって (i) を得る。最後に (vi) を示そう。そのためには $n \leq n_0$ に対して。

$$\int_{M_0^{n+1} \times X_n \times \mathbb{R}} \exp[-\frac{3\sigma}{4} E_0((x)) + \sqrt{t} y(t - \frac{E_0((x))}{4}) - \sigma(y - \frac{1}{\sigma})^2] (1 - \varphi(\frac{E_0((x))}{4})) P_n^{k+}((x), U; \frac{3\sigma}{4} + \sqrt{t} y) \bigotimes_{i=0}^n V_g(x_i) \otimes \mu_n(U) dy$$

が $O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ であることを示せば十分である。しかし $\frac{E_0((x))}{4}$ が十分に小さいとき、 $1 - \varphi(\frac{E_0((x))}{4}) = 0$ になるから被積分関数の support 内では $|t - \frac{E_0((x))}{4}| \geq \frac{3}{4} t_0 > 0$ であるから (3.8) を用いることができる。(lemma の証明終り)。

したがって定理の証明のためには、 $J_n(z) := (-1)^n \int_{M_0^{n+1} \times X_{n+1}} \exp(-\frac{3\sigma}{4} E_0((x))) \times P_n^{k+}((x_i), U; z) \varphi(\frac{E_0((x))}{4}) \bigotimes_{i=0}^n V_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$ と置くと、(6.3)(vi) より

$\widehat{Z}(\sigma, t) = \sum_{n=0}^{n_0} \widehat{J}_n(\sigma, t) + O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ であるから、 $\widehat{J}_n(\sigma, t)$ を調らべればよい。しかし $M_0^{n+1} \times X_n$ はコンパクトではないから $\varphi(\frac{E_0}{4}) P_n^{k+}$ は一般には compact support を持たず、したがって stationary phase method を直接使うことはできない。両方 J_n が compact support を持つ部分とそれに関して有界な部分に分ける必要がある。これは次の補題によって実行することができる。

Lemma (6.5). $f: X_n \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(u_0, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i^2}{u_i}$ で定義する。

$z \in \mathbb{C}^n$ $0 \leq i \leq n-1$ に対して $\alpha_i \in [p_0, p_1]$, $\alpha_n \in [0, p_1]$ である
 とする。 $\Phi: \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ -函数で $[np_0, np_1]$ と disjoint な compact
 support を持つもの。 $(k_i)_{0 \leq i \leq n} : k_n \leq d/2$ を与える実数とする。
 このとき、 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists C_k, D_k > 0$ ($n, p_0, p_1, (k_i), \Phi$ により depend する)
 s.t. $\forall \alpha_n \leq D_k$ に対して

$$\left| \int_{X_n} \exp(-\frac{z}{4} f(v)) \Phi(\sqrt{f}(v)) u_0^{k_0} \dots u_{n-1}^{k_{n-1}} u_n^{-k_n} \mu_n(v) \right| \leq C_k / (|z|^k \alpha_n^{d-2})$$

証明) 以下 $C_1, C_2, \dots$ と書けば、 $n, p_0, p_1, (k_i), \Phi$ により depend
 する正数を表わすものとする。 $\varepsilon > 0$ に対して $\Omega_{L_i}^\varepsilon :=$

$$\{U \in X_n \mid \left| \frac{\alpha_i}{u_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}} \right| > \varepsilon/2\} \quad i=0, \dots, n-2. \quad \Omega_{L_{n-1}}^\varepsilon := \{U \in X_n \mid$$

$$\left| \frac{\alpha_i}{u_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}} \right| < \varepsilon \quad i=0, 1, \dots, n-2\} \text{ と定義する。 このとき } (C_i)_{1 \leq i \leq 5}$$

で、 $\varepsilon \leq C_1, \alpha_n \leq C_2$, かつ $U \in A := \Omega_{L_{n-1}}^\varepsilon \cap \text{supp}(\Phi \circ \sqrt{f})$ に対して

(6.6) (i) $\left| \frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_n}{u_n} \right| \geq \frac{C_3}{\alpha_n}$ or (ii) $u_n \geq C_4$, $\left| \frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_n}{u_n} \right| \geq C_5$
 を与える様なものをとることはできる。 $X_n \subset \Omega_{L_0}^{C_1} \cup \dots \cup \Omega_{L_{n-1}}^{C_1} \cap \{u_n > \frac{C_4}{2}\}$,
 $\Omega_{L_{n-1}}^{C_1} \cap \{C_n < C_4\}$ に対しては開被覆に付随する 1 の分割

$\varphi_0, \dots, \varphi_n$ を α_i ($i=0, \dots, n-1$) に連続的に依存する様にとる。

g を上の積分の被積分函数とし、 $K_i = \int_{X_n} g \varphi_i \mu_n$ とおく。このとき

K_i ($0 \leq i \leq n-2$) に対する評価: X_n を $u_0, \dots, u_i, u_{i+2}, \dots, u_n$ で経数

づければ、 $\left| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right| = \left| -\frac{\alpha_i^2}{u_i^2} + \frac{\alpha_{i+1}^2}{u_{i+1}^2} \right| \geq \varepsilon p_0$. K_i の累次積分で u_i
 について u_i の部分を積分を K 回繰り返せば、

$$|K_i| \leq \frac{C_k}{|z|^k} \int_0^\infty \exp(-x^2) \alpha_n^{2-d} x^{d-3} dx \leq C_k / |z|^k \alpha_n^{d-2}$$

を得る。 K_{n-1}, K_n の場合 には $X_n \in U_0, \dots, U_{n-1}$ には $\rho \geq 2$ 経数
 づける。 K_{n-1} に対しては $U_n \geq C_4$ 故 (6.6) より $|\frac{\partial f}{\partial u_0}| =$
 $|\frac{\alpha_n}{\alpha_n} + \frac{\alpha_0}{u_0}| |\frac{\alpha_n}{u_n} - \frac{\alpha_0}{u_0}| \geq C_5 \rho$, K_n に対しては $|\frac{\partial f}{\partial u_0}| \geq \frac{C_3}{u_n} \geq C_3$ より
 同じ方法が適用できる。(lemma の証明終り)

Lemma (6.7). n_0 は (6.3) で決まった自然数とする。 $\forall n \leq n_0$
 に対して $\exists \psi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ 函数で compact support を持ち、0
 の近傍で 1 に等しいもの s.t.

$$K_n(z) := \int_{M_0^{n+1} \times X_n} \exp(-\frac{z}{4} E_U((x_i))) P_n^{k+}((x_i), U; z) \varphi(\frac{E_U((x_i))}{4}) \psi_n(\overline{u_n z_0}) \bigotimes_{i=0}^n \psi_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$

は $z \rightarrow \infty$ のとき有界である。更に E_U の critical points $((x_i))$ に対
 しては $\psi_n(\overline{u_n z_0}) = 0$ が成立する。

証明). $\alpha_i = \overline{x_i x_{i+1}}$, $f(U) = E_U((x_i))$, $\Phi(s) = \varphi(\frac{s^2}{4})$ とし
 lemma (6.5) を適用する。 lemma (6.3) の (ii), (v) および (2.5) から
 (6.5) の仮定はみたされている。 E_U の critical point では
 $\frac{\alpha_0}{u_0} = \dots = \frac{\alpha_n}{u_n}$ が成立したから (6.6) より $\alpha_n \leq C_2$ に対しては。
 $\varphi \circ \frac{\Phi}{4}$ の support 内には u なる $\tilde{E}$ の critical point は存在しない。
 $z = \frac{(n+1)}{2} d$ ととり、 $\psi_n \in \text{supp } \psi_n \subset]-\infty, \inf(C_2, D_K)]$
 とする様にすれば。 lemma (6.5) より P_n^{k+} の z の最大値 $= z^{\frac{(n+1)}{2} d}$ 故
 $|K_n(z)| \leq C_K \int_{M_0^{n+1}} \overline{u_n z_0}^{2-d} \bigotimes_{i=0}^n \psi_g(x_i)$ これは normal coord.
 を用いて計算すれば容易に絶対収束することになる

(lemmaの証明終り)

したがって lemma (3.5) より $\widehat{K}_n(\omega, t) = O(1/\sqrt{\delta})$ を得る。

以上の準備の下に定理を証明することかできる。

(I)の証明 $\tau \in \frac{1}{4} |L \in \mathcal{R}|$ とする。 $\varphi_n = \frac{\varphi_0 \widehat{E}}{4} (1 - \varphi_n) P_n^{k+}$,

$$L_n(z) = \int_{M_0^{n+1} \times X_n} \exp(-\frac{z}{4} \widehat{E}((x_i); 0)) \varphi_n((x_i), U; z) \left(\bigotimes_{i=0}^n \nu_2(x_i) \otimes \mu_n(U) \right) \quad (n=0, \dots, n_0)$$

と定義すれば、 $J_n(z) = (-1)^n \{K_n(z) + L_n(z)\}$ である。 φ_n は compact support

を持ち、 φ_n の support 内には $\widehat{E}$ の critical point は存在しない。

よって定理 5.1 (i) と (3.5) から $\widehat{L}_n(\omega, t) = O(1/\sqrt{\delta})$ を得る。 二枚

(6.3), (6.6) から (I) が出る。

(II)の証明 L_m の存在は明らかで、例えば $Z(z) \exp(z \frac{L_m^2}{4})$ とすればよい。

そこで L_m が (ND) であるとする。 E の critical value

L_m^2 の critical points の set $= \bigcup_{\lambda} W_{\lambda}$ (W_{λ} : 非退化 critical sub-

manifolds). $\{\varphi_{\lambda}\} \in M_0^{n+1} \times X_n$ と 1 の分割で、 $h^{-1}(X_n \times W_{\lambda})$

の近傍では φ_{λ} は 1 に等しいものとする。 ここには Prop (1.2)

で定義されたもの。 この場合も問題となるのは $L_n(z)$ で

$$L_n(z) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \int_{M_0^{n+1} \times X_n} \exp(-\frac{z}{4} E_U(x_i)) P_n^{k+}((x_i); U; z) \varphi(\frac{E_U(x_i)}{4}) (1 - \varphi_n(x_n, x_0)) \varphi_{\lambda}((x_i); U) \left(\bigotimes_{i=0}^n \nu_2(x_i) \otimes \mu_n(U) \right)$$

(I) と異なるのは $\varphi_n \varphi_{\lambda}$ の support 内には $\widehat{E}$ の critical points

が現われる点である。 二枚の critical points は次元 $n_{\lambda} + n + 1$

($L_n=0$ の時は $d+n$), index j_{λ} の非退化 compact critical submfd.

を正すから 定理 5.1 (iii) $\in N = (n+1)d + n$ と (2) を適用することか

できる。よって $\text{Im } z > 0$ である。

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \sum_{\lambda} \sum_{s=0}^{(n+1)d/2} \int_{M_0^{n+1} \times X_n} z^s \exp\left(-\frac{z}{4} E\right) (\varphi_0 \frac{E}{4}) (1 - \psi_n) \varphi_{\lambda} p_{n,s}^k \bigotimes_{i=0}^n \psi_i(x_i) \otimes \mu_n(v) \\ &= \sum_{\lambda} \sum_s z^s \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{(n+1)d - (n\lambda+1)}{2}} \exp\left(\sqrt{1} g_{\lambda} \frac{\pi}{2} - z \frac{L_{\lambda}^2}{4}\right) \left(\sum_{k=0}^K a_{k,\lambda}^{(n)} z^{-k} + z^{\frac{1}{2}} v_{k,\lambda}^{(n)}(z)\right) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\wedge} \exp\left(\sqrt{1} g_{\lambda} \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-z \frac{L_{\lambda}^2}{4}\right) (2\pi)^{\frac{(n+1)d - (n\lambda+1)}{2}} \left\{ a_{0,\lambda}^{(n)} z^{\frac{n\lambda+1}{2}} + \dots + z^{\frac{1}{2}} + \underbrace{z^{\frac{1}{2}} v_{k,\lambda}^{(n)}(z)} \right\} \end{aligned}$$

ここで $a_{0,\lambda}^{(n)}$ は定理 5.1 (ii) から決まり、 $s = \frac{(n+1)d}{2}$ の場合であるから
その符号は $p_{n,\frac{(n+1)d}{2}}^k$ の係数 $\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{(n+1)d}{2}} V_{-1}(x_0 x_1) \dots V_{-1}(x_{n-1} x_n) U_0(x_n z_0)$
の符号 $(-1)^n$ ($p_0 < \overline{x_i x_{i+1}} < p_1$, $i=0, \dots, n-1$, $\overline{x_n z_0} < p_1$) によって与えられる。
後は $\widehat{\Gamma}_n(\sigma, t)$, $\widehat{J}_n(\sigma, t) \in \mathcal{M}$ について 0 から n_0 まで加えればよい。

その補足: [4] では定理 5.1 の応用として、

Theorem 7.1 (M, g) compact C^∞ -Riemann 多様体. $L \in \mathcal{L} - \{0\}$.

このとき次の 2 条件は同値である。

(i) $L: (ND)$ で定理 5.1 で決定される函数 $f_L^d(z)$ が $z \rightarrow \infty$ のとき
 $z^{d/2}$ の order を持つ。

(ii) 長さ L の測地線が periodic (ただしその周期は L より
小さいこともある)。

また (P_1) をみたす (M, g) の応用が与えられる。

更に定理 5.1 の拡張として、 (M, g) 上 isometry T が与えられる
とき、 $t_\lambda := \text{trace of the action of } T \text{ on } \{f: \sigma f = \lambda f\}$ とするとき、

$\sum_{\lambda} t_\lambda \exp(-\lambda/z)$ の漸近展開が与えられる。

このことは Isometry-invariant 測地線の長さ, index が関係してくる。

また $x, y \in M$ に対して $E(x, y; \frac{1}{2})$ に関する公式, forms に関する Laplacian の固有値に関する公式も与えられる。

文 献

- [1] Berger-Gauduchon-Mazet; Le spectre d'une variété riemannienne, Springer, Lecture Notes in Math 194.
- [2] Chazarain, J; Formula de Poisson pour les variétés riemanniennes, Inventiones Math. 24 ('74). 65-82
- [3] Colin de Verdière, Y; Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II; Compositio Math. 27 ('73). 159-184
- [4] Duistermaat, J. J - Guillemin, V. W; The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics. (to appear)
- [5] Minakshisundaram - Pleijel; Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds; Can. J. Math. 1. ('49) 242-256
- [6] Молчанов, С. А; ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ, УСПЕХИ МАТ. НАУК. ('75).